Лекция № 4

Было на прошлой лекции: уравнения прямой (на плоскости и в пространстве) уравнение плоскости в пространстве.

Вектора, операции с вект.

Сейчас повторим скалярное произведение векторов; введем векторное произведение векторов. (обсудим, если успеем, смешанное произведение векторов)

Постараемся перейти к кривым второго порядка.

Закончим с кривыми на след. лекции.

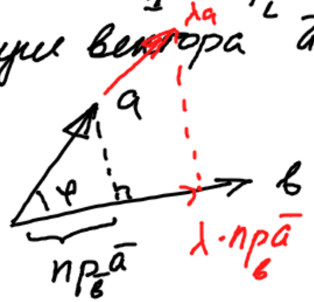
В пятницу, с 17^{00} — доп. занятие в ZOOM.

Вектор $\bar{a} = (a_1\, a_2\, a_3) = a_1 \cdot \bar{i} + a_2 \cdot \bar{j} + a_3 \cdot \bar{k}$ $\quad \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — координатные орты

$a_1 = пр_{\bar{i}} \bar{a}$ — проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{i}$ и т.д.

Проекция вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ обозн. $пр_{b} \bar{a}$

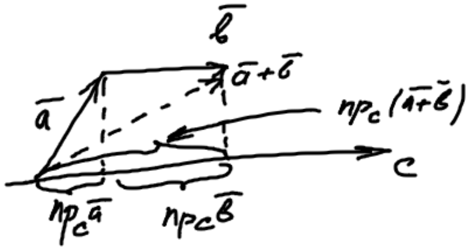
У проекций есть два свойства.



1) $пр_{\bar{b}}(\lambda \bar{a}) = \lambda \cdot пр_{\bar{b}} a$

2) $пр_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = пр_{\bar{c}} \bar{a} + пр_{\bar{c}} \bar{b}$

см. чертеж.



Заметим, что наше "школьное определение" скалярного произведения: $(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cdot\cos\varphi$

можно записать так: $(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{b}|\cdot \text{пр}_{b}\bar{a} = |\bar{a}|\cdot \text{пр}_{a}\bar{b}$))

(очевидное замечание)

$\Longrightarrow$ 1) $(\bar{a},\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a},\bar{b}) = (\lambda\bar{a},\bar{b})$ из 1-го свойства проекций.

Из этого замечание $\lambda\in\mathbb{R}$ д. число

2) $(\overline{a+b},\bar{c}) = |\bar{c}|\cdot \text{пр}_{c}(\bar{a}+\bar{b}) = |\bar{c}|\cdot \text{пр}_{\bar{c}}\bar{a} + |\bar{c}|\,\text{пр}_{\bar{c}}\bar{b} =$

$= (\bar{a},\bar{c}) + (\bar{b},\bar{c})$

3) $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$ – оно важное, но мы его не замечаем, т.к. привыкли.

Для координатных векторов имеют место равенства $\underbrace{(\bar{i},\bar{i}) = 1;\ (\bar{j},\bar{j}) = 1}_{\text{длина} = 1}$; $(\bar{k},\bar{k}) = 1$ и $(\bar{i},\bar{j}) = (\bar{j},\bar{k}) = (\bar{i},\bar{k}) = 0$ (проекции нулевые)

Из этих свойств следует, что если $\bar{a} = (a_1\ a_2\ a_3)$ $\bar{b} = (b_1\ b_2\ b_3)$

то $(\bar{a},\bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (Теорема; была в прошлый раз).

Док-во

$$\bar a = a_1\cdot\bar i + a_2\cdot\bar j + a_3\cdot\bar k \qquad \bar b = b_1\cdot\bar i + b_2\cdot\bar j + b_3\cdot\bar k$$

$$(\bar a,\bar b) = (a_1\bar i + a_2\bar j + a_3\bar k,\ \underbrace{b_1\bar i + b_2\bar j + b_3\bar k}_{(\text{св-во } 2)!}) =$$

используем свойства 1, 2, 3

$$= \underbrace{(a_1\bar i + a_2\bar j + a_3\bar k,\ b_1\bar i)}_{=①} + \underbrace{(a_1\bar i + a_2\bar j + a_3\bar k,\ b_2\bar j)}_{=②} + \underbrace{(a_1\bar i + a_2\bar j + a_3\bar k,\ b_3\bar k)}_{③} =$$

$$= (a_1\bar i, b_1\bar i) + \underbrace{\cancel{(a_2\bar j, b_1\bar i)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{(a_3\bar k, b_1\bar i)}}_{=0} + \underbrace{\cancel{(a_1\bar i, b_2\bar j)}}_{=0} + (a_2\bar j, b_2\bar j) + \underbrace{\cancel{(a_3\bar k, b_2\bar j)}}_{=0} +$$

$$+ \underbrace{\underbrace{\cancel{(a_1\bar i, b_3\bar k)}}_{=0} + \cancel{(a_2\bar j, b_3\bar k)} + (a_3\bar k, b_3\bar k)}_{③} = a_1b_1\underbrace{(\bar i,\bar i)}_{1} + a_2b_2\underbrace{(\bar j,\bar j)}_{1} + a_3b_3\underbrace{(\bar k,\bar k)}_{1} =$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ч.т.д.

Эта формула должна была быть в школе;

Д. задание

Переписать док-во еще раз.

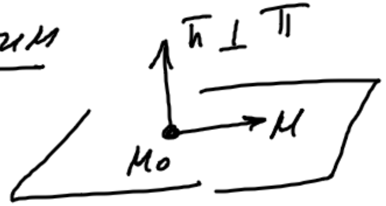
$$\cos\varphi = \frac{(\bar a, \bar b)}{|\bar a||\bar b|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Если угол φ между векторами $\bar a$ и $\bar b$ равен 90° $(\pi/2)$ то $(\bar a, \bar b) = 0$.

$\Rightarrow$ Это даёт нам возможность записать уравнение плоскости при помощи т.н. <u>нормального</u> <u>вектора</u> (<u>вектора</u> <u>нормали</u>) $\bar n = (A, B, C)$

нормаль перпендикулярна плоскости $\Rightarrow \bar n \perp \overrightarrow{M_0 M} \Rightarrow$

<u>Заметим</u>



$$\boxed{(\bar n, \overrightarrow{M_0 M}) = 0}$$

С помощью нашей теоремы получаем уравнение плоскости

$$\parallel$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz \underbrace{- (Ax_0 + By_0 + Cz_0)}_{D} = 0$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ — фикс. точка

$M(x, y, z)$ — переменная точка

$\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Готово.

<u>Задача</u>

Провести через точку $M_0(1, 1, 1)$ плоскость с норм. вектором $\bar n = (2, 5, 7)$

$\longrightarrow$ $2(x-1) + 5(y-1) + 7(z-1) = 0$

Взаимное расположение двух плоскостей:

$$A_1x+B_1y+C_1z=D_1$$
$$A_2x+B_2y+C_2z=D_2$$

1) Если $\lambda=\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ то уравнения пропорциональны, это одна и та же плоскость.

(плоскости совпали) $\overline{n_1}=(A_1\ B_1\ C_1)$ $\overline{n_2}=(A_2\ B_2\ C_2)$ $\Rightarrow \overline{n_1}=\lambda\overline{n_2}$

параллельные вектора нормалей

$$\begin{cases} x=0-t \\ y=1-t \\ z=0+t \end{cases} \quad \boxed{\frac{x-0}{-1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-0}{1}}$$

параметрическое уравнение прямой

2) Когда плоскости параллельны?

$$\lambda=\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$$

вектора нормалей параллельны, но плоскости не совпадают $\Rightarrow$ (нет решений, см. т. Крон.-Кап.)

$$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ 2x+5y+7z=5 \end{cases}$$

3) Если $\overline{n_1} \nparallel \overline{n_2}$ то плоскости пересекутся по прямой; проще всего это понять, решив конкретную задачу при помощи метода Гаусса:

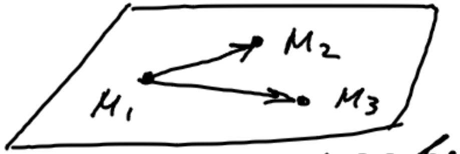
$$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ \quad\ \ y+z=1 \end{cases}$$

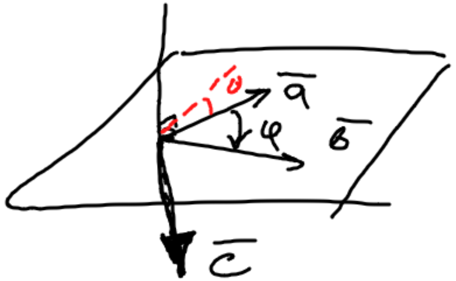
Пусть $z=t$
$\Rightarrow y=1-z=1-t$

$$x=2-2y-3z=\cancel{2}-\cancel{2}+2t-3t=-t$$

Д. задание Самостоятельно или с помощью разобрать возможные случаи взаимного расположения трех плоскостей.

Вопрос Если мы знаем два вектора на плоскости, как получить координаты нормального вектора?





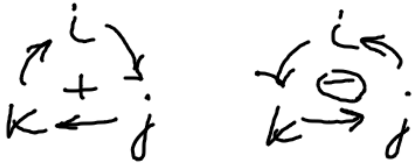
Векторное произведение векторов

Определение $\bar c = \bar a \times \bar b$ если

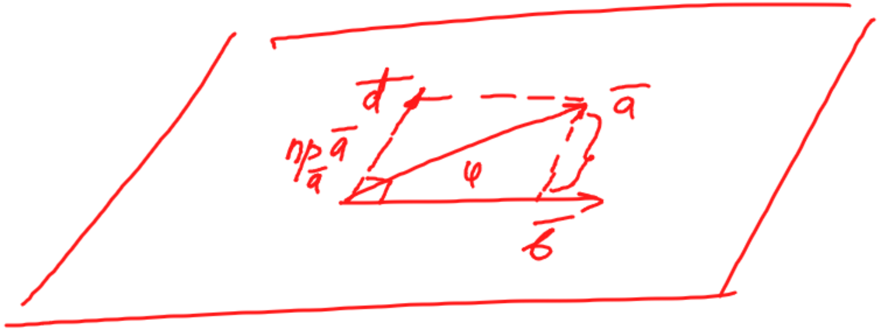
1) $\bar c \perp \bar a$, $\bar c \perp \bar b$
2) $\bar c$ направлен от $\bar a$ к $\bar b$ "по правилу буравчика (правого винта)"
3) $|\bar c| = |\bar a||\bar b| \cdot \sin\varphi$ $= |\bar a| \cdot |\bar b| \cdot \cos\theta$ $\left(\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$

Замечание

1) Если $\bar a \parallel \bar b$, то $\bar a \times \bar b = 0$ $(\sin 0 = 0)$
2) В частности $\bar a \times \bar a = 0$ $\quad \bar i \times \bar i = 0$, $\bar j \times \bar j = 0$, $\bar k \times \bar k = 0$.
3) $\bar a \times \bar b = -\bar b \times \bar a$ ("правило правого винта")
4) $\bar i \times \bar j = \bar k$; $\bar j \times \bar k = \bar i$; $\bar k \times \bar i = \bar j$ см. мнемоническое правило.



Замечание



$\bar d \perp \bar b$

$$|\bar c| = |\bar a|\cdot|\bar b|\cdot\sin\varphi = $$
$$= |\bar b|\cdot пр_{\bar d}\bar a$$

$\Rightarrow$ можем использовать свойства проекций;

Получаем свойства:

1) $\bar a\times(\lambda\bar b)=(\lambda\bar a)\times\bar b=\lambda(\bar a\times\bar b)$ из 1-го свойства проекций.

2) $(\bar a+\bar b)\times\bar c=\bar a\times\bar c+\bar b\times\bar c$ из 2-го св-ва проекций:

Теорема 2 (Выражение векторного произведения через координаты).

$\bar a=(a_1, a_2 a_3)$ $\bar b=(b_1, b_2\ b_3)$ $\Rightarrow$ $\bar a\times\bar b=($ Найдем $)$

$$\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k} \quad \Rightarrow \quad (a_1\overline{i} + \underbrace{a_2\overline{j} + a_3\overline{k}}_{\text{распр.}}) \times (\underbrace{b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}}_{\text{фикс.}}) =$$

$$b = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3 k \qquad \overline{a}\times\overline{b} \;/\!/$$

$$= a_1\overline{i}\times(b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}) + a_2\overline{j}\times(b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}) + a_3\overline{k}\times(b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}) =$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{\overline{i}\times\overline{i}}_{=0} + a_1 b_2 \overbrace{\overline{i}\times\overline{j}}^{=\overline{k}} + a_1 b_3 \overbrace{\overline{i}\times\overline{k}}^{-\overline{j}} + a_2 b_1 \overbrace{\overline{j}\times\overline{i}}^{-\overline{k}} + a_2 b_2 \underbrace{\overline{j}\times\overline{j}}_{=0} + a_2 b_3 \overbrace{\overline{j}\times\overline{k}}^{\overline{i}} +$$

$$+ a_3 b_1 \underbrace{\overline{k}\times\overline{i}}_{=\overline{j}} + a_3 b_2 \underbrace{\overline{k}\times\overline{j}}_{-\overline{i}} + a_3 b_3 \underbrace{\overline{k}\times\overline{k}}_{=0} =$$

Δ.

$$= a_1 b_2 \overline{k} - a_1 b_3 \overline{j} - a_2 b_1 \overline{k} + a_2 b_3 \overline{i} + a_3 b_1 \overline{j} - a_3 b_2 \overline{i} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\overline{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\overline{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\overline{k} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Мнемоническое правило

$\bar{a} = (a_1\ a_2\ a_3)$

$\bar{b} = (b_1\ b_2\ b_3)$

и разлагаем по 1-й строке

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

ч.т.д.

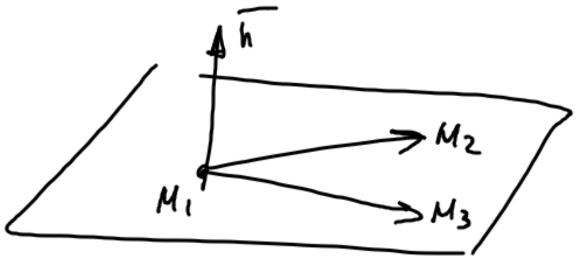
$\bar{a} = (1, 2, 3)$

$\bar{b} = (3, 2, 1)$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\bar{i} + 8\bar{j} - 4\bar{k} = (-4; 8; -4)$$

Замечание



$\bar n = (A, B, C)$

$\bar n = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$

Можно взять такой.

Смешанное произведение трех векторов:

$$\langle \bar a, \bar b, \bar c \rangle \overset{det}{=} (\bar a, \bar b \times \bar c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Теорема 3

Замечание

Смешанное произведение (по модулю) равно объему параллелепипеда, натянутого на три вектора $(\bar a, \bar b, \bar c)$

Докажем теорему 3

$\overline{d} = \overline{b} \times \overline{c} = (d_1\ d_2\ d_3)$

$d_1 = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad d_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \quad d_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ по Th. 2.

$\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \rangle = (\overline{a}, \overline{d}) = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 =$

$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \leftarrow$ разложение определителя по 1-й строке.

Если три вектора лежат в одной плоскости (компланарны) то $\langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \rangle = 0 \Rightarrow$

Способ быстро записать уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$M_1 (x_1, y_1, z_1)$

$M_2 (x_2\ y_2\ z_2)$ $\quad \overline{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ – не коллинеарны

$M_3 (x_3\ y_3\ z_3)$ $\quad \overline{M_1 M_3} = (x_3 - x_1\ \ y_3 - y_1\ \ z_3 - z_1)$

M — переменная точка пл-ти

вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ — компланарны $\Rightarrow$

$$\langle \overline{M_1M}; \overline{M_1M_2}; \overline{M_1M_3} \rangle = 0 = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

"Раскрыть" по первой строке

$\Rightarrow$ получится уравнение плоскости.