Было в прошлый раз:

1). Определители (и их свойства)

2). Формулы Крамера решения систем линейных уравнений.

К примеру:

Система
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

"$\bar{b}$"

Матрица коэффициентов: Δ_1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Δ_3 Δ_2

Столбец свободных членов

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Определитель:

$$\Delta = |A| =$$
$$= 1\cdot 3\cdot 5 + 2(-3)\cdot 3 + (-2)(-4)\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 3 - 1\cdot(-3)(-4) - (-2)\cdot 2\cdot 5 =$$
$$= 15 - 18 + 8 - 9 - 12 + 20 =$$
$$= -3 - 1 + 8 = 4$$

Замечание Иногда (чаще всего) пишут так:

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 10 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 8\cdot3\cdot5 + 2\cdot(-3)\cdot10 + (-5)(-4)\cdot1 -$$

$$- 1\cdot3\cdot10 - (-5)\cdot2\cdot5 - (-3)(-4)\cdot8 =$$

$$= 120 - 60 + 20 - 30 + 50 - 96 =$$

$$= \underbrace{80 - 30}_{50} + 50 - 96 = 100 - 96 = 4$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5)\cdot5 + 8(-3)\cdot3 + (-2)\cdot10\cdot1 -$$

$$- 1(-5)\cdot3 - (-3)10\cdot1 - (-2)\cdot8\cdot5 =$$

$$= -\cancel{25} - 72 - \cancel{20} + \cancel{15} + \cancel{30} + 80$$

$$= 8$$

$$y = x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 10 + 2(-5)\cdot 3 + (-2)(-4)\cdot 8$$

$$- 8\cdot 3\cdot 3 - 1\cdot(-4)(-5) - (-2)\cdot 2\cdot 10 =$$

$$= \cancel{30} - \cancel{30} + \underbrace{64 - 72}_{-8} - 20 + 40 = 12$$

$$z = x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{12}{4} = 3$$

Ответ
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Система $A\bar{x} = \bar{b}$ у которой $|A| \neq 0$ всегда имеет единственное решение.

Задачка для самых ....
эту систему уравнений решить при помощи обратной матрицы.

Метод Гаусса (последовательного исключения неизвестных)

С помощью "элементарных (линейных) преобразований" над строками сделать так, чтобы все неизвестные оставались бы только в первом уравнении системы, а каждое следующее (уравнение) содержало бы на одну неизвестную меньше, чем предыдущее.

$$\begin{array}{c} 3 \\ 3 \\ 3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & \tilde{*} & \tilde{*} & \tilde{*} \\ 0 & 0 & \tilde{\tilde{*}} & \tilde{\tilde{*}} \end{array}\right) \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

Поясним на нашем примере:

$*2$ и сложить; $*3$; $-$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases} \rightarrow$$

① Хотим исключить x_1 из второго и третьего уравнений системы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 0 \quad 7x_2 - x_3 = 11 \\ \quad -10x_2 + 2x_3 = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ \begin{cases} 7x_2 - x_3 = 11 \\ 10x_2 - 2x_3 = 14 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_2 - x_3 = 11 & * 10 \\ 10x_2 - 2x_3 = 14 & * 7 \end{cases} \quad - \begin{cases} 70x_2 - 10x_3 = 110 \\ 70x_2 - 14x_3 = 98 \end{cases}$$

$$-4x_3 = -12 \Rightarrow x_3 = 3 \quad \checkmark$$

Метод Гаусса состоит из двух этапов:

① $\underline{\underline{\text{получаем систему нужного вида}}}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 70x_2 - 10x_3 = 110 \\ -4x_3 = -12 \end{cases}$$

$$7x_2 - 3 = 11$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \quad \checkmark$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 + 4 + 3 = 8$$

$$x_1 = 1$$

② $\underline{\text{этап}}$ "Снизу → вверх" находим неизвестное.

Еще один пример 3×3 а потом сделаем 4×4.

Была матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $(|A| = 18 \neq 0)$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 3x + y + 2z = 6 \\ 2x + 3y + z = 6 \end{cases}$$

(Ответ уже знаем $x=1$, $y=1$, $z=1$ и другого - нет)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \quad * \ 3 \\ 3x + y + 2z = 6 \quad - \\ 2x + 3y + z = 6 \end{cases} \quad 2 \ * \quad - \quad \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 5y + 7z = 12 \\ y + 5z = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + 5z = 6 \\ 5y + 7z = 12 \end{cases} \ *5 \quad -$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + 5z = 6 \\ -18z = 12 - 30 = -18 \end{cases}$$

$z = 1$ $\Rightarrow$ $y = 1$ $\Rightarrow$ $x = 1$

Пример   4 уравнение 4 неизвестных $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ стр 60/61

2.16

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8 \end{cases}$$

$+$ $*2$ $-$ $*3$ $-$

поделим на 3

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_2 - 7x_3 + 7x_4 = -15 \\ -4x_2 - 7x_3 + 10x_4 = -10 \end{cases}$$

(исключим x_1)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_2 - 7x_3 + 7x_4 = -15 \\ 4x_2 + 7x_3 - 10x_4 = 10 \end{cases}$$

$-$ $*4$ $-$

(исключим x_2)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ -9x_3 + 6x_4 = -18 \\ +x_3 + 14x_4 = +2 \end{cases}$$

поделим на 3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_3 + 14x_4 = 12 \\ 3x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_3 + 14x_4 = 12 \\ 3x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

$* 3$

$-$

$$-2 - 18 = -20$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_3 + 14x_4 = 12 \\ -44x_4 = -18 \end{cases}$$

$$x_4 = \frac{18}{44} = \frac{9}{22}$$

$\Rightarrow x_3 \Rightarrow x_2 \Rightarrow x_1$

и проверить вычисление

Задача Найти ошибку ?

На дом ср 60–61 2.12; 13; 14; 18; 19; 20

Что в методе Гаусса вообще может получиться?

1) Одно (или несколько) уравнение системы может "исчезнуть"

Д.З. Выписать

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = \dfrac{12-7z}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 3x+y+2z=6 \\ 4x+3y+5z=12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$3 = 1 + 2$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 3x+y+2z=6 \end{cases} \cdot 3$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ +5y+7z=+12 \\ 0+0=0. \end{cases}$$

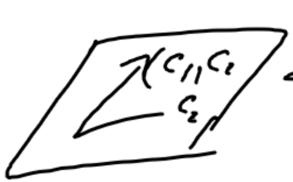
$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 5y+7z=12 \end{cases}$$

Тогда говорят, что переменная z (любая!) может принимать произвольные значения, а y и x через нее выражаются.

И тогда решений будет бесконечно много.

Определение В этом случае говорят, что z — свободная переменная; свободных переменных будет столько, сколько "число неизвестных — число оставшихся уравнений".

Например



$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x+4y+6z=12 \\ 3x+6y+9z=18 \end{cases} \quad \times 2 \; - \quad \times 3 \; - \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 0+0+0=0 \\ 0+0+0=0 \end{cases}$$

Неизвестных было 3. Осталось одно уравнение $\Rightarrow$ $2 = 3-1$ свободных переменных $\Rightarrow$

$y = C_1 \quad z = C_2 \quad$ C_1, C_2 — любые числа.

$x = 6 - 2C_1 - 3C_2$

2-я возможность Уравнение может исчезнуть "не полностью"

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x+4y+6z=12 \\ 3x+7y+9z=19 \end{cases} \quad *2 \ominus \quad *3 \ominus$$

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 0=0 \\ 0=\underline{1} \end{cases}$$

Противоречие

Наблюдение

Метод Гаусса приводит к одному из трех результатов: Нет решений.

1. Решение единственно (квадратная матрица A; $|A| \neq 0$)
2. Решений бесконечно много (сокращаются уравнения в системе)
3. Решений нет ("система несовместна")