Окончание: метод Гаусса.

$$\cdot 2 \quad \begin{cases} x+2y-z=7 \\ 2x-3y+z=3 \\ 4x+y-z=16 \end{cases} \quad \cdot 4 \quad 15 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-z=7 \\ -7y+3z=-11 \\ -7y+3z=-12 \end{cases} \quad -11 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{cc} A & \bar{b} \end{array}$$

$$\begin{cases} x+2y-z=7 \\ -7y+3z=-11 \\ 0=-1 \end{cases} \quad 0$$

противоречие; нет решений.

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

↑ матр. сист.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \operatorname{rang} A = 2$$

$$(A|\bar{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right)$$

$$\operatorname{rang}(A|\bar{b}) = 3$$

Говорят, если решение есть = "система совместна"
если решение единственно = "определенная система"
если решений бесконечно много = "неопределенная система"
если решений нет = "несовместная система"

Если в системе уравнений больше, чем неизвестных говорят "переопределенная система".

Упр
$|A|=0$

$(A|\bar{b})$ — расшир. матр. сист.

Опр.

$A\overline{x} = \overline{b}$ (*)

A - матрица системы $\overline{b}$ - столбец свободных членов

$(A|\overline{b})$ - расширенная матрица системы.

$\boxed{\text{Теорема}}$ (Кронеккера - Капелли)

Система лин. ур-ий (*) совместна (имеет решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу матрицы $(A|b)$

Определение Ранг матрицы A - это число линейно независимых строк (столбцов) матрицы A.

$rang\ A$

Замечание Это просто количество оставшихся уравнений в системе после применения метода Гаусса. (после приведения к ступенчатому виду)

__Замечание__ Если система совместна и $\operatorname{rang} A$ = числу переменных, то решение единственно.

Если $\operatorname{rang} A = k$, а неизвестных $x_1 \dots x_n$, то $n-k$ неизвестных будут "свободными переменными", а остальные k штук будут через них выражаться. (решений будет бесконечно много).

В качестве д/з:

1. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

__Подсказка__ $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (1; 2; -1; 2)$

2. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Элементы аналитической геометрии.

Нам нужна геометр. интерпретация систем 2×2 и 3×3

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

две прямые на плоскости

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=D_1 \\ A_2x+B_2y+C_2z=D_2 \\ A_3x+B_3y+C_3z=D_3 \end{cases}$$

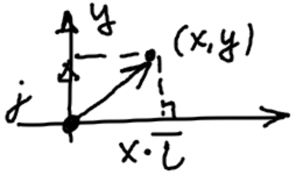
три (и надо 3) плоскости в пространстве.

Считаем, что было; системы координат, векторы, скалярное произведение; "правило буравчика", объем параллел... липеда; уравнение прямой $y=kx+b$

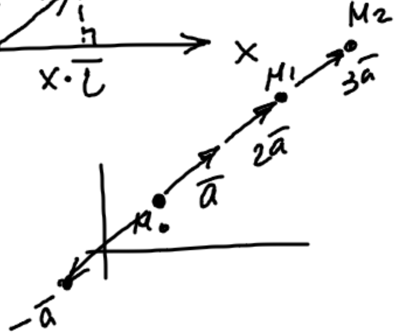
① Сист. координат на плоскости

$M \Rightarrow \bar r = \overline{OM} = x\cdot\vec i + y\cdot\vec j \Rightarrow M \leftrightarrow (x,y)$ взаимно-однозначное соответствие.

$|\bar i| = |\bar j| = 1$

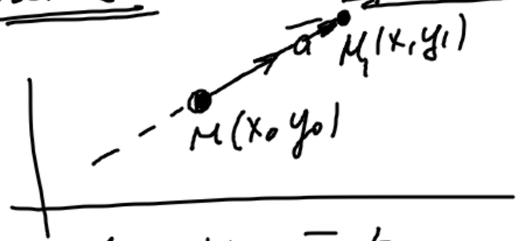


$\bar i \perp \bar j$ угол 90°



Прямая на плоскости

$\bar a$ — направляющий вектор прямой



$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec a \Rightarrow \exists$ число t

$\overrightarrow{M_0M} = \vec a\cdot t$

$M = M_0 + \bar a\cdot t$

параметрическое уравнение прямой

$M=(x,y)$ $\quad \vec a=(a_1\ a_2)$

$M_0=(x_0\ y_0)$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$$

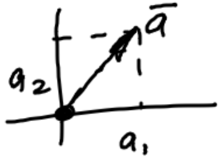
$$\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\end{cases}$$

$t\in\mathbb{R}$ любое действ. число

1 параметрические уравнения прямой

$$t=\boxed{\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}}$$

уравнение прямой через координаты направляющего вектора



$\mathbb{R}^2$ плоскость

Координаты вектора – это "из конца вычесть начало".

$\mathbb{R}^3$ пространство

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

$M_0=(x_0\ y_0\ z_0)$ $\quad \vec a=(a_1,a_2,a_3)$

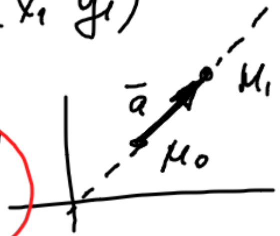
$M=(x,y,z)$

$$x=x_0+a_1t$$
$$y=y_0+a_2t$$
$$z=z_0+a_3t$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки (на плоскости) 2

$M_0(x_0\ y_0)\ M_1(x_1\ y_1)$

$$\vec a=\overline{M_0M_1}=(\underbrace{x_1-x_0}_{a_1};\ \underbrace{y_1-y_0}_{a_2})$$



$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}$$

Должно было быть в школе

в $\mathbb{R}^3$ $\quad \frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$

Пример

$M_0(1,3)$ $M_1(2,6)$

$x_0\ y_0$ $x_1\ y_1$

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0} \Rightarrow \frac{x-1}{2-1}=\frac{y-3}{6-3} \Rightarrow y=kx+b$$

или $y=y_0$ (если $a_2=0$)

или $x=x_0$ (если $a_1=0$)

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{3}$$

$$3x-3=y-3$$

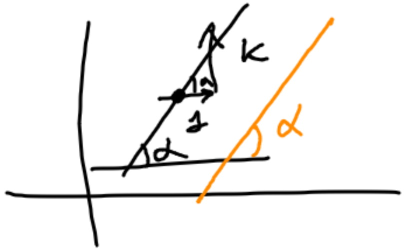
$$\boxed{3x=y}$$

школьное уравнение

Одно лишь условие

$\vec{a}=(a_1;a_2)$ $a_1^2+a_2^2\neq 0$

$y=kx+b$ "уравнение с угловым коэффициентом"



$k=\operatorname{tg}\alpha$

В школе еще таких уравнений обсуждались:

① условие параллельности двух прямых

l_1 $y=k_1x+b_1$ $k_1=k_2$

l_2 $y=k_2x+b_2$ прямые параллельны

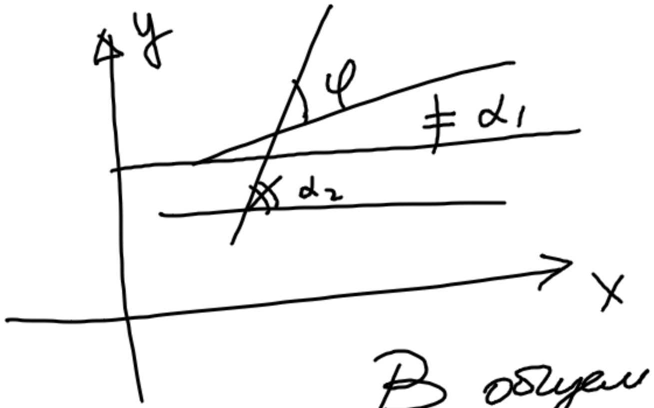
($b_1=b_2 \Rightarrow$ совпали)

② Условие перпендикулярности

$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1k_2=-1$

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta}$$

Угол между прямыми



$$\varphi=\alpha_2-\alpha_1$$

$$tg\varphi=\frac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_2\, tg\alpha_1}=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$$

$$\varphi=arctg\left(\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right)$$

$\varphi=90^\circ \Leftrightarrow$

$1+k_2k_1=0$

$k_1k_2=-1.$

условие перпендикулярности

В общем виде

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}\Rightarrow a_2(x-x_0)=a_1(y-y_0)$$

$\sim Ax+By=C$

общее уравнение прямой на плоскости OXY

(3)

горизонт.

$A=0\Rightarrow y=const$

$B=0\Rightarrow x=const$

вертикальная прямая.

Взаимное расположение двух прямых на плоскости на основе общего уравнения

$$\begin{cases} A_1x+B_1y=C_1 \\ A_2x+B_2y=C_2 \end{cases}$$

① $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ уравнение пропорциональны

$\exists\,\lambda\neq 0$

$A_2x+B_2y=C_2 \Leftrightarrow \lambda(A_1x+B_1y=C_1)$

одно уравнение, с точностью до пропорциональности

$\Rightarrow$ прямые совпали:

Пример $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$

$$\left(\det A = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2-A_2B_1=0\right)$$

---

② $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$ прямые параллельны;

$\begin{cases} x+2y=3 \quad \cdot 2 \\ 2x+4y=7 \end{cases} \ominus \qquad \begin{cases} x+2y=3 \\ 0=1 \end{cases}$

Нет решений.

ед. решение

③ $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$ $\quad A_1B_2-A_2B_1\neq 0 \Rightarrow$

пересекаются в одной точке. $\quad \det A\neq 0 \Rightarrow$

Продвинемся в пространство:

$M_0 = (1, 2, 3)$

$M_1 = (2, 4, 6)$

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{4-2} = \frac{z-3}{6-3}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

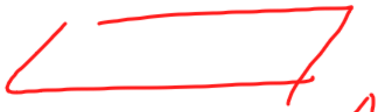
$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} \\ \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2 = y-2 \\ 3y-6 = 2z-6. \end{cases}$$

Два уравнения 3 неизв. $\Rightarrow$ реш. б. много это и есть наша прямая.

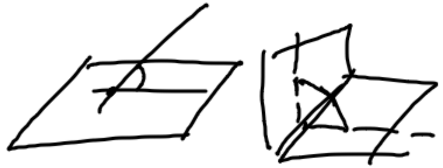
$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$$

Задача

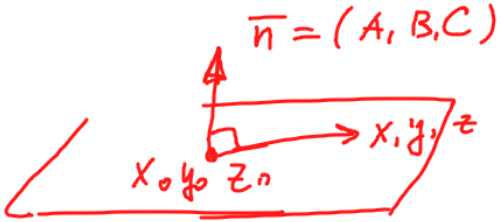
Нужно понять, что $Ax+By+Cz=D$ — это уравнение плоскости в пространстве.



$Ax+By+Cz+D=0$



Уравнение плоскости в пространстве



$\overrightarrow{(A, B, C)} \perp (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

с помощью скалярного произведения:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz = D$$

$$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

$(\bar a, \bar b) = 0 \Longleftrightarrow (\bar a, \bar b) = 0$

$\bar a \neq \bar 0$

$\bar b \neq \bar 0$

Было в школе

$\bar a = (a_1\ a_2\ a_3)$ $\bar b = (b_1\ b_2\ b_3)$

$(\bar a, \bar b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

иногда пишут

Уравнение плоскости в пространстве $\longrightarrow$ $Ax + By + Cz + \hat D = 0$

$$\hat D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$$