1) Векторное произведение векторов и его свойства:

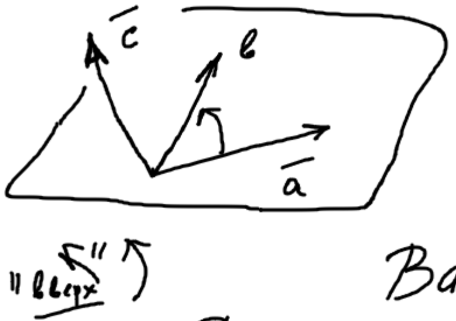
<u>Определение:</u> $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ $(\vec{a} \neq \bar{0},\ \bar{b} \neq \bar{0})$

если:

1). $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$

2). $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$ φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$

3). $\vec{c}$ направлен по правилу "правого винта" от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ вращаем по наименьшему углу



Важнейший результат (доказан на лекции)

Выражение координат вектора $\bar{c} = (c_1\ c_2\ c_3)$ через координаты векторов $\bar{a} = (a_1\ a_2\ a_3)$ и $\bar{b} = (b_1\ b_2\ b_3)$

разложить по первой строке

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_3 & b_3 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$c_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Решим пример

$\bar{a} = (1, 2, 3)$

$\bar{b} = (2, 1, 0)$

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{c_1} ; \underbrace{-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{c_2} ; \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{c_3} \right\} = \{-3 ; +6 ; -3\}$$

Проверим, что

$\bar{c} \perp \bar{a}$.

Для этого найдем скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{c}$:

$$(\bar{a}, \bar{c}) = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-3) = -12 + 12 = 0.$$

Аналогично:

$\bar{c} \perp \bar{b}$: $(\bar{b}, \bar{c}) = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 + 0 \cdot (-3) = -6 + 6 = 0.$

Домашнее задание: проверить, что $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$;

Откуда взять $\sin\varphi$?
Из свойств скалярного произведения мы знаем, что:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \Rightarrow$$

$$\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} \Rightarrow \quad \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \Rightarrow \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

1/ Проделать все вычисления в нашем примере;

2/ проверить, что

$$|\bar{c}| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$$

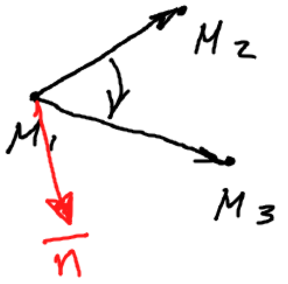
Задание на дом

(2) Векторное произведение векторов и уравнение плоскости.

<u>Задача</u> Записать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки M_1, M_2 M_3 (не лежащие на одной прямой)

$\Updownarrow$

<u>Решение</u> (теоретическое)



$\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ — не параллельны (не коллинеарны)

$\Rightarrow \vec{n} = (A, B, C) = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \neq \bar{0} \Rightarrow$

Уравнение запишем так:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$

Пример: $M_1(1,1,2)$

$M_2(3,5,6)$

$M_3(2;4;3)$

$\overrightarrow{M_1M_2} = (2;4;4)$

$\overrightarrow{M_1M_3} = (1;3;1)$

$$\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \{-8; 2; +2\} \Rightarrow$$

$4\cdot 3 - 5 - 6 - 1 = 0$

$12 - 12 = 0.$

$4x - y - z - 1 = 0$

$\vec{n}_1 = \{4; -1; -1\}$ поделим $\vec{n}$ на (-2)

$$4(x-1) + (-1)(y-1) \cancel{+} 1(z-2) = 0$$

$-4 + 1 + 2 = -\cancel{5} - 1$

$$\boxed{4x - y + z - 1 = 0}$$

③ Угол между плоскостями: $A_1x+B_1y+C_1+D_1=0$
и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$\Rightarrow$ φ угол между $\vec{n_1}(A_1B_1C_1)$ и $\vec{n_2}(A_2B_2C_2)$

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{(\bar{n}_1,\bar{n}_2)}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}$

угол нужно брать острый, т.е. если $\cos\varphi<0$, берем его дополнение до $180°$.

Задача на дом

$x+y-z=3$
$2x-y+z=7$

Найти: 1/ угол между плоскостями

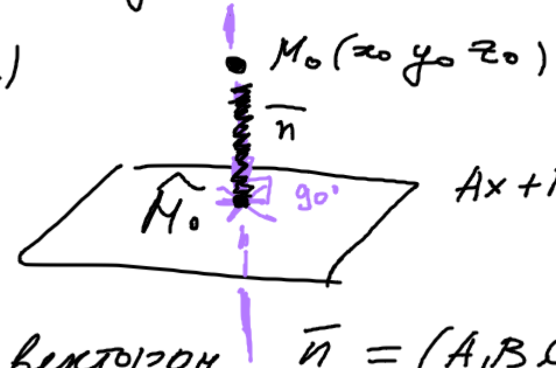
2/ записать уравнение прямой, являющейся линией пересечения этих плоск.

Задача

(4) а) Расстояние от точки $M_0(x_0\ y_0\ z_0)$ до плоскости Π $Ax+By+Cz+D=0$

б) Найти проекцию точки $M_0(x_0\ y_0\ z_0)$ на плоскость Π: $Ax+By+Cz+D=0$.

Решение (теоретическое)



$Ax+By+Cz+D=0$ (*)

б) раньше, чем п. а)

(1) Проводим через точку M_0 прямую с направляющим вектором $\bar n=(A,B,C)$ ← вектор нормали к плоскости.

Эта прямая перпендикулярна плоскости (такое свойство у вектора $\bar n$)

$x=x_0+At$; $y=y_0+Bt$; $z=z_0+Ct$

$M(t)=(x,y,z)$

(2) Находим такое t, чтобы $M(t)\in\Pi$, т.е. подстав. в (*)

$$A(x_0 + At) + B(y_0 + Bt) + C(z_0 + Ct) + D = 0$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = -t(A^2 + B^2 + C^2)$$

$$\Rightarrow \quad t^* = -\frac{(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2} \Rightarrow$$

$$\tilde{M}_0 \begin{cases} \tilde{x} = x_0 + At^* \\ \tilde{y} = y_0 + Bt^* \\ \tilde{z} = z_0 + Ct^* \end{cases}$$ и есть искомая.

Сразу ! решили задачу о расстоянии от точки до плоскости:

$$d = |\overrightarrow{M_0\tilde{M}_0}| = |t^*| \cdot |\vec{n}| = \sqrt{\cancel{A^2+B^2+C^2}} \cdot \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\frac{A^2+B^2+C^2}{\sqrt{\dots}}}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

было на лекции

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Решим $\boxed{\text{пример}}\ \boxed{1}$

1) Найти проекцию точки $M_0(1,1,1)$ на плоскость Π: $x+y+z=3$

$x+y+z-3=0$

$D=-3$

2) Найти расстояние от точки M_0 до плоскости Π.

Решение

$\bar{n}=(A,B,C)=(1,1,1)$ $\quad t^*=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}=-\dfrac{1+1+1-3}{3}=0$

что это значит?

что точка уже лежит на плоскости!!! $\Rightarrow d=0$

она совпадает со своей проекцией!

Пример 2

(поправили пример 1)

$M_0(1,1,1)$ не лежит на плоскости!!!

$x+y+z-6=0$ $\quad \bar{n}=(1,1,1)$

$D=-6$

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A^2+B^2+C^2}=$$

$$=-\frac{1+1+1-6}{3}=1$$

$\widetilde{M}_0$ $\quad \widetilde{x}=1+1\cdot1=2$

$\widetilde{y}=1+1\cdot1=2$

$\widetilde{z}=1+1\cdot1=2$

Проекция точки $M_0(1,1,1)$ на плоскость $x+y+z=6$ – это точка $\widetilde{M}_0(2,2,2)$ $\Rightarrow$ расстояние от точки M_0 до π

$$d=\sqrt{(\widetilde{x}-x_0)^2+(\widetilde{y}-y_0)^2+(\widetilde{z}-z_0)^2}=\sqrt{3} \quad //$$

но мы считаем по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1+1+1-6|}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \quad //$$

(сразу)

Пример 3

$$M_0(\overset{x_0}{1},\overset{y_0}{0},\overset{z_0}{2})$$

$$\Pi \quad 2x+3y-z=7$$

$$2x+3y-z-7=0$$

$$\overline{n}=(A,B,C)=(2,3,-1) \qquad D=-7$$

$$|\overline{n}|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$$

1) Найдем проекцию точки на плоскость

2) Найдем расстояние от точки до плоскости:

Решим п1:

$$t=-\frac{(Ax_0+By_0+Cz_0-D)}{A^2+B^2+C^2}=-\frac{(2\cdot1+3\cdot0-2-7)}{14}=\frac{1}{2}$$

$$\widetilde{M}_0 \quad \widetilde{x}=1+2\cdot 1/2 \quad \widetilde{y}=0+3\cdot 1/2 \quad \widetilde{z}=2-1\cdot 1/2 \qquad \begin{cases}\widetilde{x}=2\\ \widetilde{y}=3/2\\ \widetilde{z}=3/2\end{cases}$$

проекция

Решим п.2):

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

расстояние

$$=\frac{|2\cdot1+3\cdot0-1\cdot2-7|}{\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{7}{2}}$$

п. 5 Смешанное произведение трех векторов: $\bar{a}=(a_1 a_2 a_3)$, $\bar{b}=(b_1 b_2 b_3)$, $\bar{c}=(c_1 c_2 c_3)$

По определению:

$$\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = (\bar{a}, \bar{b}\times\bar{c}) =$$

— скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$

$$\vec{d} = \bar{b}\times\bar{c} = (d_1\ d_2\ d_3)$$

$$= (\bar{a}, \bar{d}) = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$$

$$\vec{d} = \vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$\underset{d_1}{\shortparallel} \qquad \underset{d_2}{\shortparallel} \qquad \underset{d_3}{\shortparallel}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Теорема 3 о выражении смешанного произведения трех векторов через их координаты.

Пример

$$\begin{aligned}\bar a &= (1,0,0) = \bar i\\ \bar b &= (0,1,0) = \bar j\\ \bar c &= (0,0,1) = \bar k\end{aligned} \Rightarrow \langle \bar i, \bar j, \bar k \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \underline{1}$$

объём "единичного куба"!

Теорема 4 Смешанное произведение 3-х векторов $\bar a, \bar b, \bar c$ равно (с точностью до знака!) объёму параллелепипеда, натянутого на эти вектора

Док-во Из определений (следует сразу.) $|\bar b| \times |\bar c| \cdot \sin\varphi = |\bar d|$

$\bar d = \bar b \times \bar c \Rightarrow$ площадь параллелограмма, натянутого на вектора $\bar b$ и $\bar c$, равна $|\bar d|$

$\Rightarrow |\bar a| \cdot \cos\theta = h$ — высота этого параллелепипеда $\Rightarrow \blacktriangle$

Замечание Получили "ориентированный объем";
при перестановке двух векторов
меняется знак.
Подробнее об ориентации тройки векторов поговорим позже.

Полезное следствие Если три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ $\left(\begin{array}{l}\bar{a} \neq \bar{0}, \\ \bar{b} \neq \bar{0}, \\ \bar{c} \neq \bar{0}\end{array}\right)$
принадлежат одной плоскости
(лежат в одной плоскости) (компланарны)
то их смешанное произведение равно нулю.
(Верно и обратное) $\langle \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \rangle = 0 \Rightarrow$ вектора компланарны,
(линейно зависимы)

Замечание. Вспоминаем (или читаем в учебнике) свойство определителя:

"Если строки (столбцы) матрицы A линейно зависимы, то ее определитель равен нулю"

(И наоборот: $A_n \neq 0$; $|A_n| = 0 \Rightarrow$ её строки линейно зависимы)

$\Rightarrow$ Уравнение плоскости через три точки "в одну формулу"

$M_1(x_1 y_1 z_1)$ $\quad$ $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости

$M_2(x_2 y_2 z_2)$ $\Rightarrow$ $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$ $\overline{M_1M}$ – компланарны $\Leftrightarrow$

$M_3(x_3 y_3 z_3)$ $\quad$ $\langle \overline{M_1M_2}; \overline{M_1M_3}; \overline{M_1M} \rangle = 0 \Rightarrow$

$$
\begin{array}{l}
\overline{M_1M} = \\
\overline{M_1M_2} = \\
\overline{M_1M_3} =
\end{array}
\begin{vmatrix}
x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\
x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\
x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z
\end{vmatrix} = 0
$$

и разлагаем по 1-й строке $\Rightarrow \Delta$

<u>Пример</u> (на дом)

$M_1(1,1,1)$
$M_2(2,3,5)$
$M_3(7;4;-3)$

Записать уравнение плоскости