Лекция 13 (01.12.2021)

Было в прошлый раз:

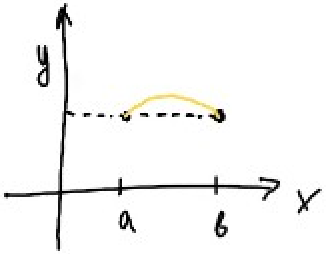
Теорема Ферма

Если в точке x_0 функция f имеет локальный экстремум и f дифференцируема в т x_0, то $f'(x_0)=0$.

Теорема Ролля

Пусть $f(x)$ – непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f(a)=f(b)$.

Тогда найдется такая точка $c\in(a;b)$, что $f'(c)=0$.



Доказательство

В силу теоремы о свойствах функции непрерывной на отрезке, найдутся точки x_1 и $x_2 \in [a;b]$ такие, что $f(x_1)=\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)=m$ $\quad f(x_2)=\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)=M$

$\forall x\in[a;b]$ $\quad m\le f(x)\le M$.

1 случай $m=M \Rightarrow$ на $[a;b]$ $f(x)=\text{const} \Rightarrow f'(x)=0$ $\forall x\in(a;b)$

2 случай $m<M$

$\Rightarrow$ хотя бы одна из точек x_1 и x_2 – не конец отрезка! $\rightarrow$ пусть это x_1, тогда в т x_1 – лок. мин. и по теореме Ферма $f'(x_1)=0$.

Замечание 1) Условие для краткости пишут иногда так:

$$f \in C[a;b] \wedge D(a;b)$$

2) Без условия $f(a)=f(b)$ теорема неверна;

Пример $f(x)=x$ на $[2;3]$

$$f'(x)\equiv 1 \neq 0 \quad f(2)\neq f(3).$$

Теорема Коши Пусть $f(x)$ и $g(x) \in C[a;b] \wedge D(a;b)$ и $g'(x)\neq 0$.

Тогда найдется такая точка $c \in (a;b)$, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Док-во

Пусть $F(x) = f(x)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$

$$F(a) = \overbrace{f(a)-f(a)}^{0} - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\underbrace{(g(a)-g(a))}_{0} = 0$$

$$F(b) = f(b)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{g(b)-g(a)}}(\cancel{g(b)-g(a)}) = \cancel{f(b)}-f(a) - (\cancel{f(b)}-f(a)) = 0$$

Замечание

Отдельно не требуем, чтобы $g(b)-g(a)\neq 0$

Потому что иначе, если $g(b)-g(a)=0$ по теореме Ролля нашлась бы такая точка x_0, что $g'(x_0)=0$; $x_0\in(a;b)$

Но по условию $g'(x)\neq 0$

$1+tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}$

$\frac{1}{\cos^2 x}-1=tg^2 x$

$\Rightarrow F(a)=F(b)=0$ по теореме Ролля $\exists c\in(a;b)$ т.что $F'(c)=0$

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)\Rightarrow f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0$$

$$\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)$$ т.к. $g'(x)\neq 0$ $\forall x\in(a;b)$ $$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Δ.

<u>1-ое правило Лопиталя</u> Пусть на $[a;b]$ $f(x)$ и $g(x)$ удовл. усл. т. Коши $x_0\in(a;b)$ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ – неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Если $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\ (<\infty)$ то $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A$

<u>Пример</u>:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg x-x}{x^3}\overset{\cancel{X}}{=}\frac{1}{3}$$

$$\overset{\cancel{X}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{tg^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

__Док-во__

Пусть $x < x_0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \overset{\text{по т. Коши}}{=} \frac{f'(c)}{g'(c)} \to A$$

по условию $f(x_0)=g(x_0)=0$

$\exists\, c \in (x, x_0)$

Пусть $x \to x_0 \Rightarrow c \to x_0$

По условию $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0 \text{ (слева)}}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$ (левый предел)

Аналогично разбирается случай, когда $x > x_0$ и получаем, что $\lim\limits_{x\to x_0+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

__Теорема доказана__

__Пример__

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} \overset{Л}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{m} x^{\frac{1}{m}-1}}{\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}} = \frac{1/m}{1/n} = \frac{n}{m}$$

__Замечание__ Не нужно искать предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ при помощи правила Лопиталя поскольку факт $(\sin x)'=\cos x$ доказывали через 1 з.п., а его должны использовать.

__Замечание__ Всего существует 4 правила Лопиталя

1) $\frac{0}{0}$; $x\to x_0$
2) $\frac{\infty}{\infty}$; $x\to x_0$
3) $\frac{0}{0}$; $x\to\infty$
4) $\frac{\infty}{\infty}$; $x\to\infty$

Они немного отличаются формулировками (условиями)

__Замечание__ Правило Лопиталя можно использовать несколько раз подряд;

Нужно помнить, что $f''(x)=(f'(x))'$; $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$.

Отдельно обсудим свойства второго дифференциала; механический смысл 1-го дифференциала.

Теорема Лагранжа (следствие из теоремы Коши)

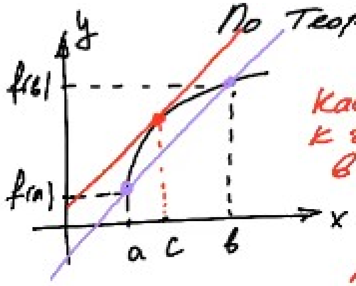
Пусть $f(x)\in C[a;b]\wedge D(a;b)$ **Тогда** $\exists c\in(a;b)$ т. что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

(Обобщение теоремы Ролля).

Док-во Возьмем в теореме Коши $g(x)=x$ $g'(x)\equiv 1$

По теореме Коши $\exists c\in(a;b)$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f'(c)}{1}\Rightarrow$

$\Rightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ теорема доказана.



Касательная к графику $y=f(x)$ в точке c параллельна секущей, проведенной через точки $(a;f(a))$ и $(b;f(b))$

Следствие ← (достаточное условие монотонности)

1) Если на интервале $(a;b)$ $f'(x)>0$ то $f(x)$ – (строго) монотонно возрастает на $(a;b)$ $(\geq 0$

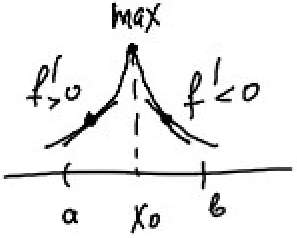
Док-во $a<x_1<x_2<b \Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$

$c\in(x_1;x_2)$ по усл. (≥ 0) >0

2) Если на $(a;b)$ $f'(c)<0$ то ....

Сонин!

<u>Следствие</u> (1-е достаточное условие лок. экстремума) (<u>теорема</u>)



① . пусть x_0 – критическая точка ф-ции $f(x)$

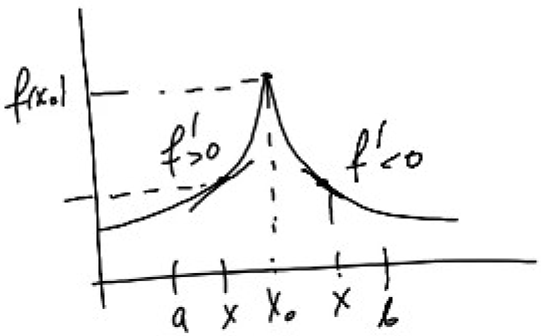
Если на некотором интервале $(a;x_0)$ $f'(x)>0$, а на некотором интервале (x_0,b) $f'(x)<0$

то в точке x_0 у функции $f(x)$ – (строгий) лок. максимум.

(Нестрогие нер-ва $\Rightarrow$ <u>не</u> строгий лок. максимум).

<u>Док-во</u> Непосредственно получаем из предыд. следствия:

$$x\in(a;x_0] \Rightarrow f(x_0)-f(x)>0 \qquad \text{т.е} \quad f(x_0)>f(x)$$
$$x\in(x_0,b) \Rightarrow f(x)-f(x_0)<0 \qquad \forall x\in(a;b)$$



$$x\in(a;x_0) \quad f(x_0)-f(x)=\underset{>0}{f'(c)}(\underset{>0}{x_0-x})>0 \Rightarrow f(x_0)>f(x)$$

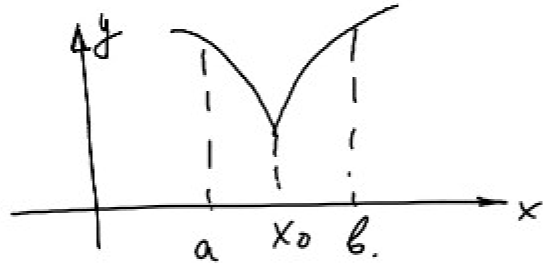
$$x\in(x_0;b) \Rightarrow \quad f(x)-f(x_0)=\underset{<0}{f'(c_1)}(\underset{>0}{x-x_0})<0 \Rightarrow f(x_0)>f(x)$$

<u>Доказан 1 случай.</u>

2) Если $\forall x \in (a; x_0)$ $f'(x) < 0$ $\Rightarrow$ в т x_0 — строгий лок. минимум.
$\forall x \in (x_0; b)$ $f'(x) > 0$

Док-во

Аналогично п. 1).



Наша цель — формула Тейлора;
из нее $\Rightarrow$ 2-е достаточное условие экстремума функции и п5) в схеме исследования функции и построения эскиза её графика.

"Выпуклость графика и точки перегиба"

$f''(x)$ — показывает "скорость роста" (убывания)

Определение 1) $f''(x) = (f'(x))'$

$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Пример $f(x) = \ln x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ $\quad x > 0$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \ \forall x \in R$

Замечание Аналогично $d^{(2)}f = d(df) = d(f'(x)dx) = df'(x)dx + f'(x)d(dx) =$

$df'(x) = f''(x)dx$ $\qquad = f''(x)\cdot(dx)^2 + f'(x)d(dx)_{(*)}$

1) Если x – независимая переменная, то $d(dx) = 0. \Rightarrow d^{(2)}f = f''(x)(dx)^2$

2) Если $x = x(t)$, то $d(dx)$ не обязан быть равным 0. тогда см $(*)$

Поэтому говорят, что второй дифференциал не обладает свойством инвариантности своей формы!

Как выглядит формула Тейлора:

(с остаточным членом в форме Пеано)

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots$$

$$\dots \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \underbrace{\alpha(x)\cdot(x-x_0)^k}_{o((x-x_0)^k)}$$