ksemen@mech.math.msu.su

ksemen@abc.math.msu.su

matrix

(1). **Определители матриц**

determinant

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad |A| = \det A = a\cdot d - b\cdot c$$

$n=2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4-6 = -2.$$

$n=3$

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

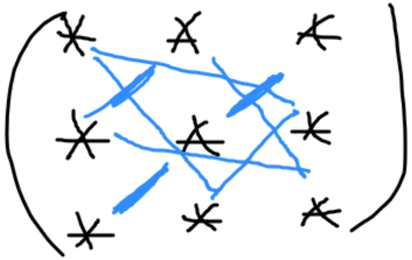
$$|A| = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$+$

$$|A| = 1\cdot4\cdot1 + 2\cdot2\cdot3 +$$

$$+ 4\cdot2\cdot3 -$$



$-$

$$- 3\cdot4\cdot3 - 4\cdot2\cdot1$$

$$- 1\cdot2\cdot2 = 4 + \cancel{12} + \cancel{24} - \cancel{36} - 8 - 4 = -8.$$

Упражнение $\boxed{1.}$ Проверить, что у матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad |A| = 0. \quad (\text{на дом})$$

Как вычислить определитель матрицы 4x4?

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

По теореме из лекции:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

M_{11}

разложением по 1-й строке:

$$|A| = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3} M_{13} + a_{14}(-1)^{1+4} M_{14}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Упражнение

Записать M_{12}, M_{13}, M_{14}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

<u>Упражнение</u> Проверить, что $|A| = 0$

$\boxed{0}$

$$|A| = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix} =$$

(1)

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 4 \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 11 & 3 \\ 7 & 15 & 4 \end{vmatrix} =$$

<u>Утверждение</u>

общий множитель элементов строки (или столбца) можно вынести за знак определителя

$$= 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 5 & 11 & 3 \\ 7 & 15 & 4 \end{vmatrix} = 8\Big(\overbrace{3 \cdot 11 \cdot 4}^{132} + \overbrace{7 \cdot 7 \cdot 3}^{147} + \underbrace{5 \cdot 15 \cdot 2}_{150} - 2 \cdot 11 \cdot 7 - 5 \cdot 7 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 15\Big) =$$

$$= 8\big(132 + 147 + \underbrace{150 - 154}_{-4} - 140 - 135\big) = 8 \cdot (7 - 7) = 0.$$

Упражнение $\boxed{2}$ Довычислять (посчитать до конца).

Замечание Так можно вычислять,
но не нужно.

1. Долго
2. Возможно ошибку сделать в вычислениях.

Нужен другой способ.

3. Давно есть функция в любых электронных таблицах. (типа Mdeterm в Excel)

Свойства определителя:

① Если в матрице поменять местами любые две строки (любые два столбца), то определитель матрицы изменит свой знак:

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1\cdot5 - 2\cdot3 = -1$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad |\hat{A}| = 3\cdot2 - 5\cdot1 = +1$$

!

(Провести эксперимент со столбцами)

(2) (следствие из 1-го)
Если в матрице есть две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то определитель этой матрицы равен 0:

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$\det(A) = \det(\tilde{A}) = -\det(A) \Rightarrow \det A = 0$$

(3) Уже было сказано, что общий множитель элементов одной строки (одного столбца) можно вынести за знак определителя.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 6 = -4$$

$$(6 \ 8) = 2 \cdot (3; 4)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad |B| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) = -4$$

4-е свойство (следует из свойств 2 и 3):

Если две строки матрицы A отличаются множителем (пропорциональны) [то же самое про столбец] то определитель матрицы A равен нулю.

Пример: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ общий множитель 2

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$ по св-ву 2.

Упражнение 3 вычислить вручную (или в программе)

5-е свойство (Отчасти следует из предыдущих)

Если произвольную строку матрицы A умножить на произвольно взятое число и прибавить к любой другой строке, то определитель матрицы не изменится. (У той матрицы, что получится, будет такой же определитель, что и у исходной матрицы).

$$A = \begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{———} \\ \text{———} \end{pmatrix} \xrightarrow{\times\lambda,\ +} \;\Rightarrow\; \hat{A} \;\Rightarrow\; |\hat{A}| = |A|$$

Замечание То же самое про столбцы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot 5 \quad +$$

$5 \; 5$

$+$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2+5 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = \underline{1} \qquad |\hat{A}| = 1 \cdot 8 - 1 \cdot 7 = \underline{1}$$

<u>правило работает!</u>

Пример

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$$

и применим наши свойства к столбцам

Наша цель сделать так, чтобы в первой строке все элементы, кроме $1 = a_{11}$ стали равны 0.

Тогда нам хватит M_{11}

$\times 3$ $\quad \times 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & -8 & 8 \\ 9 & -8 & -16 & 12 \\ 13 & -12 & -24 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

по св-ву 4

пропорциональные столбцы

(третий получается из второго умножением на 2)

<u>Общая идея</u>

Применяя к матрице наши свойства, привести матрицу к такому виду

<u>К строкам</u> →

$$\begin{pmatrix} * & & & * \\ & * & & \\ 0 & & * & \\ & & & * \end{pmatrix} \Rightarrow$$

взять произведение элементов на главной диагонали и учесть возможное изменение знака.

"Верхне-треугольный вид"

"ступенчатый вид"

Пример

был на лекции

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 18$$

$$|A| = 1\cdot1\cdot1 + 3\cdot3\cdot3 + 2\cdot2\cdot2 - 3\cdot1\cdot2 - 1\cdot2\cdot3 - 3\cdot2\cdot1 = 36 - 18 = 18$$

!

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times 3 \\ \leftarrow (-) \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \underbrace{(-1)(-1)}_{1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$\times 2$

меняе
места

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \times 5 \\ \leftarrow (-) \end{matrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(1\cdot1\cdot(-18)) = 18$$

Замечание

Перестановки строк (столбцов), умножение строки (столбцов) на число; линейные комбинации строк (...) называются элементарными преобразованиями матрицы.

Вывод:

Разумный способ подсчета определителя — при помощи свойств 1 – 5 и элементарных преобразований, приводящих матрицу к верхне-треугольному виду.

Матричная форма записи системы линейных уравнений.

Формулы Крамера:

Было

$$\boxed{\begin{gathered} ax = b;\ a \neq 0 \\ x = a^{-1}b \end{gathered}}$$

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 6 \\ 3x + 1y + 2z = 6 \\ 2x + 3y + 1z = 6 \end{cases}$$

Стало:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

вектор-столбец свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

матрица коэффициентов

$$\boxed{A \cdot \bar{x} = \bar{b}}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

— вектор-столбец свободных членов

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

A = ; $\bar{b}$; $= \bar{X}$

$b_{11} \Rightarrow 6 = \underline{1} \cdot x + 2y + 3 \cdot z$

$b_{21} \Rightarrow 6 = 3 \cdot x + \underline{1} \cdot y + 2 \cdot z$

$b_{31} \Rightarrow 6 = 2 \cdot x + 3 \cdot y + 1 \cdot z$

$\Delta_1 = 6\cdot1\cdot1 + 6\cdot2\cdot2 + 6\cdot3\cdot3 - 6\cdot1\cdot3 - 6\cdot2\cdot1 - 6\cdot3\cdot2 = 84 - 18 - 12 - 24 = 18$

$\Delta = |A| = 18$

Формулы Крамера

пусть

$\Delta = |A| \neq 0.$

тогда

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{18} = \underline{1}$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

Упр (4) проверить $y = 1$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

$z = 1$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

Теорема (в общем виде)

$$\overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \Delta = |A| \neq 0 \Rightarrow$$

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

Δ_i - определитель матрицы, полученной из A заменой i-го столбца на столбец $\overline{b}$