Семинар N 10 (13.11.2021)

(Окончание пределов.)

1) N34; стр. 88.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot tg\,x = \lim_{\alpha\to 0} \alpha\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\lim_{\alpha\to 0}\alpha\cdot ctg\,\alpha =$$

$$= -\lim \frac{\alpha}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha = -1$$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

$$\alpha = x-\frac{\pi}{2} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\to} 0$$

$$x = \alpha+\frac{\pi}{2}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -ctg\,\alpha$$

формула приведение.

2) 27; стр 88

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}} = \frac{4}{3}$$

найдем предел и снова

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}\right)\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)}{x^2\cdot\left(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to 1/2}+\underbrace{\frac{\cancel{x}\sin x}{\cancel{x}\cdot x}}_{\to 1}\right)\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}}_{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$\underline{3)}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(e^{x-1}-1)}{\cos(x-1)-1}=\lim_{y\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+y}-1)(e^{y}-1)}{\cos(y)-1}=\lim_{y\to 0}\underbrace{\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{y}}_{\frac{1}{3}}\cdot\overbrace{\left[\frac{e^{y}-1}{y}\right]}^{\to 1}\cdot\frac{y^2}{1-\cos y}\cdot(-1)$$

$y=x-1\to 0$

$x=y+1$

Решения собрали из "запасных частей" как конструктор

уже было

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}=1/2$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{y}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot -1=$$

Ответ: $=-2/3$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{\cancel{(t-1)}}{\cancel{(t-1)}(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t^2+t+1}=\frac{1}{3}$$

$t=\sqrt[3]{x}$

"Побочный выход"

!

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+y}-1}{y}=\frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{1+y}=1+\frac{y}{3}+\underbrace{o(y)}_{\alpha(y)\cdot y;\ \alpha(y)\to 0 \text{ при } y\to 0.}$$

<u>Лемма</u>

$$\lim_{y\to 0} f(y)=1/3 \Rightarrow f(y)=1/3+\alpha(y) \quad \alpha(y)\to 0$$

И вообще:

$$\sqrt[n]{1+y}=1+\frac{1}{n}\cdot y+o(y) \quad y\to 0$$

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{2}+o(y^2) \leftarrow \text{следует из того, что}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}=1/2$$

$$e^x=1+x+o(x) \quad x\to 0 \leftarrow \text{из} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

N35

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-3^x}{\ln(1+x)} = \lim \frac{e^x-3^x}{x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-3^x}{x}\cdot 1 = 1-\ln 3 = \ln\left(\frac{e}{3}\right)$$

(помним, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$)

$$\frac{e^x-3^x}{x} = \frac{e^x-1-(3^x-1)}{x} = \underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\to 1} - \underbrace{\frac{3^x-1}{x}}_{\to \ln 3}$$

! !

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\ ; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\ln 3$$

Напоминание. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$ то $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$ (при условии $B\neq 0$, $g(x)\neq 0$)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e \Rightarrow (1+\alpha)^{1/\alpha} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} e \Rightarrow \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 1$$

$$3^x=(e^{\ln 3})^x=e^{x\ln 3}$$

$$\Rightarrow z=\ln(1+\alpha) \qquad \frac{z}{e^z-1}\xrightarrow[z\to 0]{} 1 \Rightarrow \lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1 \ !$$

$1-\cos 2x = 2\sin^2 x$

$$\frac{\ln(1+y)}{y} \underset{y\to 0}{\to} 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x} = \lim \frac{e^{x\ln 3}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 3}-1}{\underbrace{x\ln 3}_{y}}\cdot \ln 3 = \ln 3\cdot \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} =$$

$$= \ln 3\cdot 1 = \ln 3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

32 $$\lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}+\frac{x}{\sin x}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{2\cancel{\sin^2 x}}{\cancel{\sin^2 x}}+\frac{x}{\sin x}\right] = 2+1 = 3.$$

---

42 $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\,(\sqrt[3]{1+3x^2}-1)}{x\cdot \ln(\cos 3x)} \overset{?}{=} 5\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2}\cdot \frac{x^2}{\ln(1+(\cos 3x-1))} =$$

$$y = \cos 3x - 1,\quad y\to 0,\quad x\to 1$$

$$= 5\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2}\cdot \frac{x^2}{\underbrace{\ln(1+(\cos 3x-1))}_{\ln(1+y)}}\cdot \frac{\overbrace{(\cos 3x-1)}^{y}}{\cos 3x-1} = 5\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2}\cdot \frac{x^2}{\cos 3x-1} =$$

I

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2} = \lim_{t\to 0}\underbrace{\frac{\sqrt[3]{1+t}-1}{t}}_{\text{уже был сегодня}}\cdot 3 = \frac{1}{3}\cdot 3 = 1.$$

$t = 3x^2$

$x^2 = \frac{1}{3}t$

Окончательный ответ: $= 5\cdot 1\cdot\left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{10}{9}$

II

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos 3x - 1} = \frac{1}{9}\underbrace{\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\cos z - 1}}_{\text{было уже}} = -\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -\frac{2}{9}$$

$z = 3x$ $\quad$ $x^2 = \frac{1}{9}z^2$

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\cos z - 1} = -2$$

Задачи 40 и 62 — тоже на "разные виды 2 з.п.":

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\lg b}{\lg a} \qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} \underset{\alpha\to0}{\to} 1$$

$$\boxed{\lg y = \frac{\ln y}{\ln 10}} \qquad \boxed{\log_3 z = \frac{\ln z}{\ln 3}}$$

42

$$\lim_{x\to0}\frac{\lg(1+\operatorname{tg}x)}{\log_3(1+\sin 3x)} = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}x)}{\ln 10}\cdot\frac{1}{\frac{\ln(1+\sin 3x)}{\ln 3}} = \frac{\ln 3}{\ln 10}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\cdot$$

$$\cdot\frac{\operatorname{tg}x}{\sin 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{\ln(1+\sin 3x)} \overset{?}{=} \lim_{x\to0}\frac{\ln 3}{\ln 10}\cdot\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)\left(\frac{3x}{\sin 3x}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\ln 3}{\ln 10} = \frac{\ln 3}{\ln 10^3} =$$

$$\frac{\alpha}{\ln(1+\alpha)} \to 1 \qquad = \frac{\ln 3}{\ln 1000} \qquad \to 1 \qquad \to 1$$

$$= \frac{1}{3}\lg 3 = \lg\sqrt[3]{3}$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = (1-\sin^2 x)^{1/2}$$

(62) $(1+y)^{\frac{1}{y}} \to e$ при $y \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}(1+x+\sin x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\overbrace{(1+x+\sin x)^{\frac{1}{x+\sin x}}}^{(1+y)^{\frac{1}{y}}}}_{\to e}\right)^{\frac{x+\sin x}{\operatorname{tg} x}} =$$

$(y = x+\sin x)$

$$= \boxed{e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{\operatorname{tg} x}}} = e^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{+\infty} = 0$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = 0$$

$\sim 1^{\infty}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\cdot\frac{\operatorname{tg} x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{\frac{\operatorname{tg} x}{x}} = \frac{1+1}{1} = 2$$

(61)

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\left((1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{-\sin^2 x}}}_{\to e}{}^{\cdot\frac{-\cos^2 x}{2}}$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$