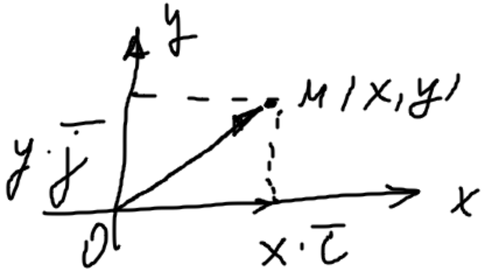
Семинар 25.09.2021.

декартовы координаты

1). Система прямоугольных координат на плоскости:



$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x;y)$

Координаты точки $M(x;y)$

$M \leftrightarrow (x;y)$

Разным точкам соответствуют разные координаты.

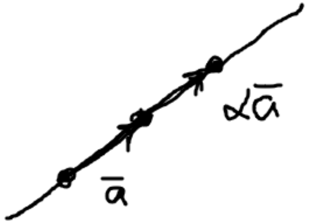
Вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ – направленный отрезок, соединяющий точки M_1 и M_2

M_1 – "начало"

$M_1(x_1, y_1)$ $M_2(x_2, y_2)$ M_2 – "конец" вектора;

① Вектор можно умножить на число:

$\alpha \in \mathbb{R}$; $\vec{a} = (a_1, a_2) \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2)$



$(\alpha > 1)$

Векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$ параллельны

Модуль вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

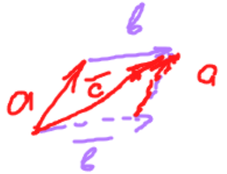
② Векторы можно складывать:

$\vec{a} = (a_1, a_2)$ $\vec{b} = (b_1, b_2)$ $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

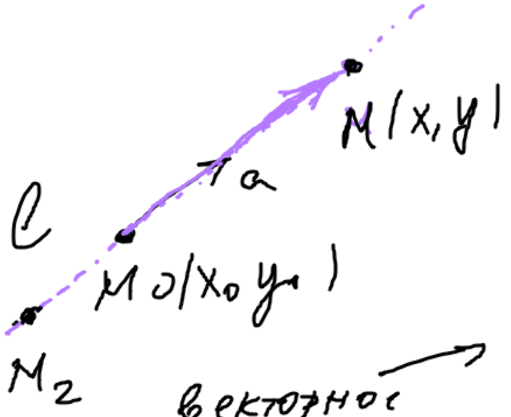
покомпонентно

"Правило параллелограмма":

$\vec{c} =$ (диагональ) $= \vec{a} + \vec{b}$



③ Прямая на плоскости (проходящая через точку M_0 и с направляющим вектором $\vec{a}=(a_1,a_2)$:



Векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ параллельны, если M — принадлежит нашей прямой l

$$\boxed{\overrightarrow{M_0M}=t\cdot\vec{a}}$$ $t\in R$ — произвольное число

векторное уравнение

$$(x-x_0;y-y_0)=t(a_1,a_2)$$

$$\begin{aligned} x-x_0&=t\cdot a_1\\ y-y_0&=t\cdot a_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x=x_0+a_1t\\ y=y_0+a_2t \end{cases}$$

параметрические уравнения прямой

$$\Rightarrow \quad t = \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} \Rightarrow y-y_0 = \frac{a_2}{a_1}(x-x_0)$$

$$y = \underbrace{\frac{a_2}{a_1}}_{=k} x \underbrace{-\frac{a_1}{a_1}x_0 + y_0}_{b}.$$

Если $\vec{a} = (M_0M_1) = (x_1 - x_0; y_1 - y_0) \Rightarrow$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

Уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки $M_0(x_0 y_0)$ и $M_1(x_1 y_1)$.

Задача

Выписать уравнение прямой, проходящей через точки $M_0(\underset{x_0}{2}, \underset{y_0}{2})$ и $M_1(\underset{x_1}{3}, \underset{y_1}{7})$

$M(x, y)$ — переменная точка.

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-2}{7-2} \Rightarrow x-2 = \frac{y-2}{5}$$

$y - 2 = 5x - 10$

$\boxed{y = 5x - 8}$

$\boxed{\begin{array}{l} k = 5 \\ b = -8 \end{array}}$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2}} \Rightarrow \quad Ax+By=C$$

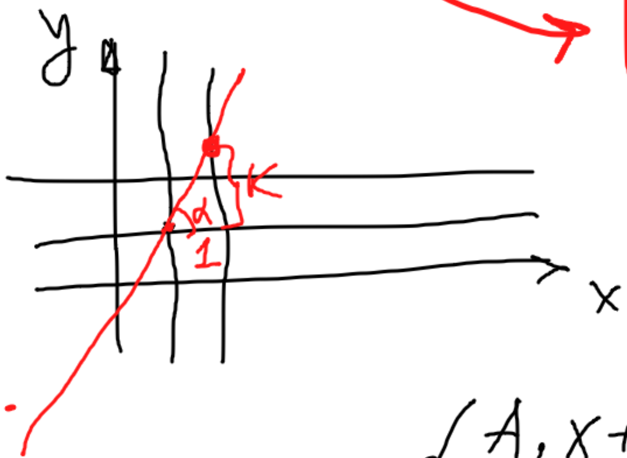
$a_1 \neq 0$

общее уравнение прямой на плоскости.

Если $B \neq 0 \Rightarrow$

$$\boxed{y = kx + b}$$ — уравнение с угловым коэффициентом.

$k = tg\alpha$ $\qquad k = \tan(\alpha)$



4 Взаимное расположение (двух) 2-х прямых на плоскости

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = C_1 \\ A_2x + B_2y = C_2 \end{cases}$$

система из двух уравнений с двумя неизвестными

отметим три возможных случая:

а) прямые пересекаются (имеют единственную общую точку)

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y = C_1 \\ A_2 x + B_2 y = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

$A_1 B_2 - A_2 B_1 \neq 0$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

определитель не равен нулю.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

по формулам Крамера (в теории)

(б) Две прямые параллельны:

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

не пересекаются; система не имеет решений

$$\left(\det A = 0 \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} \right)$$

Пример

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 7 \end{cases}$$

параллельны.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{3}{7}$$

(в) прямые совпадают

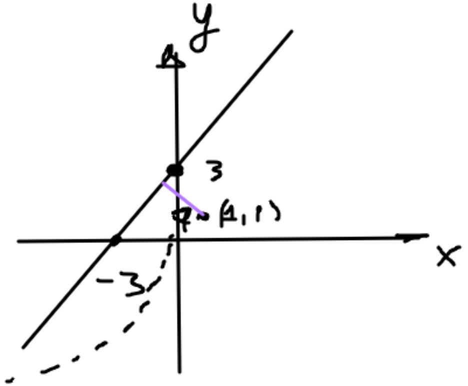
уравнения пропорциональны.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$

Утверждение:

Расстояние от точки $M_3(x_3\ y_3)$ от прямой $Ax+By+C=0$.
(на плоскости) равно:



$$d = \frac{|Ax_3+By_3+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Пример

$x-y+3=0$

$M(1;1) \Rightarrow d = \frac{|1-1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$A=1$
$B=-1;\quad C=3$

Взаимное расположение двух прямых, заданных уравнениями $\underbrace{y=k_1x+b_1}_{l_1}$, $\underbrace{y=k_2x+b_2}_{l_2}$

1. пересекаются, если $k_1 \neq k_2$

2. параллельны, если $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$

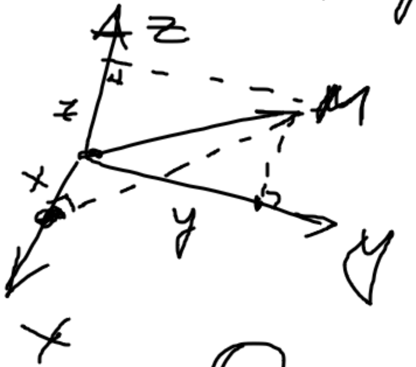
3. совпадают, если $k_1 = k_2$, $b_1 = b_2$

<u>Прямые</u> l_1 и l_2 перпендикулярны (угол между ними $90°$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$) если $k_1 \cdot k_2 = -1$

<u>Угол между прямыми равен</u> $\arctan\left(\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1}\right)$

§2 Прямая в пространстве: $\mathbb{R}^3$

$$M(x,y,z) = x\cdot\bar{i} + y\cdot\bar{j} + z\cdot\bar{k}$$



$$\left.\begin{aligned} \bar{i} &= (1,0,0) \\ \bar{j} &= (0,1,0) \\ \bar{k} &= (0,0,1) \end{aligned}\right\}$$ координатные векторы (орты)

ортогональная = прямоугольная система координат

Операции с векторами — такие же, как и раньше.

$|\bar{i}| = 1; \quad |\bar{j}| = 1; \quad |\bar{k}| = 1$

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) = a_1\cdot\bar{i} + a_2\cdot\bar{j} + a_3\cdot\bar{k}$$

модуль → $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Пример

$$\vec{a} = (1, 2, 3)$$

$$\vec{b} = (2, 5, 7) \Rightarrow$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (3, 7, 10)$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

модуль, (или длина) вектора $\bar{a}$

Домашнее задание: 3.14 – 3.22.

Прямая в пространстве

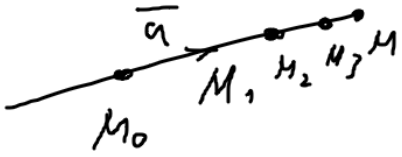
$M_0(x_0;y_0;z_0)$

$M(x;y;z)$

$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ — направляющий вектор прямой. (н.в.)

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a} \iff$$

точка $M(x,y,z)$ принадлежит прямой l, с н.в. $\vec{a}$ проходящей через т. M_0



то есть

$$\exists\, t \in R$$

$$\overrightarrow{M_0M} = t\cdot\vec{a}$$

(снова)

$$M = M_0 + t\cdot\vec{a}$$

параметрическое уравнение прямой

(п. 3. стр. 3)

$$t = \frac{X - X_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Как и раньше (стр 4) только добавилась координата z.

(!) Если даны две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ то тогда "уравнение" прямой, проходящей через эти две точки, будет иметь вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

$$\begin{cases} 1 = 2 \\ 2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 3 \\ 2 = 1 \end{cases}$$

Пример $M_0(1, 1, 1)$ $M(2, 2, 3)$

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - 1}{2 - 1} = \frac{z - 1}{3 - 1}$$

Замечание это целая система уравнений, не одно уравнение!

$$x-1=y-1=\frac{z-1}{2}$$

$$x-1=y-1 \Rightarrow x-y=0$$

$$y-1=\frac{z-1}{2} \Rightarrow 2y-2=z-1 \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 2y-z=1 \end{cases}$$

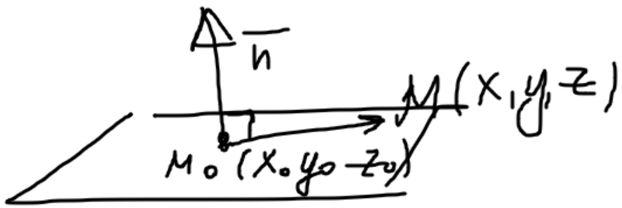
Система уравнений вида

Замечание

нужно понять, что это за множество в пространстве $\rightarrow$ $Ax+By+Cz+D=0$

Ответ это плоскость:

$\vec{n} = (A, B, C)$



Скалярное произведение векторов:

Определение

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a} \cdot \text{пр}_{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$$

Теорема

в $\mathbb{R}^2$ $\bar{a} = (a_1, a_2)$ $\bar{b} = (b_1, b_2)$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\Rightarrow (\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2$$

в $\mathbb{R}^3$ $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \Rightarrow$

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Вывод:

R^2

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

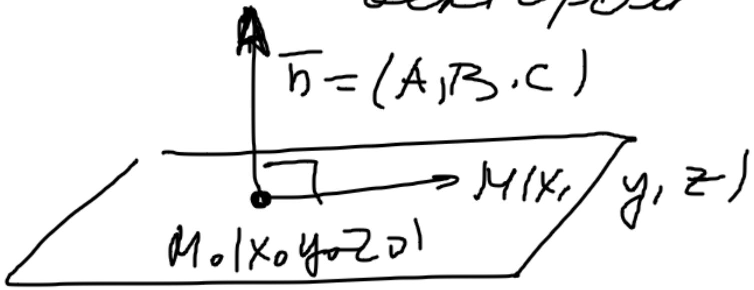
в R^3

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

Замечание Угол между двумя прямыми — это угол между их направляющими векторами.

Замечание Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, не равными нулю, равен 90° если и только если $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$

Уравнение плоскости с нормальным вектором $\vec{n} = (A, B, C)$



$$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \quad (\text{угол} = 90^\circ)$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$$ по теореме

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$

Пример Записать уравнение плоскости с вектором нормали $\vec{n}(1, 2, 1)$, проходящей через точку $M_0(1, 1, 1)$

$$\vec{n}(\underset{A}{1}, \underset{B}{2}, \underset{C}{1}), \quad M_0(\underset{x_0}{1}, \underset{y_0}{1}, \underset{z_0}{1})$$

$$1(x-1) + 2(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$\boxed{x + 2y + z = 4}$$

Замечание Угол между плоскостями

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \end{cases}$$

равен углу между нормальными векторами этих плоскостей.

$\bar{n}_1=(A_1B_1C_1)$ $\bar{n}_2=(A_2B_2C_2)$

Замечание

если $\bar{n}_1=k\cdot\bar{n}_2$ $(k\neq 0)$, то плоскости параллельны или совпадают

Пример Провести через точку $M_0(0,0,0)$ плоскость, параллельную плоскости $x+y+z=3$

$\bar{n}_1=(1,1,1)$ $M_0(0,0,0)$ $\Rightarrow 1\cdot(x-0)+1\cdot(y-0)+1(z-0)=0$

(начало координат) $x+y+z=0$

Замечание. Прямая $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$

перпендикулярна плоскости $Ax+By+Cz+D=0$

если векторы $(a_1, a_2, a_3) = \bar{a}$ и $\bar{n} = (A, B, C)$

пропорциональны (или равны).

Задача. Провести через точку $(1;1;1)$

прямую, перпендикулярную плоскости

$x+y+z=0$ $\quad$ $\bar{a} = (1,1,1) \Rightarrow$

$A=1 \quad B=1 \quad C=1$ $\quad$ $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$. $\triangle$

Д.З. Кр: 3.14 – 3.22

4.15, 16, 18, 21