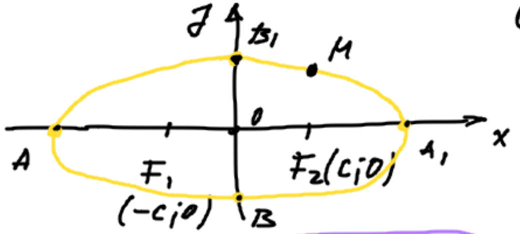
Г.М.Т. = "геометрическое место точек" = "множество всех точек плоскости, таких, что "условие"."

Семинар 09.10.2021

Кривые второго порядка:

① . Эллипс



Определение Эллипс – Г.М.Т. плоскости Oxy таких, что

$|MF_1| + |MF_2| = 2a > 2c$

Фокусы

$F_1(-c;0)$ $F_2(c;0)$

каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ на лекции уравнение было выведено из определения.

$A(-a;0)$
$A_1(a,0)$
$B(0,b)$
$B_1(0,-b)$

где $b^2 := a^2 - c^2$.

a, b – "полуоси"

Определение Эксцентриситет

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

показывает, насколько "вытянут" эллипс (по оси Ox)

Некоторые задачи: (Клетеник, сборник задач по аналитической геометрии)

446 з. (стр 67).

Определить полуоси каждого из следующих эллипсов (10 пунктов; решим 2 для образца)

п.3) $x^2 + 25y^2 = 25$ – "не совсем" каноническое уравнение.

Приведем к нужному виду: $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$

$\Rightarrow \boxed{a = 5}$ $\boxed{b = 1}$ △

п5

$$4x^2+9y^2=25 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

а) делим на 25: $\frac{4x^2}{25}+\frac{9y^2}{25}=1$

б) "переписываем": $\frac{x^2}{\frac{25}{4}}+\frac{y^2}{\frac{25}{9}}=1$

$a^2=\frac{25}{4}$, $b^2=\frac{25}{9}$

$\Rightarrow a^2=\frac{25}{4} \Rightarrow a=\frac{5}{2}$

$b^2=\frac{25}{9} \Rightarrow b=\frac{5}{3}$

Ответ:

!

Д.З. 446 задачу сделать полностью.

з. 447 (стр.67) Дан эллипс $9x^2+25y^2=225$ Найти 1) его полуоси. 2) фокусы. 3) $\varepsilon = c/a$ эксцентриситет 4) уравнения его директрис.

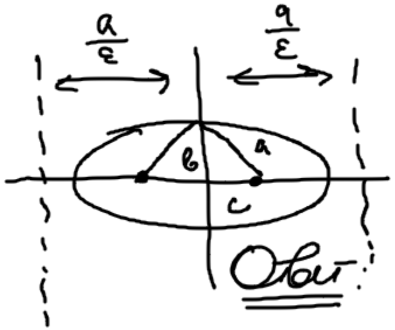
1) аналогично п.5 з. 446:

$$\frac{9}{225}x^2+\frac{25}{225}y^2=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{225}{9}}+\frac{y^2}{\frac{225}{25}}=1$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

(У эллипса 2 директрисы)

п1) решен $\boxed{a=5}$ $\boxed{b=3}$



п2) $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c^2=a^2-b^2$; $c>0$; $|a>b|$!

$c^2=5^2-3^2=25-9=16$ $\quad c=4$

Ответ: Фокусы $F_1(-c;0)=(-4;0)$

$F_2(c;0)=(4;0)$

3) Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0,8$

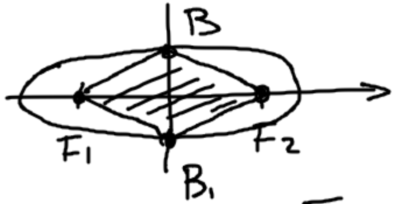
4) $x_{1,2}=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{5}{0,8}=\pm 6,25$ Ответ $x=6,25$

$x=-6,25$

---

450) Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $9x^2+25y^2=1$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

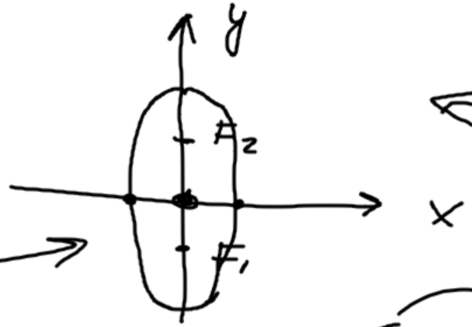
$a=1/3$ $\quad b=1/5$ $\quad \frac{x^2}{1/9}+\frac{y^2}{1/25}=1$ $\quad a>b$



$a > b$

$a < b$

$$\boxed{S_{F_1BF_2B_1} = \frac{1}{2} F_1F_2 \cdot B_1B_2 = = c \cdot 2b}$$



! b меньше a

$S = c \cdot 2a$ если $a < b$

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{25} = \frac{25-9}{225} = \frac{16}{225}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{S = c \cdot 2b = \frac{4}{15} \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{75}}$$

$$c = \frac{4}{15}$$

Задание Решить в случае условия

$9x^2 + 5y^2 = 1$ $b > a$

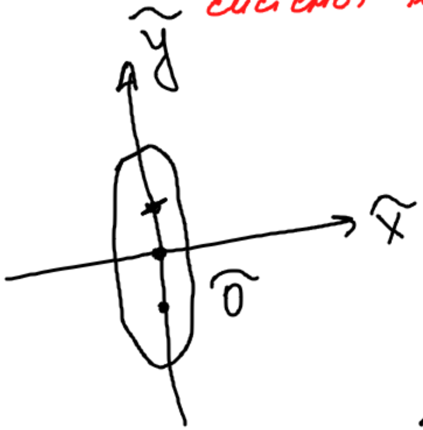
Приведение к каноническому виду более сложных уравнений:

Задача 471 п. 3: Убедиться (проверить) в том, что линия, заданная уравнением

$$4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$$

является эллипсом.

Если бы тут было $A\cdot x\cdot y$, то пришлось бы делать поворот системы координат.



$$4(x^2-2x)+3(y^2+4y)-32=0$$

$$4(x^2-2x+1)-4+3(y^2+4y+4)-12-32=0.$$

$$4(x-1)^2+3(y+2)^2-48=0$$

$$4(x-1)^2+3(y+2)^2=48$$

$$\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

вдоль $\tilde{O}\tilde{y}$

$a^2<b^2$ — вытянут

$\tilde{O}(1;-2)$ $\quad \tilde{x}=x-1 \quad \tilde{y}=y+2$

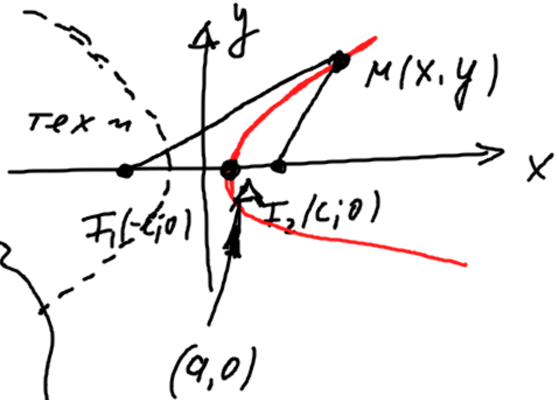
Замечание

уравнение НЕ содержало $A\cdot x\cdot y$, поэтому мы "обошлись" только параллельным переносом осей координат.

Гипербола:

Определение: — это множество тех и только тех точек $M(x,y)$ плоскости Oxy, т. что:

$$\boxed{|MF_1| - |MF_2| = 2a \qquad \underline{\underline{a<c}} \qquad (\pm 2a)}$$



Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

На лекции это уравнение тоже было выведено.

У гиперболы есть асимптоты:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

Если обозначить $\xi = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ и $\eta = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$ то получим «уравнение гиперболы в асимптотах»

$$\xi \cdot \eta = 1$$

(В школе изучают гиперболу $y = \frac{1}{x}$ $\quad xy = 1$ как раз это уравнение)

…y гиперболы $\varepsilon > 1$

эллипса $\varepsilon < 1$

4) $\frac{\tilde{x}^2}{8^2} - \frac{\tilde{y}^2}{6^2} = 1$

$\frac{\tilde{x}}{8} \pm \frac{\tilde{y}}{6} = 1$ Уравнения асимптот.

$\Rightarrow \frac{x+5}{8} = \pm \frac{y-1}{6}$

Задача 541 п 2.

$$9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$$

$$9(x^2 + 10x) - 16(y^2 - 2y) - 367 = 0.$$

$$9(\underbrace{x^2 + 10x + 25}_{(x+5)^2}) - 225 - 16(y^2 - 2y + 1) + 16 - 367 = 0$$

$16 - 367 = -351$

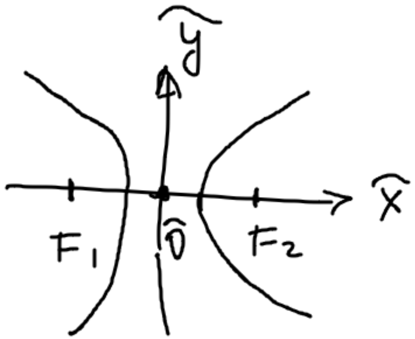
$$9(x+5)^2 - 16(y-1)^2 = 576$$

$\begin{cases} \tilde{x} = x+5 \\ \tilde{y} = y-1 \end{cases}$ (сдвиг координат)

$$\frac{9(x+5)^2}{576} - \frac{16(y-1)^2}{576} = 1$$

$$\frac{(x+5)^2}{64} - \frac{(y-1)^2}{36} = 1$$

$a = 8 > 6 = b$



1) центр $\tilde{O}(-5;1)$

2) полуоси 8 и 6

3) эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$

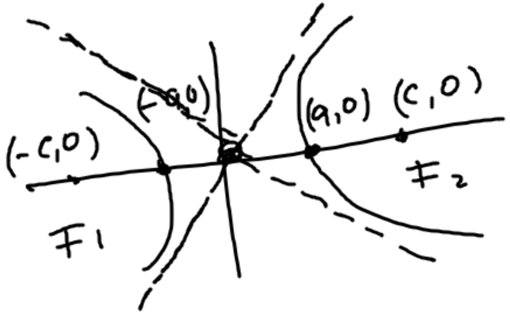
$b^2 = c^2 - a^2$ $\quad 36 = c^2 - 64 \Rightarrow c^2 = 100 \quad c = 10$

$\varepsilon = \frac{10}{8} = 1,25$

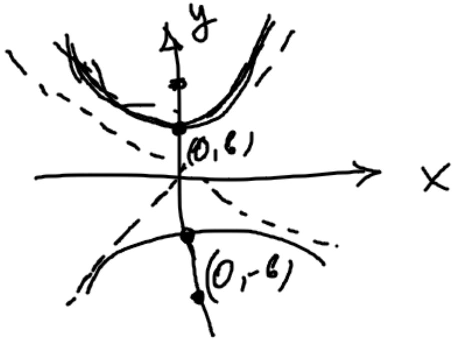
Уравнение директрис — на дом.

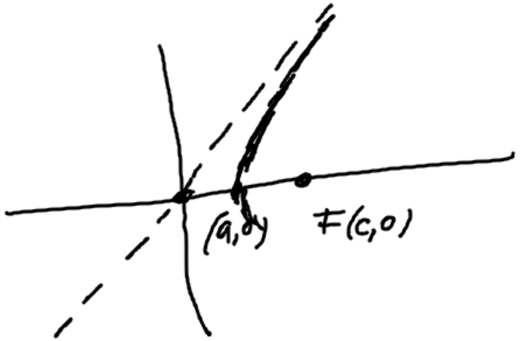
Замечание:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$!





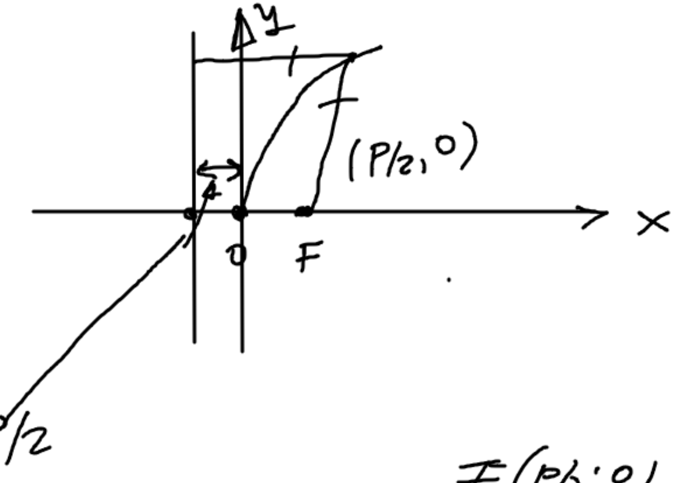
Что такое асимптота?

расстояние между гиперболой и ее асимптотой уменьшается (стремится к нулю) (при $x \to \pm\infty$)

Парабола:

Определение

Парабола — это множество тех (и только тех) $M(x,y)$ точек плоскости Oxy, т.что расстояние от M до фокуса $F(p/2;0)$ равно расстоянию от M до директрисы d



Каноническое уравнение параболы:

$$y^2=2px$$

На дом: прочесть введение к параграфам в задачнике;

пар. 593; 597; 600

гип. 535; 541 520; 521

Задача 599. (стр 88)

Какие линии задаются уравнениями:

1) $y=3-4\sqrt{x-1}$

$y-3=-4\sqrt{x-1}$

$(y-3)^2=4^2\cdot(x-1)$

$(y-3)^2=16(x-1)$

$\hat{y}^2=2\cdot 8\hat{x}$

парабола

$\hat{x}=x-1$

$\hat{y}=y-3$

y

Эллипс: 446 (доделать); 448;