Лекция 12

Производная сложной функции.
Производная обратной функции
Дифференциал (первый)
Теорема Ферма.

Теорема

Пусть $y = f(x)$ – дифф-ма в т x_0; переводит некоторую окрестность точки x_0 в некоторую окрестность точки y_0 не тождественно; (Замечание не в одну точку)

Пусть $z = g(y)$ – дифференцируема в т y_0.

Тогда $g(f(x))$ – дифференцируема в точке x_0 (1)

$$g'_x(f(x_0)) = g'_y(y_0)\cdot f'_x(x_0)$$ ← формула производной сложной функции

Пример

$$(tg(\sqrt{x}))' = \frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})}\cdot(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2(\sqrt{x})}$$

Пример 1:

$$(\ln(\sin x))' = \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' \stackrel{(1)}{=} \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\, x$$

$$(\ln y)'_y = \frac{1}{y}$$

Пример 2:

$$(\sin(x^2))'_x = \cos(x^2)\cdot(x^2)' = \cos(x^2)\cdot 2x$$

Пример 3

$$(e^{\sin x})' = e^{\sin x}\cdot\cos x$$

$$(e^{f(x)})'_x = e^{f(x)}\cdot f'(x)$$

$$y = f(x) \quad (e^y)'_y = e^y$$

Док-во I ("простое")

$$(g(f(x)))'_x\Big|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =$$

$f(x)-f(x_0) = y-y_0 \xrightarrow[\text{при } x\to x_0]{} 0$ потому что $f(x)$ — дифф-ма в т. x_0 $\Rightarrow$ непрерывна в т. x_0

$$= \lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g'_y(y_0)\cdot f'_x(x_0)$$

Δ (доказано)

(Замечание $y-y_0\neq 0$ а иначе делить нельзя; этот "дефект" можно исправить).

Док-во II ("сложное")

$\Delta g = g'_y(y_0)\cdot\Delta y + \Delta y\cdot\alpha(y)$ $\quad \alpha(y)\to 0 \quad y\to y_0$

$\Delta y = f'_x(x_0)\Delta x + \Delta x\cdot\beta(x)$ $\quad \beta(x)\to 0 \quad x\to x_0$

подставим Δy из второй формулы в первую:

$$\Delta g = \underline{g'_y(y_0)\cdot f'_x(x_0)}\cdot\Delta x + \Delta x\cdot\gamma(x)$$

(Д.з. "выписать эту $\gamma(x)$")

$\gamma(x)\to 0$, $x\to x_0$

$\Rightarrow$ g — дифф-ма в т. x_0 и $g'_x(x_0)=g'_y(y_0)\cdot f'_x(x_0)$

Δ (доказано)

Обратные функции

$y = f(x)$

$x = g(y)$

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y$$

Пара взаимно-обратных функций.

$g(f(x)) = x$

$f(g(y)) = y$

Будем считать, что это биекции (взаимно-однозначное соответствие "на")

Теорема 2

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в т. x_0 и $f'_x(x_0) \neq 0$

Тогда $g(y)$ дифференцируема в т. y_0 и

$$g'_y(y_0) = \frac{1}{f'_x(x_0)}$$

Примеры

$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

1. $\ln(e^x) = x$

   $e^{\ln y} = y$

2. $y = \operatorname{tg} x \quad x = \operatorname{arctg} y$

   $(\underbrace{x \in (-\pi/2; \pi/2)}_{X}; \; \underbrace{y \in (-\infty; +\infty)}_{Y})$

Сначала пример

① $y = e^x$ $\quad x = \ln y \quad (\ln y)'_y = \frac{1}{f'_x} = \frac{1}{(e^x)'_x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} \Rightarrow (\ln y)' = \frac{1}{y}$

(уже раньше мы это получили "в лоб")

② $y = \operatorname{tg} x \quad (\operatorname{arctg} y)'_y = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'_x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$

$x = \underbrace{\operatorname{arctg} y}_{g(y)}$

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad g(y) \Rightarrow (g(y))'_y = \frac{1}{f'_x} \qquad \Rightarrow (\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2}$

Δ.

Док-во теоремы $\qquad x = g(y) = g(f(x))$ используем Теорему 1

$x'_x = 1 = g'_y \cdot f'_x \Rightarrow g'_y = \frac{1}{f'_x}$ доказали.

3 пример

$y = \sin x$
$x = \arcsin(y)$

$$(\arcsin y)'_y = \frac{1}{(\sin x)'_x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

доказано

$$(\arcsin t)'_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Заполнили таблицу производных; !!!

$$(\ln|x+\sqrt{x^2+k}|)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}(x+\sqrt{x^2+k})' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\left(1+\frac{1\,(x^2+k)'}{2\sqrt{x^2+k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\cdot\left(1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+k}}\right) = \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+k}}}\left(\frac{\cancel{\sqrt{x^2+k}+x}}{\sqrt{x^2+k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C \leftarrow$$ неопределенный интеграл.

dx – дифференциал независимой переменной

(?) нужно определить, что такое дифференциал!

Определение

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в т. x_0, то есть:

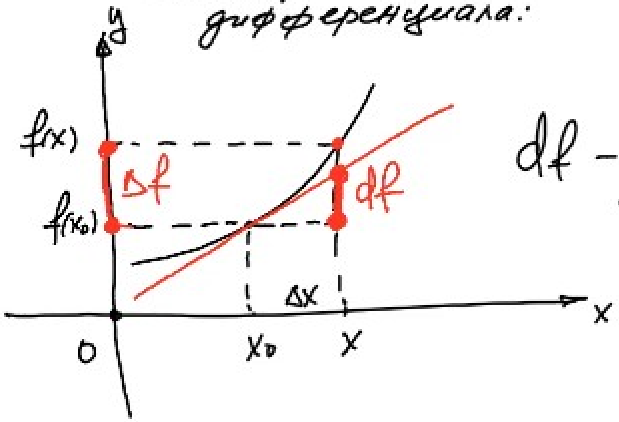
$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = \boxed{f'(x_0)\cdot\underbrace{(x - x_0)}_{\Delta x}} + o((x - x_0))$$

оставить   отбросить

Дифференциалом функции $f(x)$ (в точке x_0) называется главная линейная часть приращения Δf:

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)\cdot\underbrace{\Delta x}_{(x - x_0)}} \quad (*)$$

Геометрический смысл дифференциала:



df — это приращение ординаты касательной.

Смысл определения дифференцируемости

$$\Delta f = df + o(\Delta x)$$

Замечание

$$f(x) = x$$

$$f'(x) \equiv 1$$

$$dx = 1\cdot\Delta x$$

Для независимой переменной x

$$dx = \Delta x$$

Формулу $(*)$ можно переписать:

$$\boxed{df = f'(x)dx}$$

Из свойств производных следуют свойства дифференциалов: (0) $dc = 0$

1). $d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg$.

2). $d(fg) = (fg)' \cdot dx = g\underbrace{f'(x)dx}_{df} + \underbrace{fg'(x)dx}_{dg} = gdf + fdg$ (!!!)

правило Лейбница.

3) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\frac{f}{g}\right)' dx = \frac{gf'(x)dx - fg'(x)dx}{g^2} = \frac{gdf - fdg}{g^2}$

4) $g(f(x)) \Rightarrow g'_x = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = g'_y \cdot f'_x$ (было).

(док-во I)

Из (4) $\Rightarrow$ Свойство инвариантности формы 1-го дифференциала

$dg = g'_y dy = g'_y \cdot f'_x dx = g'_x dx$ (форма не меняется)

Локальный экстремум.
Теорема Ферма

Определение

① Точка x_0 называется точкой локального максимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0

$\forall x: \ f(x) \leq f(x_0) \quad (\Delta f \leq 0 \quad x \in U(x_0))$

(строгого лок. макс. $f(x) < f(x_0)$) $(\Delta f < 0)$

② Точка x_0 назыв-ся точкой локального минимума ф-ции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x

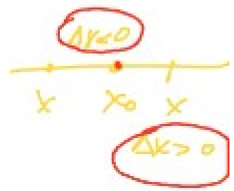
Теорема Ферма

Пусть в т x_0 у функции $f(x)$ имеется локальный экстремум.
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в т x_0.

Тогда $f'(x_0) = 0$.

Док-во

Для определенности пусть в т x_0 – лок. минимум.
то есть $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in U(x_0)$ т.е. $\Delta f \geq 0$.



Допустим, что $f'(x_0) > 0$.

Запишем определение дифференцируемости:

$$\Delta f = f'(x_0)\cdot\Delta x + \Delta x\cdot\alpha(x)$$

$\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$ ($\Delta x \to 0$)
При малых Δx второе слагаемое не влияет на знак

$\Delta f \sim f'(x_0)\Delta x$

Пусть $x > x_0$ $\Delta x > 0$ $f'(x_0) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta f > 0$

Пусть $x < x_0$; $x \in U(x_0) \Rightarrow \Delta x < 0$; $f'(x_0) > 0 \Rightarrow \Delta f < 0$ Но этого не может быть!

Вывод $f'(x_0) > 0$ – не может быть!

Аналогично разбирается предположение $f'(x_0) < 0$ тоже не може

Вывод $f'(x_0)=0$. (в точке экстремума).

Замечание В обратную сторону теорема **не** верна.

Пример $y = x^3$ $y'(x) = 3x^2 = 0$ в т $x_0 = 0$

Но экстремума там нет. !

Таким образом, теорема Ферма — это необходимое, но **не** достаточное условие экстремума.

Следующая цель — получить **достаточное условие** экстремума.

Еще один момент В точке экстремума тем самым производная **или** **равна нулю** **или** не существует

$y = |x|$ — (глобальный) минимум в т $x_0 = 0$, но производная в этой точке не существует.