Семинар. 06.11.2021.

Решение разных задач на пределы. (книга А.К. Рыбникова и задачник Б.П. Демидовича)

Стр 68 (А.К.Р.)

Пример 1 $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}}$ Если $x\to\infty$ то $\frac{1}{x}\to 0$ тогда $2^{\frac{1}{x}}\to 2^{0}=1$

знак x не важен.

Ответ $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{\frac{1}{x}}=1$

(по итогам этих трех примеров: пример 1, пример 2, пример 3 нарисуем эскиз графика функции $y=2^{\frac{1}{x}}$)

Пример 2 $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}}=\,?$ $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}\to 0$

$(x<0)$

Ответ $\lim\limits_{x\to 0-0} 2^{\frac{1}{x}}=0$

$y=\frac{1}{x}$

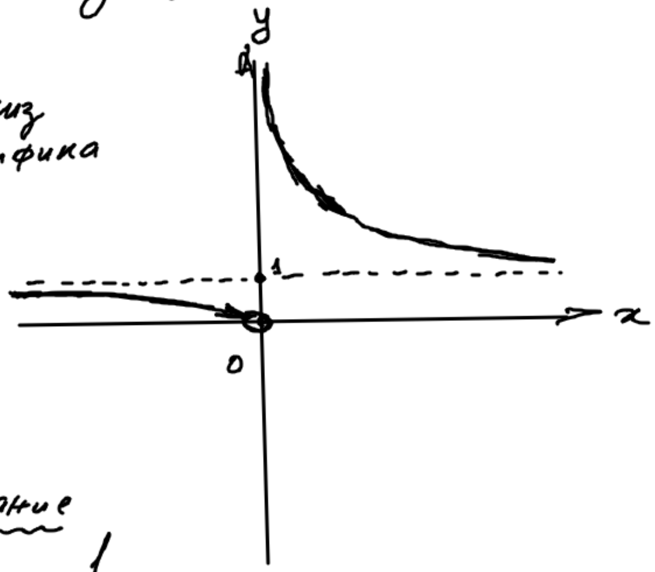
Пример 3 $\lim\limits_{x\to 0+0} 2^{\frac{1}{x}} = \text{"}2^{+\infty}\text{"} = \infty$

потому что $\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to 0+0]{} +\infty$ $\Rightarrow$

$(x>0)$

$y = 2^{\frac{1}{x}}$

Эскиз графика



Д. задание

$$y(x) = \frac{1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$$

Пример 4 (стр 68) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1} = \lim\limits_{y\to 1}\dfrac{y^4-1}{y^3-1} =$

Замена

$y=\sqrt[12]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x}=y^4 \quad \sqrt[4]{x}=y^3$

$y\to 1$ когда $x\to 1$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{\cancel{(y-1)}(y+1)(y^2+1)}{\cancel{(y-1)}(y^2+y+1)} = \frac{2\cdot 2}{3}=\frac{4}{3}$$

В общем виде потом докажем с помощью формулы Тейлора

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{x^\alpha-1}{x^\beta-1}=\frac{\alpha}{\beta};\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ (>0)}$$

(*) стр 69

Первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (было доказано на ближайшей лекции)

Второй замечательный предел:

$\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$; (*) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$

$\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

Должок (см. стр 44 пример 13)

$$\lim_{n\to\infty}(3n^2+2)\ln\left(\frac{n^2+0{,}2}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3n^2\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}2}{n^2}\right)+\underbrace{2\ln\left(1+\frac{0{,}2}{n^2}\right)}_{\to 0}\right)$$

т.к.

$1+\frac{0{,}2}{n^2}\to 1$ при $n\to\infty$ $\ln\left(1+\frac{0{,}2}{n^2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\ln(1)=0$

$$=3\cdot\lim\frac{\ln\left(1+\frac{0{,}2}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=$$

$\frac{1}{n^2}\Leftarrow !\ 0{,}2$

$$\left(\alpha_n=\frac{0{,}2}{n^2}\to 0 \text{ при } n\to\infty\right)=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{0{,}2}{n^2}\right)}{\frac{0{,}2}{n^2}}\cdot 0{,}2=0{,}6\cdot\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=$$

$\frac{0{,}2}{n^2}=\alpha$

$$=0{,}6\cdot 1=$$

$$=0{,}6.$$

Пример 14 (стр 44)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2(n+3)}{n-1{,}3} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\ln(n+3)}{(n+3)}}_{\to 0 \text{ при } n+3\to\infty}\cdot\underbrace{\frac{n+3}{n-1{,}3}}_{\to 1 \text{ при } n\to+\infty}\cdot\frac{1}{\ln 2} = 0\cdot 1\cdot\frac{1}{\ln 2} = 0.$$

В серии задач на стр 44 без док-ва разрешалось использовать утверждение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} = 0$$

(где $\varepsilon > 0$ — любое число)

$$\log_2(n+3) = \frac{\ln(n+3)}{\ln 2}$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

$(c = e)$

Формула перехода к другому основанию

со стр. 44 закончили;

Пример 9

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{5}-1} = \frac{\ln 3}{\ln 5}$$

потом повторим.

Вернемся к 1-му замечательному пределу

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{заметим, что} \quad \lim_{n\to\infty} n\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Стр 70 пример!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim \frac{\sin(5x)}{(5x)}\cdot 5 = 5\lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 5.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(kx)}{\sin(mx)} = \frac{k}{m} \quad \boxed{\text{Следствие}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{tg x}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = 1\cdot 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{tg\, 5x}{x} = 5$$

Следствие

см выше как решать

(стр 71)

Договорились на лекции

$$\left(\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

$y = \arcsin x$

$x = \sin y$ $\to 0$ при $x\to 0$

Соответственно $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{\arcsin x}=1$

и т.д. Принято писать $\sin x\sim x\sim \operatorname{tg}x\sim \arcsin x\sim \operatorname{arctg}x$ при $x\to 0$)

Нами разобран пример 3 со стр. 71.

Классический пример 4 стр 72 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{1\ \text{способ}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cdot(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ //

2-й способ

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x^2}{4}}=\frac{2}{4}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2=\frac{1}{2}$

В задачах в книге А.К.Р.

часто используется

$\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$ ~ $\cos 3x=1-2\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)$

Стр 73

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\cdot\ln a}\cdot\ln a=\ln a\cdot\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=\ln a\cdot 1==\ln a.$$

$a=e^{\ln a}$

Должок пример 9 со стр 44

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{5}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{1/n}-1}{1/n}\cdot\frac{1/n}{5^{1/n}-1}=$$

$\alpha=\frac{1}{n}\to 0$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3^\alpha-1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{5^\alpha-1}=\frac{\ln 3}{\ln 5}\ \Delta.$$

пример 5 (стр 73)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{x^2}=$$

$\cos x=1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)=1+\beta$

$$\boxed{\lim_{\beta\to 0}\frac{\ln(1+\beta)}{\beta}=1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}_{\to 1}\cdot\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\cdot\frac{x^2}{4}}=\frac{-2}{4}\lim\frac{\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=-\frac{1}{2}\ \Delta.$$

II з.п.

$$\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\to 1^2$$

Пример 6 (стр73)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$=1+1/2=3/2$$

Стр 74 (и 75) $\Rightarrow$ Вычисление пределов выражений вида $(u(x))^{v(x)}$ не x^n не a^x

$$(u(x))^{v(x)}=e^{(\ln(u(x))\cdot v(x))}\Rightarrow$$ и дальше смотрим, что получилось.

Пример 1 со стр 75

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x\to 1}=2^1=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1-\frac{2}{x+1}$$

Пример 2 (стр 75)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = \text{"}\left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty}\text{"} = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty \;!$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) = \frac{1}{2}$$

Пример 3 (75–76 стр)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \underset{\text{исп. 2-й з. предел}}{\underline{\text{"}1^{\infty}\text{"}}} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{x} =$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$

$$\left(\alpha = -\frac{2}{x+1} \underset{x\to\infty}{\to} 0\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{x+1}x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}} = e^{-2}$$

$$\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}} \to e$$

т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1} = -2$

$$(a^x)^y = a^{x\cdot y}$$

$\triangle$.

Пример 6 стр 78

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^{m-1}+x^{m-2}+\dots+x^2+x+1)}=\frac{n\cdot 1}{m\cdot 1}=\frac{n}{m}$$

$n, m \in Z$

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x^2+x+1)$$
$$x^m-1=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\dots+x^2+x+1)$$

Было в школе в тот момент, когда обсуждали формулу суммы n членов геометрической прогрессии

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}=\frac{\alpha}{\beta}\Rightarrow\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}\right)^2=\left(\alpha/\beta\right)^2$$

Пример 8 стр 79

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{(1+\sqrt{\cos x})(1-\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos 3x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cancel{2}\sin^2\left(\frac{3x}{2}\right)}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}=\left(\frac{1/2}{3/2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$$

Домашнее задание
№№ 1-28 стр 87-88;

Пример 12

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\Bigg(\underbrace{\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2\frac{x}{2}}}}_{\to e}\Bigg)^{\frac{-2\sin^2 x/2}{x^2}} = e^{-2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x/2)}{x}\right)^2} =$$

$$= e^{-2\cdot(1/2)^2} = e^{-1/2}\ \Delta.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x} = \alpha \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(\alpha x)}{x}\right)^2 = \alpha^2$$

$$-2\cdot(1/2)^2 = -2\cdot 1/4 = -1/2$$