Лекция № 10

10.11.2021

Непрерывные функции.

Свойства непрерывных функций.

Были: предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$

предел функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$

и их свойства.

Возможно будет объявлена консультация в субботу в 16^{00} по ранее присланной ссылке

На которой еще раз обсудим доказательства и порешаем задачи.

$\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$ и $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$

Вот эта ситуация описывается следующим определением:

Определение Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Замечание: Считаем, что в изолированных точках области определения функция также непрерывна.

Следствие из определения:

1 Сумма двух функций – $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывных в точке x_0 снова будет непрерывной в точке x_0.

Док-во Следует из свойств предела.

Аналогично (2) Если $f, g \in C(x_0)$ (непрерывны в точке x_0) то $f \cdot g \in C(x_0)$

(3) Если ~~$g(x) \neq 0$~~ $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)} \in C(x_0)$

Есть особая теорема (б/д) — о непрерывности композиции двух функций: **Теорема 2**

Пусть $f: X \to Y \quad g: Y \to Z$

$f \in C(x_0); \quad y_0 = f(x_0); \quad g \in C(y_0)$

(и некоторая окрестность точки x_0 переходит в некоторую окрестность точки y_0 при отображении f; т.е. f — "не константа")

Тогда $g(f(x_0))$ — непрерывна в т. x_0.

Из этих теорем 1 и 2 следует, что все т.н. элементарные функции непрерывны на своих "областях определения"

(то есть для вычисления предела в точке x_0 нужно взять значение ф-ции в точке x_0)

Пояснение Элементарными функциями называются:

1) степенная x^n; $\sqrt[n]{x}$ x^{-n}; $(n \in \mathbb{Z})$

$x^{m/n}$ и т.д. $(x^\alpha; \alpha \in \mathbb{R})$ $(x > 0)$

2) показательная a^x (она вообще-то строится "по непрерывности")

(и логарифмическая)

3) тригонометрические $\sin x, \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x$ по Теореме 1

(и обратные к ним $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$)

4) и все те функции, которые получаются из (1), (2), (3) конечным числом операций сложения, умножения, деления и композиции.

Замечание Говорят, что "f непрерывна на множестве M", если она непрерывна в каждой точке $x \in M$.

Пишут $f \in C(M)$ Замечание: $|x| = \sqrt{x^2}$ — элементарная функция!

Замечание: Можно доказать отдельную теорему о непрерывности обратной функции.

Теорема: Если $y = f(x): X \to Y$ строго монотонно возрастающая и непрерывная функция

то $\exists\, g: Y \to X$ – обратная функция

$g(f(x)) = x$ – тоже строго монот. возрастающая и непрерывная функция.

То есть $y = a^x$ – непрерывная (по построению) $(a > 1)$ строго монот. возр.

$\Rightarrow x = \log_a y$ – непрерывная (строго монот. возр.)

Замечание: (можно "убывающая")

Важный момент Свойства функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$

(Это свойства не только этих ф-ций, но и самого отрезка!)

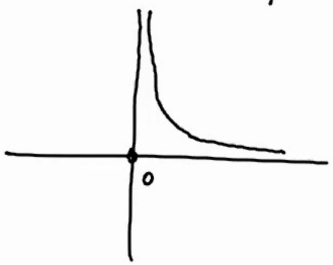
(1) Если $f(x) \in C[a;b]$ то она ограничена на нем.

т.е. $\exists M > 0$ т.что $\forall x \in [a;b]\ |f(x)| \leq M$

Замечание: Если вместо отрезка взять интервал, такого свойства не будет.

Пример: 1

$f(x) = \frac{1}{x}$ $(0;1)$ $f(x)$ – непрерывна в каждой точке $x_0 \in (0;1)$



Но на этом интервале функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не ограничена.

! 2 Если $f(x) \in C[a;b]$ то она принимает на этом отрезке свои наибольшее (max) и наименьшее (min) значения

т.е. $\exists\ x_1 \in [a;b]$ т.что $f(x_1) = \max\limits_{x \in [a;b]} f(x) = M$

$x_2 \in [a;b]$ $f(x_2) = \min\limits_{x \in [a;b]} f(x) = m$

Замечание: Если вместо отрезка $[a;b]$ взять интервал $(a;b)$, то такая теорема будет, вообще говоря, неверна. Пример 1 подходит. "Наим." значение (inf) $f(x)$ на $(0,1)$ это 1, но оно не принимается на $(0;1)$ $(x \neq 1)$

А sup f вообще нет.

Пример 2 $\quad f(x) = x$ на $(2;3) = M$

~~min f(x)~~ $\inf\limits_{M} f(x) = 2$ но не принимается

$\sup\limits_{M} f(x) = 3$ но тоже не принимается.

! 3 Если $f(x)$ – непрерывна на отрезке $[a;b]$, то $f(x)$ – принимает все промежуточные значения между m и M (см. формулировку п. 2)

т.е. $\forall\, C \in [m; M] \ \exists\, x \in [a;b]$ т. что $f(x) = C$

Пример Если вместо отрезка взять "множество из двух кусков" $\mathbb{B} = [2;3] \cup [4;5]$

$f(x) = x \Rightarrow \quad M = 5 = \max\limits_{\mathbb{B}} f(x) \quad m = 2 = \min\limits_{\mathbb{B}} f(x)$ но $\nexists\, x \in \mathbb{B}$

чтобы $f(x) = 3{,}5$

Замечание Отрезок – "связное множество". (т.е. "одним куском")

Эти три свойства функций, непрерывных на отрезке (вместе с замечаниями и контрпримерами) нужно выучить и помнить до экзамена включительно.

Вторая тема про непрерывность – точки разрыва и их классификация.

Определение x_0 – точка разрыва функции $f(x)$, если не выполняется условие непрерывности, т.е. неверно, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(или предел не существует, или существует, но не равен $f(x_0)$ и т.д.)

Односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ $x < x_0$

Односторонние пределы:

Левый предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$: $x < x_0$; $0<|x-x_0|<\delta$; $x\in(x_0-\delta; x_0)$; $f(x)\dots$

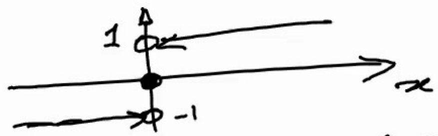
Правый предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$: $x > x_0$; $x\in(x_0; x_0+\delta)$

Теорема

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A\right) \text{ и } \left(\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A\right)$$

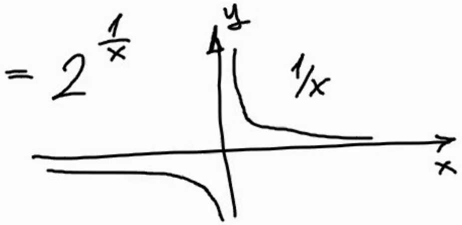
Примеры:

1) $y(x) = \text{sign}\,x = \begin{cases} 1; & x>0 \\ 0; & x=0 \\ -1; & x<0 \end{cases}$

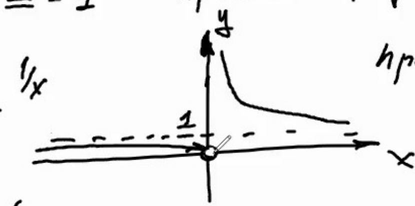


л. предел $= -1$ правый предел $= +1$

2) $y(x) = 2^{\frac{1}{x}}$



$\Rightarrow$ $2^{1/x}$



правый предел "$= +\infty$"

л. предел $=0$

Определение Говорят, что у функции $f(x)$ в точке x_0 имеется разрыв 1-го рода, если существуют оба конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ (но определение непрерывности не выполнено).

Пример $y = \operatorname{sign} x$ – в т $x_0 = 0$ разрыв 1-го рода

Определение Все остальные точки разрыва – 2-го рода.

$y = 2^{1/x}$ в т $x_0 = 0$ разрыв 2-го рода.

(левый предел $= 0$, правый – бесконечный).

Пример $y = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right); & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв 2-го рода (хотя она сама ограничена)

потому что $\nexists \lim\limits_{x \to 0+0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\nexists \lim\limits_{x \to 0-0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Д. з. С помощью, например, W. A. построить график.