Семинар № 11
(20 ноября 2021 г)

Производная функции; правила дифференцирования. (?) Теорема Ферма.

Определение $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

$\underbrace{\Delta f=f(x)-f(x_0)}_{\text{приращение функции}}$ $\underbrace{\Delta x=x-x_0}_{\text{приращение аргумента.}}$

Примеры 1) $(x^n)'=nx^{n-1}$ в частности $(x^2)'=2x$

Формула верна при любом показателе степени: $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

$(\sqrt{x})'=(x^{1/2})'=\frac{1}{2}x^{1/2-1}=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}$

$\alpha=1/2$

2) $(e^x)'=e^x$ и $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$ было на лекции.

3) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ – было на лекции;

$(\log_2 x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln 2}\right)'=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln 2}$

$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$

4) $(\sin x)'=\cos x$; $(\cos x)'=-\sin x$; $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ (на лекции)

Правила дифференцирования "арифметических выражений"

1) $(\alpha f)'=\alpha f'$ $(\alpha f(x)+\beta g(x))'=\alpha f'(x)+\beta g'(x)$

2) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

3) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x)$

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{gf'-fg'}{g^2}(x)$

Пример $f(x) = x^3 \cdot \sin x \Rightarrow f'(x) = (x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot (\sin x)' - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

(2-й способ найти эту производную)

и т.д.

Производная сложной функции:

Если $y = f(x)$ — дифф. в т x_0 $\quad y_0 = f(x_0)$ / и некоторая окр-ть т-ки x_0 переходит в некот. окр-ть т. y_0 при отобр. f.)

и $g(y)$ — дифф-ма в т y_0

то $g(f(x))$ — дифф-ма в т x_0 и

$$g'_x(f(x_0)) = g'_y(y_0) \cdot f'_x(x_0)$$

Точная формулировка будет на лекции.

Пример

$$(e^{x^2})' = (e^y)'_y \cdot y'_x =$$

пояснение

$y = x^2$

$$= e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x$$

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot (f(x))'$$

$$(\sin(\sqrt{x}))' = \cos(\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x})' = \cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

!!!

$$(\sin(f(x)))'_x = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$$

и т.д.

$(1)' = 0$
и от всякой постоянной C
$C' = 0$

! $\left(\sqrt{1+3x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1+3x^2}} \cdot (1+3x^2)' = \frac{6x}{2\sqrt{1+3x^2}} = \frac{3x}{\sqrt{1+3x^2}}$ и т.д.

То есть $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$

$\left(\ln(f(x))\right)' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$

правило

$\left(\ln(x+\sqrt{x^2+k})\right)' =$

Замечание: Эта функция называется "длинной логарифм"!

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+k}\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+k}} \cdot (x^2+k)'\right) =$

! $x' = 1$

$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+k}}\left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+k}}\right) = \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+k}}}\left(\frac{\cancel{\sqrt{x^2+k}+x}}{\sqrt{x^2+k}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$

Очень важный пример! (потом мы запишем $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2+k}) + C$)

"Высокий логарифм" $f(x) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{2a}\left(\ln(x-a) - \ln(x+a)\right)' =$

$\ln\left|\frac{m}{n}\right| = \ln m - \ln n$

$= \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{1}{2a}\left(\frac{\cancel{x}+a-\cancel{x}+a}{x^2-a^2}\right) = \frac{1}{x^2-a^2}$

$\left(\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\right)' = \frac{1}{x^2-a^2}$

потом запишем $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

Докажем, что $(\operatorname{arctg})' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)'_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x_0+h) - \operatorname{arctg}(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\cancel{x_0}+h-\cancel{x_0}}{1+x_0(x_0+h)}\right)}{h} =$$

$\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = c$

$$\operatorname{tg} c = \operatorname{tg}(\underbrace{\operatorname{arctg} a}_{\alpha} - \underbrace{\operatorname{arctg} b}_{\beta}) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b)} = \frac{a-b}{1+ab}$$

$$\Rightarrow c = \operatorname{arctg}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) + \varepsilon\pi \ (\varepsilon = 0 \text{ или } 1)$$

<u>уточнить!</u>

при $a \approx b$ $\varepsilon = 0$

$\operatorname{arctg} x \sim x$

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

<u>Замечание</u>

Этот же факт через теорему о производной обратной функции доказывается "проще"!

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{1+x_0(x_0+h)}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cancel{h}}{1+x_0(x_0+h)}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{1+x_0(x_0+h)} = \frac{1}{1+x_0^2} \ \triangle$$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$

Потом запишем (2-й семестр).

$\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{x^2+a^2}$ (проверить!) и $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

Вывод Учить таблицу производных! (Она же потом будет "таблицей первообразных" (интегралов)).

Теорема о производной обратной функции

Пусть

$y = f(x)$ $\qquad g(f(x)) = x$

$x = g(y)$ $\qquad f(g(y)) = y$

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} Y \qquad x \in X \qquad y \in Y$$

$f(x)$ дифференцируема в т. x_0 и $f'(x_0) \neq 0$ $\qquad y_0 = f(x_0)$

Тогда $\Rightarrow$ $g(y)$ — дифференцируема в т. y_0 и

$$g'_y(y_0) = \frac{1}{f'_x(x_0)}$$

$y = \sin x$

$x = \arcsin y$

Повторим еще раз!

$$(\arcsin y)'_y = \frac{1}{(\sin x)'_x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Пример:

$y = \operatorname{tg} x$

$x = \operatorname{arctg} y \Rightarrow$ по теореме $(\operatorname{arctg} y)'_y = \dfrac{1}{(\operatorname{tg} x)'_x} = \dfrac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \dfrac{1}{1+y^2}$ Δ

в школе была формула: $1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(т.к. $y = \operatorname{tg} x$)

$y = e^x$

$\Rightarrow x = \ln y \Rightarrow (\ln y)'_y = \dfrac{1}{(e^x)'_x} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$ Δ.

Пример

$$(\ln(\cos x))' = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x \quad !$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

Задачи из задачника:

задачник Мордкович; 2001; 937 1) $y = x\ln x \quad y' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$g(x) = x\ln x - x \Rightarrow g'(x) = (\ln x + 1) - 1 = \ln x \Rightarrow$ потом запишем $\int \ln x\,dx = x(\ln x - 1) + C$.

938

$y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2} \Rightarrow$ по формулам $y'(x) = \frac{1}{x} - 2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}\right)' =$

$= \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ Δ.

пояснение

$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$

940 $y(x) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) \Rightarrow$

$y'(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})' =$

$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{\cancel{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

944

$$y = \ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} = \quad \sim \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \sim \left(\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+t}{a-t}\right)\right)' = \frac{1}{a^2-t^2}$$

почти это уже было!

(формула почти такое выражение было)

$$y(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+2x) - \ln(1-2x)\right)$$

$\ln(t^k) = k\ln t$ было в школе.

$$\Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2}\left((\ln(1+2x))' - (\ln(1-2x))'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+2x}(1+2x)' - \frac{1}{1-2x}\cdot(1-2x)'\right) =$$

$$(-2x)' = -2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+2x} + \frac{2}{1-2x}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{1-2x} = \frac{2}{1-4x^2}$$

898 (Минорский) $y(x) = \sqrt[3]{1+\cos 6x} \Rightarrow \left(\sqrt[3]{f(x)}\right)' = \frac{1}{3}\cdot(f(x))^{-2/3}\cdot f'(x)$

$$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{1+\cos 6x}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\cos 6x)^2}}\cdot \quad \left(\left(\sqrt[3]{y}\right)'_y = \left(y^{1/3}\right)'_y = \frac{1}{3}y^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \right)$$

$$\cdot(\cos 6x)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+\cos 6x)^2}}\cdot -(\sin 6x)\cdot 6 = -\frac{2\sin 6x}{\sqrt[3]{(1+\cos 6x)^2}}$$ и т.д.

Д.З. задачник Минорского. 849–860