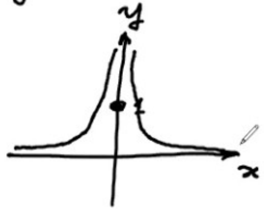
Лекция 14. (08.12.2021)

Было 1-е достаточное условие экстремума:

Теорема: "Если при переходе через критическую точку производная меняет знак (и f - непрерывна в т x_0) то в т. x_0 $f(x)$ имеет локальный экстремум"

Пример (почему важно условие непрерывности в точке x_0)



$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2; & x \neq 0 \\ 1; & x = 0 \end{cases}$$

$f'(x) > 0$ слева от т x_0
< 0 справа от т x_0

но экстремума нет.

Вариант условия. Пусть $f \in C(a;b)$ $x_0 \in (a;b)$ $f \in D(a, x_0) \wedge D(x_0, b)$

1. $f'(x) > 0$ $\forall x \in (a; x_0)$
$f'(x_0) < 0$ $\forall x \in (x_0, b)$ $\Rightarrow$ в т x_0 лок. максимум.

2. $f'(x) < 0$ $\forall x \in (a; x_0)$
$f(x) > 0$ $\forall x \in (x_0; b)$ $\Rightarrow$ в т x_0 лок. минимум.

Формула Тейлора

Пусть f имеет $(k-1)$ непрерывную производную в окрестности точки x_0, k-ю производную в точке x_0 $(k \in \mathbb{N})$

Тогда имеет место равенство

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\substack{k\text{-й многочлен} \\ \text{Тейлора}} = T_k(x,x_0)} + \underbrace{\underbrace{\alpha(x)(x-x_0)^k}_{o((x-x_0)^k)}}_{\substack{\text{остаточный} \\ \text{член в форме} \\ \text{Пеано.}}}$$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$

Док-во

Нужно проверить, что

$$\frac{f(x) - T_k(x,x_0)}{(x-x_0)^k} = \alpha(x) - \text{б.м.ф. при } x \to x_0, \text{ то есть}$$

нужно доказать, что

$\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_k(x,x_0)}{(x-x_0)^k} \overset{?}{=} 0.$$

Используем правило Лопиталя $k-1$ раз

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right)}{(x-x_0)^k} \overset{?}{=}$$

$' = 0$ $\quad$ $' = f'(x_0)$ $\quad$ $f''(x_0)(x-x_0)$

$$\overset{?}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - \left(f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^{k-1}\right)}{k(x-x_0)^{k-1}} \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - \left(f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \dots \frac{1}{(k-2)!} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^{k-2}\right)}{k(k-1)(x-x_0)^{k-2}} \overset{?}{=}$$

$$\overset{?}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'''(x) - \left(f'''(x_0) + f^{(4)}(x_0)(x-x_0) + \dots\right)}{k(k-1)(k-2)(x-x_0)^{k-3}} = \dots \quad (k-1) \text{ раз}$$

Задание

(см. А.С.Ч. Лекции по матем. анализу)

$$= \frac{1}{k!} \lim \frac{f^{(k-1)}(x) - \left(f^{(k-1)}(x_0) + f^{(k)}(x_0)(x-x_0)\right)}{x-x_0} =$$

$$= \frac{1}{k!} \lim \left(\boxed{\frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(x_0)}{x-x_0}} - f^{(k)}(x_0)\right) \overset{\text{по условию}}{=} \frac{1}{k!}\left(f^{(k)}(x_0) - f^{(k)}(x_0)\right) = 0$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(x_0)$$

ч.т.д.

При $x_0=0$ говорят "формула Маклорена"; $(x-x_0)^n=(x-0)^n=x^n$

Разложения основных функций:

1). e^x $\quad (e^x)'=e^x \Rightarrow (e^x)''=(e^x)'=e^x \Rightarrow (e^x)^{(n)}\big|_{x_0=0}=e^x\big|_{x_0=0}=1 \Rightarrow$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^k}{k!}+o(x^k)$$

2). $\sin x$ $\quad (\sin x)'=\cos x \Rightarrow (\sin x)''=(\cos x)'=-\sin x \Rightarrow (\sin x)^{(3)}=(-\sin x)'=-\cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sin x)^{(4)}=\sin x$ и т.д. $\Rightarrow$ <u>Утверждение</u> $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$

$$\Rightarrow \sin x=x+o(x)=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)=$$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^7)= \text{ и т.д.}$$

3). $\cos x$ $\quad (\cos x)'=-\sin x;\ (\cos x)''=-(\sin x)'=-\cos x$ и т.д. <u>Утверждение</u> $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$, $n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}_{\text{уже знаем}}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6) \text{ и т.д.}$$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^k}{k} + o(x^k)$

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^k)$

Практическое применение — вычислить $\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \dots$

и оценить точность.

Напоминание:

$o(x^k) := \alpha(x) \cdot x^k$ $\quad \alpha(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ — б.м.ф.

$\uparrow$

о-малое от x^k

буква о

$x^2 = o(x) \quad x \to 0$

$x^3 = o(x^2) = o(x) \quad x \to 0$

более высокого порядка малости.

Определение

α — б.м.ф. более высокого порядка (малости) чем $\beta(x)$ при $x \to x_0$ если

$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ или, другими словами

$\alpha(x) = \gamma(x) \cdot \beta(x)$

$\gamma(x)$ — б.м.ф. при $x \to x_0$

Следствие из формулы Тейлора $\Rightarrow$ Второе достаточное условие лок. экстремума функции в т x_0.

<u>Теорема</u> пусть $f(x)$ имеет (<u>непрерывную</u>) (?) производную в окрестности т x_0 ; $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)\neq 0$.

Тогда в т x_0 у функции $f(x)$ имеется лок. экстремум.

Если $f''(x_0)<0 \Rightarrow \max$

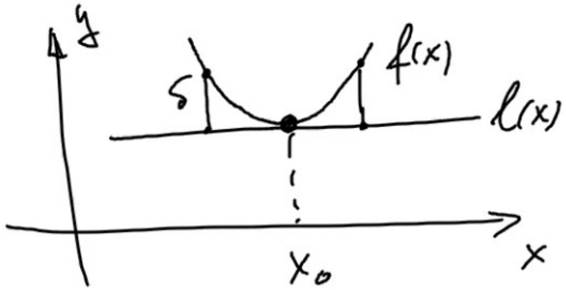
$f''(x_0)>0 \Rightarrow \min$.

Док-во:

(Рассмотрим случай $f''(x_0)>0$)

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}_{l(x)\text{ — уравнение касательной}} + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \underbrace{\overset{\text{б.м.ф.}}{\alpha(x)}\cdot(x-x_0)^2}_{o((x-x_0)^2)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x)-l(x)}_{\delta=} = \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2}_{\text{знак определяется } f''(x_0)} + \underbrace{\alpha(x)(x-x_0)^2}_{\text{при малых } |x-x_0| \text{ не влияет на знак правой части.}}$$



Если $f''(x_0)>0$ то в некоторой малой окрестности т x_0 $f(x)-l(x)>0$

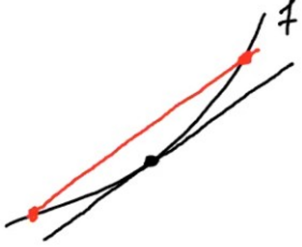
$\Rightarrow$ $f(x)$ лежит выше касательной

Но $f'(x_0)=0$ $\Rightarrow$ касательная горизонтальна

$\Rightarrow$ в т. x_0 — лок минимум.

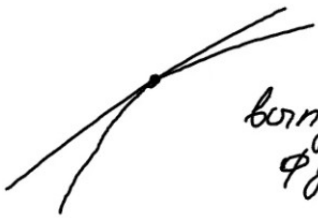
Аналогично в случае $f''(x_0) < 0$ получаем лок максимум. <u>Теорема доказана</u>

$f''(x) > 0$



Выпуклая вниз функция

$f''(x) < 0$



выпуклая вверх функция

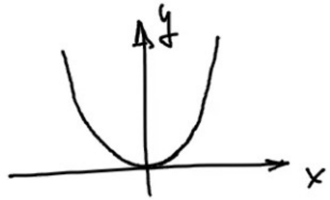
Строгое определение (пока) давать не будем.

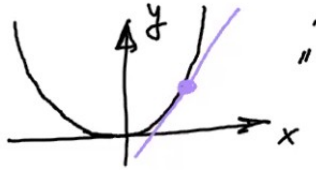
<u>Пример</u>

$y = x^2$

$y' = 2x$

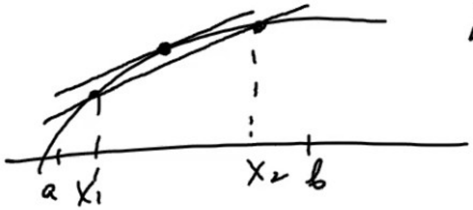
$y'' = 2 > 0$ $\forall x$





парабола $y = x^2$ всегда лежит "выше касательной"

<u>Отметим свойство</u>: 1) <u>Выпуклая вверх</u> на $(a;b)$ функция лежит ниже касательной но выше секущей $(\forall\, x_1, x_2 \in (a;b))$



2) Для выпуклой вниз написать самим

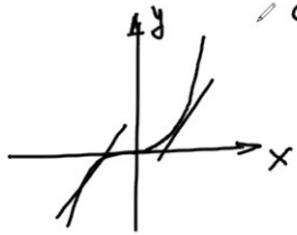
Теорема (следует из формулы Тейлора)

Если $\forall x \in (a;b)$ $f''(x) > 0$ то $f(x)$ – выпуклая вниз на $(a;b)$

$f''(x) < 0$ то $f(x)$ – выпуклая вверх на $(a;b)$

Определение Точка x_0 называется точкой перегиба (графика) функции $f(x)$, если при переходе через точку x_0 направление выпуклости меняется.

Пример $y = x^3$ точка перегиба $x_0 = 0$



__Теорема__

Необходимое условие перегиба

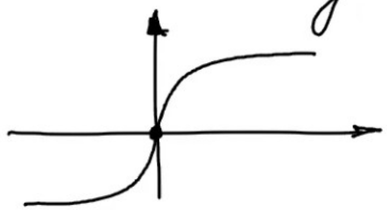
Если т. x_0 – точка перегиба, то $f''(x_0)=0$ или <u>не</u> <u>существует</u>.

__Док-во__ Если $f''(x_0)>0$ или <0, то x_0 – не может быть точкой перегиба.

$\Rightarrow$ __Следствие__ (достаточное условие "точки перегиба")

Если при переходе через т. x_0 $f''(x)$ меняет свой знак, то ~~в~~ т. x_0 – точка перегиба

__Пример__ $y(x)=\sqrt[3]{x}$



$\Rightarrow$ В след. раз разберем примеры на исследование ф-ции и построение эскиза ее графика $\triangleleft$