Семинар 27.11.2021:

1 часть Производные:

1 Теорема

$$(g(f(x)))'_x = g'_f \cdot f'_x$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$$

Примеры: 1) $f(x) = \ln(\sin x)$ $f'(x) =$

по теореме о производной сложной функции

$$(\ln(g(x)))' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

Аналогично $(\ln(\cos x))' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$

2)

3) $$\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \left(\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

Замечание

(забегая вперед) $$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$$

4) $$\left(e^{\sqrt{x}}\right)' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ потому что $\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$;

$$\left(e^{\sin x}\right)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

⑤ $$\left(\sin(e^x)\right)' = \sin(e^x)\cdot(e^x)' = \sin(e^x)\cdot e^x$$

потому что $\left(\sin(f(x))\right)'_x = \sin(f(x))\cdot f'(x)$

Итог: таблица производных:

f	f'
1) x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
2) $\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg}\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{ctg}\,x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
3) e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$1/x$
4) $\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\rightarrow \left(\sqrt[5]{x}\right)' = \frac{1}{5}x^{1/5-1} = \frac{1}{5}x^{-4/5} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[5]{x}\right)^4}$$

$$(\mathrm{ctg}\,x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x(\cos x)' - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

$$\Rightarrow \left(a^{\sin x}\right)' = a^{\sin x}\cdot \ln a \cdot \cos x$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a}}$$

доказано на лекции;

$$(\mathrm{arctg}\,x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Добавление к таблице:

$f(x)$	$f'(x)$
$\ln(x+\sqrt{x^2+k})$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$
(*) $\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$	$\frac{1}{x^2-a^2}$
$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$	$\frac{1}{x^2+a^2}$
$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Это будет нужно во 2-м семестре.

Проверим (*):

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\right)' = \frac{1}{2a}\left(\ln(x-a)-\ln(x+a)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\left.\frac{1}{x-a}\right|^{x+a} - \left.\frac{1}{x+a}\right|^{x-a}\right) = \frac{1}{2a}\left(\frac{x+a-(x-a)}{x^2-a^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2a}\cdot\frac{2a}{x^2-a^2} = \frac{1}{x^2-a^2}$$ верно.

Пример

$$f(x) = \ln\sqrt{\left\lvert\frac{\sin x-3}{\sin x+3}\right\rvert} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u-3}{u+3}\right) =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\ln\left(\frac{u-3}{u+3}\right)$$

$$f'(x) = 3\cdot\frac{1}{u^2-(3)^2}\cdot u'(x) = \frac{3\cos x}{\sin^2 x-9}$$

сразу готовое решение.

Задача 855 (задачник Б.П. Демидовича)

Замечание $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

$$(f\cdot g\cdot h)' = f'\cdot(g\cdot h) + f\cdot(g\cdot h)' =$$

$$= \underbrace{f'\cdot g\cdot h}_{} + \underbrace{f\cdot g'\cdot h}_{} + \underbrace{f\cdot g\cdot h'}_{} \quad \text{и т.д.}$$

$$F(x) = (1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}$$

$$F'(x) = \underbrace{(1+x)'}_{1}\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3} + (1+x)\underbrace{\left(\sqrt{2+x^2}\right)'}_{=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{2+x^2}}}\cdot\left(\sqrt[3]{3+x^3}\right) + (1+x)\sqrt{2+x^2}\underbrace{\left(\sqrt[3]{3+x^3}\right)'}_{\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{3+x^3}\right)^2}\cdot\cancel{3}x^2} =$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ (*)

$$= 1\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3} + (1+x)\cdot\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\cdot\sqrt[3]{3+x^3} + (1+x)\sqrt{2+x^2}\cdot\frac{x^2}{\left(\sqrt[3]{3+x^3}\right)^2}$$

Упрощать не нужно.

Задача 875: $y(x) = \sin\left(\cos^2\left(\mathrm{tg}^3 x\right)\right)$ т.к. $\left(\cos^2 f(x)\right)' = 2\cos(f(x))\cdot\left(\cos(f(x))\right)'$

$$y'(x) = \cos\left(\cos^2\left(\mathrm{tg}^3x\right)\right)\cdot\left(\cos^2\left(\mathrm{tg}^3x\right)\right)' = \cos\left(\cos^2\left(\mathrm{tg}^3x\right)\right)\cdot 2\cos\left(\mathrm{tg}^3x\right)\cdot\left(\cos\left(\mathrm{tg}^3x\right)\right)' =$$

(!) (*)

$$= \cos\left(\cos^2\left(\mathrm{tg}^3x\right)\right)\cdot 2\cos\left(\mathrm{tg}^3x\right)\cdot\left(-\sin\left(\mathrm{tg}^3x\right)\right)\cdot\left(\mathrm{tg}^3x\right)' = -\cos\left(\cos^2\left(\mathrm{tg}^3x\right)\right)\cdot \underbrace{2\cos\left(\mathrm{tg}^3x\right)\sin\left(\mathrm{tg}^3x\right)}_{}\cdot 3\,\mathrm{tg}^2x\,\cdot$$

$(\mathrm{tg}\,x)' =$

$$= -\cos(\cos^2(tg^3x))\cdot\sin(2tg^3x)\cdot 3tg^2x\cdot\frac{1}{\cos^2x} \quad \Delta$$

Упрощать не нужно.

2 часть Теорема Ферма (Необходимое условие экстремума)
Первое достаточное условие экстремума.

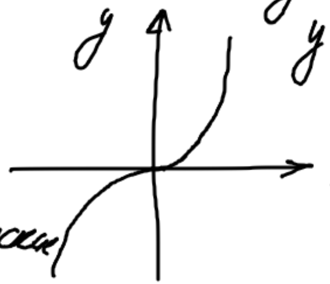
Теорема Если у функции $f(x)$ в т x_0 имеется локальный экстремум и функция $f(x)$ дифференцируема в т x_0, то $f'(x_0)=0$.

Критическая точка — это такая точка, в которой производная функции равна 0 или не существует.

Пример $y=x^3$

$y'(x)=3x^2=0$ в т. $x_0=0$

Но экстр. нет.



Не все критические точки — точки экстремума:

Но ни в каких других точках экстремума быть не может.

То есть экстремумы ищут так — находят критические точки и проверяют уже только их.
(с помощью, например, 1-го достаточного условия экстремума)

1-е достаточное условие экстремума (по знаку первой производной)

Теорема: Пусть x_0 – критическая точка функции $f(x_0)$ и "производная $f'(x)$ меняет свой знак при переходе через точку x_0"

(т.е. $f(x)$ – дифф-ма в некоторой проколотой окр-ти т x_0 и слева и справа от т x_0 у $f'(x)$ разные знаки)

Тогда в т x_0 – локальный экстремум.

Уточнение

Если $f'(x) < 0$ слева, $f'(x) > 0$ справа от т x_0, то это **минимум** (лок)

Если $f'(x) > 0$ слева, $f'(x) < 0$ справа от т x_0, то это **максимум** (лок).

Замечание С помощью этой теоремы можно установить, что у ф-ции $y = |x|$ в т $x_0 = 0$ экстремум. Действительно, в этой точке производная **не** существует

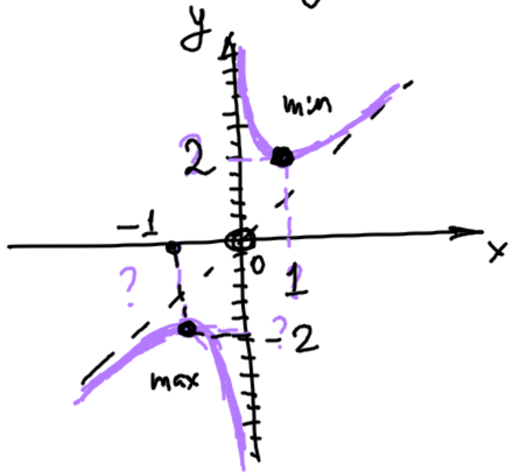
Но слева $y'(x) = -1$

справа $y'(x) = +1$

и поэтому в т $x_0 = 0$ $|x|$ имеет экстремум – минимум.

(Схема построения эскиза графика)

Пример $y = x + \frac{1}{x}$



(1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(2) нечетная функция $f(-x) = -f(x)$

$y(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -y(x)$

график нечетной функции симметричен относительно начала координат — точки $(0;0)$.

(функция непериодическая)

(3) Асимптоты: $x_0 = 0$ — вертикальная асимптота

т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $\qquad \frac{1}{x} \to \infty$, $x \to 0$

горизонтальной асимптоты нет $\qquad y(x) = \frac{x^2+1}{x} \to \infty$, $x \to \infty$

($y = y_0$ если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = y_0$)

Наклонная асимптота есть $\quad y = kx + b$

если $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) = 0$. $\qquad y = x$

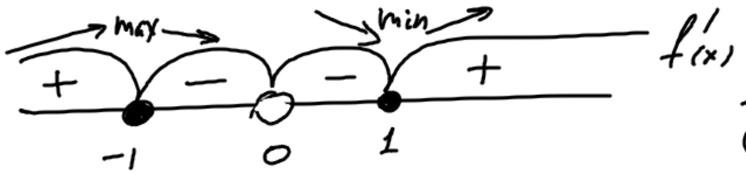
$\left(x + \frac{1}{x}\right) - x = \frac{1}{x} \to 0$, $x \to \infty$

(4) по первой производной:

а) промежутки монотонности $f' \gtrless 0$

! max < min лок

б) точки экстремума



$y'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ $\qquad x = -1; \cancel{0}; 1$

f' меняет знак при переходе чер (1)

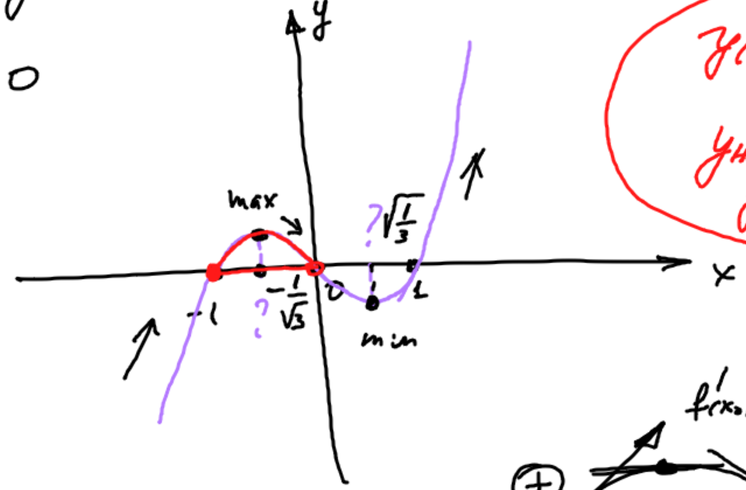
Пример

$$y = x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$$

$$y'(x) = 3x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$



$y(x) = x^3 - x$ на $[1;2]$

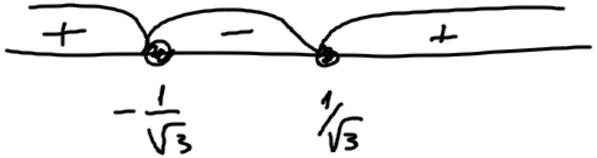
$y_{наиб.} = 8 - 2 = 6$

$y_{наим} = 0$

1) $D_f = \mathbb{R} \Rightarrow$ вертикальных асимптот нет. (в каждой конечной точке — конечный предел; функция всюду непрерывна)

2) Функция нечётная, не периодическая.

$$y' = 3\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



$y = x^3 - x$ на $[-1; 0]$

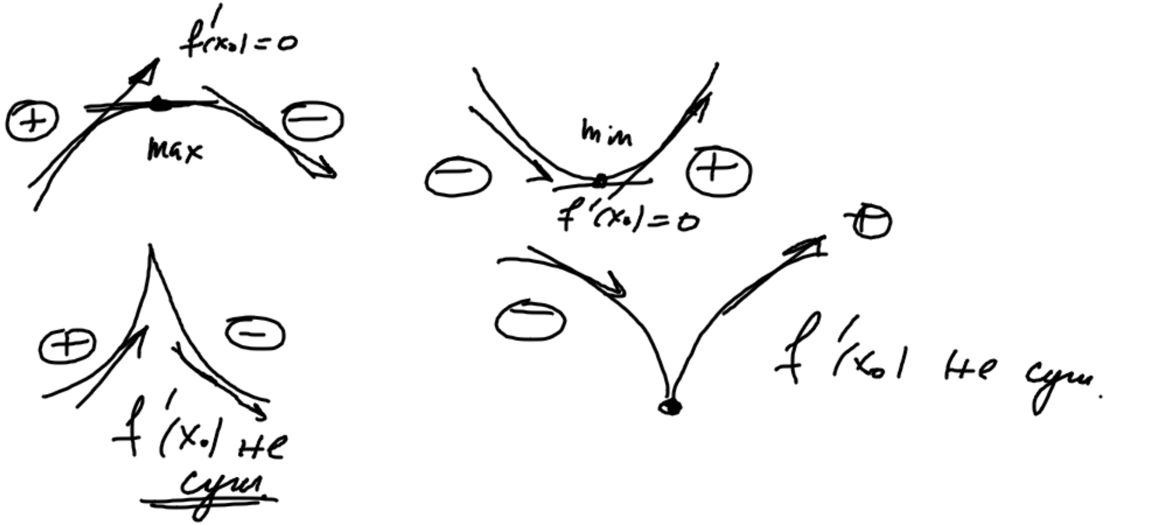
$y_{наиб.}$ — в т. $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$y_{наим} = 0$

На $[0;1]$

$y_{наиб} = 0$

$y_{наим} = y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

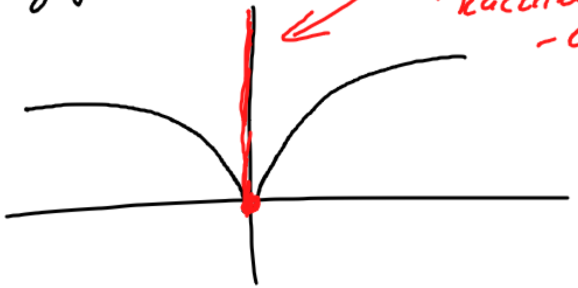


Тот случай, когда $f'(x_0)$ не сущ.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$\text{"} f'(x_0) = \infty \text{"}$$

<u>но</u> так <u>не</u> пишут (вообще говоря)



$y'(0)$ <u>не существует</u>

<u>Смешная задача</u>

$\boxed{\text{Найти наибольшее / наименьшее значение функции } y = f(x) \text{ на отрезке } [a; b]}$

$y = x \quad [2;3]$

$y' = 1$

$y' \neq 0$

$\min y = 2$
$\max y = 3$ и достигается в концах отрезка.

Решение (алгоритм)

1. Найти $y'(x)$ и точки экстремума.
2. Сравнить значения функции $y(x)$ в концах отрезка – точках a и b и в тех точках экстремума, что попали на наш отрезок.

Выбрать наибольшее / наименьшее.

Д.З. решить несколько примеров. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 5$ $[-3; 3]$

и т.д. $[-2; 1]$

$[-6; 8]$

Наша следующая цель: Вторая производная

Т. Ролля, Коши, Правило Лопиталя $\Rightarrow$ Формула Тейлора

Второе достаточное условие экстремума и п. 5 в схеме исследования функции и построения эскиза её графика.