Элементы дифференциального исчисления.

Определение $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$

$h = x - x_0 = \Delta X \ldots$

приращение функции.

$\Delta X = x - x_0$ — приращение аргумента.

Замечание Если $f(x)$ непрерывна в т. X_0, то

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{\Delta X \to 0} \Delta f = 0$ или

$\lim\limits_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$ Δ.

Определение 1 Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (конечный предел)

Обозначение $f'(x_0)$

То же самое можно записать:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta X} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Примеры

1 $\left.(x^2)'\right|_{x=x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{(x+x_0)\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}} = 2x_0$

т.е. $(x^2)'=2x$

Можно доказать, что $n\in\mathbb{N}$ $(x^n)'=nx^{n-1}$

Эта формула верна $\forall\alpha$: $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

$\alpha=\frac{1}{2}$ $f(x)=\sqrt{x}$: $\left.(\sqrt{x})'\right|_{x=x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}}{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})}(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$

$(x^{1/2})' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$ △.

2 Из первого замечательного предела $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ следует, что $\left.(\sin x)'\right|_{x=x_0}=\cos x_0$

и $\left.(\cos x)'\right|_{x=x_0}=-\sin x_0$ Было на лекциях;

3 Из второго замечательного предела в форме $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$.

следует, что $(e^x)'=e^x$

$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

$$(e^x)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\cdot \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^{x_0}.$$

(В каждой фиксированной точке x_0 производная — это число; $x_0 \to f'(x_0)$ — это производная (функция))

Замечание $(5^x)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{5^{x_0+h}-5^{x_0}}{h} = 5^{x_0}\cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{5^h-1}{h}}_{\ln 5} = 5^{x_0}\cdot \ln 5$!!!

Вообще: $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

(4) Из второго замечательного предела в форме $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$ следует, что $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Докажем: $(\ln x)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x_0+h)-\ln(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}\cdot\frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0}$

$\alpha = \frac{h}{x_0}$

(Цель)

Теорема пусть $\exists f'(x_0), g'(x_0)$ тогда $\exists \left.(f(x)+g(x))'\right|_{x=x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$

Правила дифференцирования "арифметических выражений".

(правило Лейбница) $\rightarrow$ $\left.(fg(x))'\right|_{x=x_0} = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$

$$\left.\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'\right|_{x=x_0} = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Определение 2 Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\cdot\Delta x + \Delta x\cdot\alpha(x)$$

α – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$.

$f(x_0+h) - f(x_0) = A\cdot h + o(h)$ $\quad o(h) = h\cdot\alpha(h)$

Теорема Для функции одной переменной x определения 1 и 2 эквивалентны; $A = f'(x_0)$

Док-во $1 \Rightarrow 2$ Пусть $\exists f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ тогда по Лемме $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A+\alpha(x)$

$\alpha(x)$ – б.м.ф.

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\alpha\,; \quad \underset{\substack{x\to x_0\\(h\to 0)}}{\alpha(x)\ -\text{б.м.ф.}} \qquad f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot h+ +\alpha(x)\cdot h$$

что и требовалось.

<u>В обратную</u> <u>сторону</u> $2) \Rightarrow 1)$

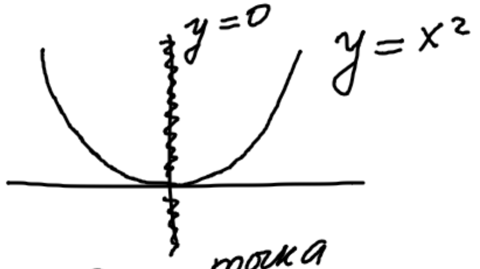
$$f(x_0+h)-f(x_0)=A\cdot h+\alpha(x)\cdot h \Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A+\alpha(x) \Rightarrow$$

$$\exists \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A=:f'(x_0) \quad \Delta.$$

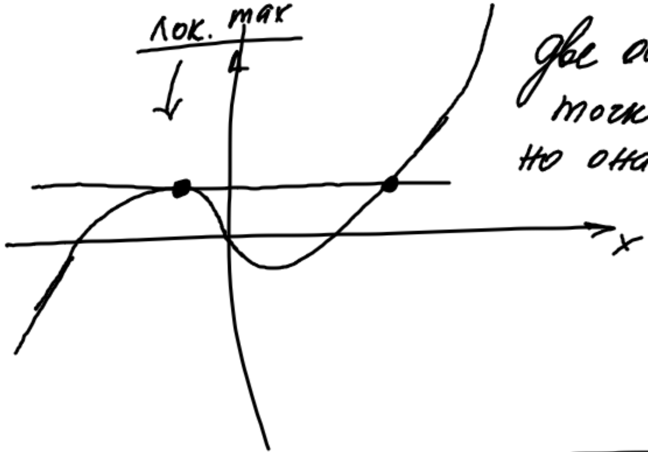
<u>Замечание</u>! Для функций 2-х и большего числа переменных такая теорема <u>не верна</u>!

<u>Геометрический</u> <u>смысл</u> <u>производной</u>: $f'(x_0)$ — это тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Замечание: что такое "касательная"?

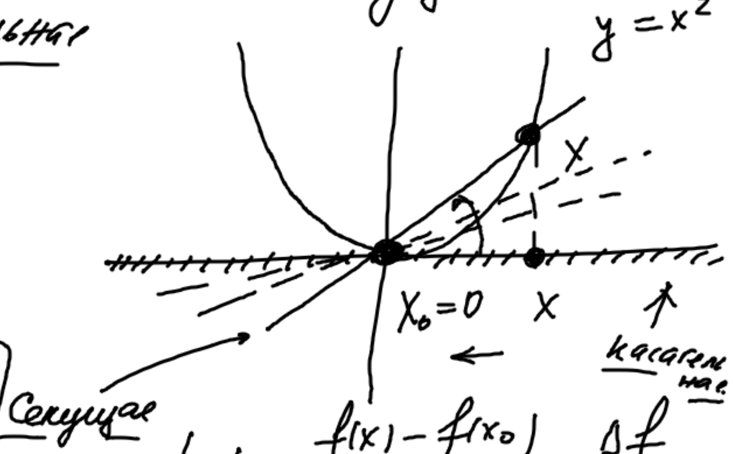


общая точка единственная, но она **не** касательная



две общие точки; но она касательная

Принято говорить что касательная — это предельное положение секущей.



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

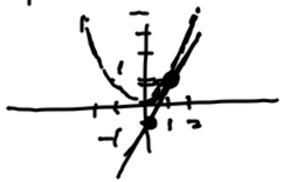
при $\Delta x \to 0$ $(x \to x_0)$

$\alpha \to \alpha_0$ — угол наклона касательной.

Уравнение касательной прямой: (в т x_0)

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$f(x) = x^2 \quad x_0 = 1. \quad 1^2 + 2\cdot 1(x-1) = 2x - 1 = y$



Геометрический смысл "дифференцируемости" — графики функции $f(x)$ и касат. прямой "сближаются" при $x \to x_0$

$$\underline{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$ при "малых" $\Delta x = x - x_0$ $(\Delta x \to 0)$

!!!

вместо "сложной" функции $f(x)$ приближенно взять линейную функцию $y = kx + b$.

Теорема Если функция $f(x)$ дифференцируема в т x_0, то она непрерывна в этой точке.

Док-во

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + h\cdot\alpha(h) \quad \begin{pmatrix}\alpha \to 0\\ h \to 0\end{pmatrix} \Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \Rightarrow \underline{f \in C(x_0)}.$$

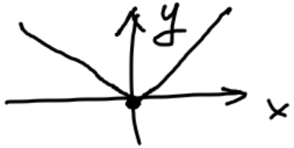
запишем определение дифференцируемости в т. x_0 функции

$\Longrightarrow$ получим непрерывность функции в точке.

Т. доказана

Замечание: Обратное неверно $f(x) = |x|$ — непрерывна всюду, в т.ч. в точке $x_0 = 0$, но не дифференцируема в т $x_0 = 0$.

Касательной нет в т $x_0 = 0$



Докажем теорему об арифметических операциях и дифференцировании.

возьмем п.2) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'_{x_0} = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$ все остальное аналогично.

!

По опр

$$\left(f(x)g(x)\right)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\left[\underline{\underline{f(x)}}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} + g(x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] = f(x_0)\cdot g'(x_0) + g(x_0)\cdot f'(x_0)$$

ч.т.д

по условию $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

по доказанной теореме о непрерывности дифференцируемой функции

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

п1) и п3) – самостоятельно.

Следующая наша цель $(g(f(x)))' = g'_f \cdot f'_x$ нужно будет доказать.

докажем в следующий раз. Тем самым заполним "таблицу производных"