Семинар 8:
30.10.2021

Предел функции.
Решение задач.

Было ранее: а) Предел последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ т.что $\forall n>N_0$ $|x_n-a|<\varepsilon$

т.е. $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$

$x_n\in(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$

б) б.м.п α_n: $\alpha_n\to 0$, $n\to\infty$. Лемма $x_n=a+\alpha_n \Leftrightarrow \lim x_n = a$

в) теорема о свойствах предела последовательностей.

(ограниченность; единственность предела; сохранение знака в неравенствах $x_n\le y_n \Rightarrow \lim x_n\le\lim y_n$ (если существуют)

арифметические свойства,

теорема "о зажатой последовательности"

("оценочный признак существования предела"

$\forall n$: $x_n\le y_n\le z_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$; свойства б.м.п-й;

связь бесконечно малых и бесконечно больших $\frac{1}{\text{б.м.п}} = \text{б.б.п}$ "$\frac{1}{0}=\infty$" $\frac{1}{\text{б.б.п}} = \text{б.м.п}$. "$\frac{1}{\infty}=0$"

Теперь нужно дать определения 1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ и 2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

и обсудить их свойства;

а также научиться решать задачи;

(1) Определение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ очень похоже на определение предела $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n)$
(и свойства в большинстве своём сохраняются) (см. учебник А.И. Рыбникова)

Опр. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists K(\varepsilon) > 0$ т. что $\forall x > K(\varepsilon) \ |f(x) - A| < \varepsilon$

или $f(x) \in (A - \varepsilon ; A + \varepsilon)$

Примеры

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 + 3x + 7}{3x^2 - 5x + 4} \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \left| \begin{matrix} \text{делим на } x^2 \\ \text{и числ.-ль,} \\ \text{и знам.-ль} \end{matrix} \right| = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + \frac{3}{x} + 7/x^2}{3 - 5/x + 4/x^2} = \dfrac{2}{3}$

потому что (как и ранее)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 ; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{7}{x^2} = 0 ;$ и т.д.

2) (б/д)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{\beta}{x}\right)^x = e^{\beta}$

② Новое определение — предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$ (этого не было у последовательностей)

1 способ дать такое определение: с помощью т.н. последовательностей Гейне

Опр-е 1 $\displaystyle \underset{n\to+\infty}{x_n \to x_0}$; $\displaystyle \underset{n\neq m}{x_n \neq x_m}$ $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ — посл-ть Гейне.

Опр-е 2 Если $\forall$ посл-ти Гейне $\{x_n\}$ т.что $\displaystyle x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ $\displaystyle f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} A$

то говорят, что A — предел функции $f(x)$ (в точке x_0) при $x\to x_0$ по Гейне

$$\lim_{x\to x_0}{}^{(\Gamma)} f(x) = A.$$

2 способ дать определение предела функции $f(x)$ в точке x_0 — по Коши

Опр-е $\displaystyle \lim_{x\to x_0} f(x) = A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta(\varepsilon, f, x_0)>0$ т.что

$\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) = (x_0-\delta; x_0) \cup (x_0; x_0+\delta)$

$f(x) \in U_\varepsilon(A) = (A-\varepsilon; A+\varepsilon)$

или так: $\forall x$, удовл. нер-ву $0<|x-x_0|<\delta$ следует, что $|f(x)-A|<\varepsilon$

Замечание: Теоретическая часть — на лекции;

Пример $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$ $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ см. в учебнике.

По определению **не** придется его находить.

Как это используется в физике?

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Замечание Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны; тем самым вся (почти) теория пределов последовательностей переносится на пределы функций.

Замечание (забегая вперед) Функция $f(x)$ называется непрерывной в т. x_0, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Все элементарные функции непрерывны во всех точках, в которых определены.

То есть:

Сохранятся:

1) б.м.ф и б.б.ф; их связь;

2) единственность предела

3). (локальная) ограниченность

4). сохранение знака в нер-вах $f(x) \le g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

(если сущ.)

5). Теорема "о зажатой функции"

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \le g(x) \le h(x) \text{ и} \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A \end{array}\right/ \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$$

6). "арифметика пределов" сохранится.

7. Появится новая теорема о пределе композиции функций. (в книге их 2!)

<u>Замечание</u> При решении задач на предел функции в точке "мешают" неопределенности тех же типов, что и раньше; если неопределенностей нет, то просто (как правило) <u>подставляем</u> x_0 в непрерывную ф-цию

__Пример__

1) $\left(\frac{0}{0}\right)$ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}$

подставили $x=1$.

нет неопределенности

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=$ домножать на сопр. долго и сложно; делаем замену $y=\sqrt[12]{x}$ $\quad \sqrt[4]{x}=y^3 \quad \sqrt[3]{x}=y^4$

$x^{1/12}$ $\quad (x^{1/12})^3=x^{3/12}=x^{1/4}=\sqrt[4]{x}$

$=\lim\limits_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^4-1}=\lim\limits_{y\to 1}\frac{\cancel{(y-1)}(y^2+y+1)}{\cancel{(y-1)}(y+1)(y^2+1)}$

$=\lim\limits_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{(y+1)\cdot(y^2+1)}=\frac{3}{4}$

__Утв__ $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{m}{n}$

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$ (будет доказан на лекции из теоремы о пределе "зажатой" функции)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{(5x)}\cdot 5=5\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y}=; \quad y=5x$$

$$=5\cdot 1=5.$$

Следствие

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(nx)}{x}=n; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}=\frac{\alpha}{\beta};$$

Теорема о композиции пределов.

Задача (1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{y\to 0}\frac{2(\sin(y))^2}{4\cdot y^2}=\frac{1}{2}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$1-\cos x=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ по формулам "двойного угла" $\qquad y=\frac{x}{2}\Rightarrow x=2y\Rightarrow x^2=4y^2$

(2-й способ) ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ — мы уже этим пользовались.

Более того, $\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$)

Следствие $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$

Док-во:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)=1 \blacktriangle$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{x}=\alpha}$$

Более того, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\operatorname{tg}\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$

Разные виды "Второго замечательного предела"

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\in\mathbb{N}}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e \quad \left(\text{на лекции было}\right) \Rightarrow \lim_{\substack{y\to+\infty\\ y\in\mathbb{R}}}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e;$$

Обозначим $\alpha = \frac{1}{y} \to 0$ при $y\to+\infty$ $\Rightarrow$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \Rightarrow$$

возьмём от обеих частей $\ln$

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$$

Использовано свойство логарифма:

$$\ln\left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right) = \frac{1}{\alpha}\cdot\ln(1+\alpha)$$

Обозначим $h = \ln(1+\alpha) \underset{\alpha\to 0}{\to} 0$

$\Rightarrow 1+\alpha = e^h \Rightarrow \alpha = e^h - 1$

Получим

$$\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1} = 1$$

или, перевернём:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

$$= 3 \cdot 1 = 3$$

Решим пример N 10

$$\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\left(\frac{3}{y}+1\right)\cdot\ln(1+y)\right) = \lim_{y\to 0} 3\cdot\frac{\ln(1+y)}{y} +$$

$$y = \frac{3}{x} \to 0 \Rightarrow x = \frac{3}{y}$$

$$+ \underbrace{\lim_{y\to 0}\ln(1+y)}_{=0} = 3_{\Delta}.$$

по свойствам "2-го з.п."

переписать самим, повторить!

Неопределенность типа

$$1^{\infty} \Rightarrow \text{свести } \left((1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{(m)}, \quad \alpha \to 0$$

рецепт

Решим пример N 12:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} =$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = (1-\sin^2 x)^{1/2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left((1-\sin^2 x)^{\frac{1}{-\sin^2 x}}\right)^{\frac{-\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{2}} = e^{-\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\alpha \qquad 1/\alpha$$

Замечание

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1 \quad \text{а чему равен} \quad \lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}\ ?$$

$$2=e^{\ln 2} \Rightarrow 2^h=\left(e^{\ln 2}\right)^h=e^{h\ln 2} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\ ?$$

Поэтому

$$\lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{h\ln 2}-1}{\underbrace{h\cdot\ln 2}_{y}}\cdot\ln 2=\ln 2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}$$

$$=\ln 2$$

Аналогично:

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=\ln a$$

Д. задание: А.К.Р. стр 87; 1 – 16;

На повторение: стр 44 1 – 9