Было на прошлой лекции $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e$ **Вопрос:** $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = ?$

$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 \overset{?}{=}$

Перестает хватать только натуральных чисел. $\Longleftarrow$ Тонкость $y=\frac{n}{2}$ — не всегда $\in N$

$y=\frac{n}{2}\to\infty$

$= \left(\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^2 = e^2$

$\alpha=\frac{1}{n}\to 0$ $\quad \underbrace{\beta=\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0}_{\text{"по-важному?"}}$ $\overset{?}{\Rightarrow} \lim_{\beta\to 0}(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}=e$ Да, это так. (теоретически доказывается)

После $n\to\infty$ и предела последовательности x_n

1. появляется $x\to+\infty$; $x\in R$; предел функции $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$
(а можно и $x\to-\infty$, чего раньше вообще не было;)

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

2. появляется "новый предел" $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ (раньше этого не было)

$\lim_{x\to 2} x^3=8$ — интуитивно понятно.

$x\to 2 \Rightarrow x=2+\alpha$ $\quad \alpha\to 0$; $\quad \beta\to 0 \Rightarrow \lim_{x\to 2} x^3=8$

$x^3 = 8+3\cdot 4\cdot\alpha+3\cdot 2\cdot\alpha^2+\alpha^3 = 8+\beta$

Лекция 9 (03.11.2021) Предел функции в точке (и при $x \to \pm\infty$). ! $x \neq x_0$

Определение

Б.м.ф: $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое что $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta) = \dot{U}_\delta(x_0) \Leftrightarrow 0 < |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon$

Пример $\alpha(x) = x, \ x^2, \ x^3; \ \sqrt{x}; \ \sqrt[3]{x}$
$x \to 0$ — бесконечно малые функции.

Определение (по Коши) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ т.что $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$
$|f(x) - A| < \varepsilon$

Лемма $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$ $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to x_0$
в точности так, как у нас уже было

$\Rightarrow$ (Почти) все свойства пределов последовательностей сохранятся..!
(И их не придется доказывать снова.) К примеру, сохранятся

Теорема свойства б.м. (ф.): 1) сумма б.м.ф. $\Rightarrow$ снова б.м.ф
2) произведение б.м.ф. на огр. – снова б.м.ф.

К примеру, сохранится "теорема об арифметических свойствах предела"

Теорема Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ тогда

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = A+B$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

(при условии $B\neq 0$; $g(x)\neq 0$)

(**Замечание:**
1) можно писать $x\to x_0$; можно писать $x\to +\infty$)

Док-во

$\blacktriangle$.

п2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x) = A+\alpha(x)$; $\alpha(x)$ б.м.ф.

$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \Rightarrow g(x) = B+\beta(x)$; $\beta(x)$ – б.м.ф. (при $x\to x_0$) $\Rightarrow$ докажем п2

$f(x)\cdot g(x) = (A+\alpha(x))(B+\beta(x)) = AB + \underbrace{\alpha(x)B}_{\text{б.м.ф}} + \underbrace{\beta(x)\cdot A}_{\text{б.м.ф.}} + \underbrace{\alpha(x)\cdot\beta(x)}_{\text{б.м.ф}} = \underbrace{AB+\gamma(x)}$ $\gamma \Rightarrow$

→ по Th. о свойствах б.м.ф.

$\blacktriangle$. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$.

Слева

Δ.

Замечание:

2) п.1 и п.3 можно прочитать или доказать самим.

Вывод $\lim\limits_{x\to 2}(2x+7) = 11$ и все;

Забежал вперед

Опр Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$;

Утверждение Все элемент. ф-ции непр. в своих D_f.

Прервем рассказ о теории.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

(неопределенность типа $\frac{0}{0}$)

Замечание $f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$(x^2)'$?

$$(x^2)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^2}+2x_0 \cdot h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

$(x^2)' = 2x$ — только что мы это доказали.

Ньютон:

$$\frac{(x_0+o)^2 - x^2}{o} = \frac{\cancel{x^2}+2x \cdot o + o^2 - \cancel{x^2}}{o} = 2x + o = 2x$$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow \alpha = \frac{1}{n}$ и "забываем", что именно $1/n$

(!) пр. по Гейне

Пусть $\alpha\to 0$ (можно считать, что α – это любая последовательность, стремящаяся к 0 при $n\to+\infty$ но и не только) $\alpha(x)=\frac{1}{x^{\varepsilon}}$; $\varepsilon>0$; $x\to+\infty$)

II з.п.

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \Rightarrow$$

возьмём от обеих частей ln ($\ln e = 1$) $\Rightarrow \lim\limits_{\alpha\to 0}\ln\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = 1 \Rightarrow$

(!) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\ln(f) \overset{?}{=} \ln(\lim\limits_{\alpha\to 0}(f))$ (теорема)

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1 \quad (*)$$

II з.п.

$$\ln(a^x) = x\ln a$$

Было (в школе)

Сделаем замену $z = \ln(1+\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\to} 0$ (Тоже теорема (!))

$1+\alpha = e^{\ln(1+\alpha)} = e^z$

$\alpha = e^z - 1 \Rightarrow \lim\limits_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1} = 1$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$$ (тоже II з.п.) воспользуемся этим:

Докажем

Утверждение

$$(e^x)' = e^x$$

Док-во утв-я:

$$(e^{x_0})' := \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{\text{II. з.п.}} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}.$$ доказано.

$$\Big(\underbrace{e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h}_{\text{было в школе}}\Big)$$

Утверждение $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Док-во:

$$(\ln x)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right)}{h} =$$

$$\overset{*}{=} \lim \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}} \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \frac{1}{x_0}$$

$y = \frac{h}{x_0} \to 0$ при $h \to 0$

$$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

было в школе

! **Задача** Чему равна $(a^x)'$ (a — любое >0)? $(5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x_0+h}-a^{x_0}}{h} = a^{x_0}\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^{x_0}\cdot\ln a$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln a}-1}{h\cdot\ln a}\cdot\ln a = \ln a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y} = \ln a$$

$$a = e^{\ln a} \to \boxed{y = h\cdot\ln a \to 0 \text{ при } h\to 0}$$

Имеет место **теорема** (оценочный признак существования предела)
(лемма о зажатой ф-ции; "лемма о 2-х милиционерах")

Пусть $\boxed{f(x) \le g(x) \le h(x)}$ $\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$

и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A.$

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$

Замечание

Саму эту теорему докажем в след. раз.

Теорема

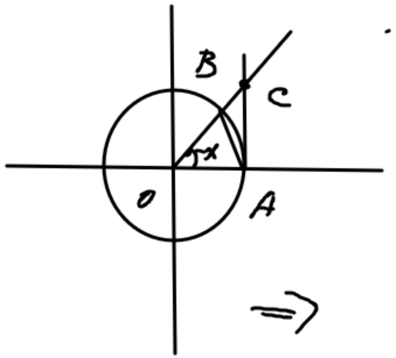
Докажем, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (первый замечательный предел.)

Лемма $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

Док-во (на след. лекции).

Рассмотрим

$x \in (0; \pi/2)$ угол



$S_\Delta CAO = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x \cdot R^2$

$S_\Delta BAO = \frac{1}{2} \sin x \cdot R^2$

$S_{\text{сект } BA} = \frac{1}{2} R^2 \cdot x$ $\Rightarrow$?

$\left\{ S_{\Delta BAO} \le S_{\text{сект } BA} \le S_{\Delta CAO} \right\}$ известно из школы

$\cancel{\frac{1}{2}R^2} \cdot \sin x \le \cancel{\frac{1}{2}R^2} \cdot x \le \cancel{\frac{1}{2}R^2} \cdot tg\, x$

в школе было

$\sin x \le x \le tg\, x \quad x \in (0; \frac{\pi}{2})$

1) $1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x}$

Воспользуемся леммой:

$\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1;$

2) поскольку функции четные, то это верно и для $x \in (-\pi/2; 0)$

$\Rightarrow$ по теореме о зажатой функции получаем, что

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ или $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ 1-й з.п. доказан

Теперь, используя 1-й зам. предел, докажем, что $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \cos(x_0);$

(т.е. $(\sin x)' = \cos x$)

Используем школьную формулу

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} = \frac{2\sin\left(\frac{x_0+h-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x_0+h+x_0}{2}\right)}{h} = \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}_{\to \cos(x_0)}$$

при $h \to 0$

(1-й зам. предел)

$y = \frac{h}{2}$ $\quad \frac{\sin y}{y} \to 1$, $y \to 0$

Утверждение доказано

$(\sin x)' = \cos x$

Д.З.

1) доказать, что $(\cos x)' = -\sin x$

2) $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Лемма $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$

(обсудим на след. лекции)

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon)$ т.что как только $0 < |x - x_0| < \delta$, так сразу $|\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$.

(задача состоит в том, чтобы по заданному $\varepsilon > 0$ найти такое вот $\delta(\varepsilon) > 0$)

ε !

$$|\cos x - \cos x_0| = \Big|-2\underbrace{\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}_{|\;|\le 1}\underbrace{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}\Big| \le \cancel{2}\cdot 1\cdot \frac{|x-x_0|}{\cancel{2}} < \cancel{\delta} \Rightarrow$$

$$\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| \le \frac{|x-x_0|}{2}$$

можно взять $\delta = \varepsilon$ и все получится

<u>т.е.</u> $\cos x$ – непрерывна в любой точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0}\cos x = \cos x_0$$

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x = \sin x_0$

Теперь нужно решить несколько задач

Задача

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(13x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(13x)}{13x}\cdot 13 = 13\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = 13$$

Утв $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha.$ $\Rightarrow$ Задача: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(17x)}{\sin(19x)} = \frac{17}{19}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Задача:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$