Лекция 7 (20.10.2021).

Было: Определение б.м.п $\alpha_n \to 0$ $n\to\infty$
Свойства б.м.п.

Определение $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ т.что $\forall n>N_0$ $|x_n-a|<\varepsilon$ (*)

Лемма (**)

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Longleftrightarrow x_n = a+\alpha_n$, α_n – б.м.п.

Док-во $(\Rightarrow)$ пишем определение (*) $\forall\varepsilon>0\ \exists N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ т.что $\forall n>N_0$ $|x_n-a|<\varepsilon$
Обозначим $\alpha_n = x_n-a$ и видим, что $|\alpha_n|<\varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$
в силу определения прошлой лекции.

Очевидное замечание, но мы его доказали

$(\Leftarrow)$ Пусть $x_n = a+\alpha_n$ α_n – б.м.п. $(n\to+\infty)$ то есть $\forall\varepsilon>0\ \exists N_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ т.что $\forall n>N_0$ $|\alpha_n|<\varepsilon$ то
$\alpha_n = x_n-a$ и видим $\forall n>N_0$ $|x_n-a|<\varepsilon$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Теорема Всякая последовательность, имеющая предел, явл. ограниченной.

Док-во Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$; Докажем, что $\exists C > 0$ т.что $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \le C$.

Запишем определение предела для $\varepsilon = 1 \Rightarrow$
$\exists N_0 \in \mathbb{N}$ т.что $\forall n > N_0$ $|x_n - a| < 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -1 < x_n - a < 1 \Leftrightarrow a-1 < x_n < a+1$

$-|a| - 1 \le a - 1 < x_n < a+1 \le |a|+1 \Rightarrow |x_n| \le |a|+1$ при $n > N_0$

Выберем $C = \max\{|x_1|; |x_2|; \dots; |x_{N_0}|; |a|+1\}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \le C$ нашли такое C; теорема доказана.

Замечание

$x_n = \dfrac{1000000}{n} \to 0$

но не все $x_n < 1$!

Замечание: Приведем пример последовательности, которая <ins>ограниченная</ins>, но предела не имеет: $x_n = (-1)^n$

Д.з.

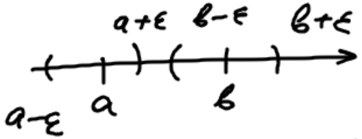
Доказать, что <ins>предела</ins> нет, можно по опр.

Теорема Если у последовательности x_n есть предел, то он – единственный.

То есть Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ $\Rightarrow$ тогда $a = b$

Док-во: От противного.

Допустим, что $b > a$



Возьмем $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3} > 0 \Rightarrow (a-\varepsilon; a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon; b+\varepsilon) = \varnothing$

По определению $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow$ для нашего $\varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ т.что $\forall n > N_1$ $x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ //

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow$ для нашего $\varepsilon > 0$ $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ т.что $\forall n > N_2$ $x_n \in (b-\varepsilon; b+\varepsilon)$ //

Но тогда $\forall n > N_0 = \max(N_1, N_2) \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon; b+\varepsilon) = \varnothing \Rightarrow$ противоречие ($b > a$ не м. быть)

Аналогично $a > b$ быть не может

$\Rightarrow a = b$

Замечание

Из доказанной теоремы следует, что <ins>не</ins> ограниченная последовательность <ins>не</ins> имеет предела.

Итак, предел единственный $\quad x_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} = 2 + \alpha_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$ и только 2

$\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$

Замечание: **Теорема** (предельный переход сохраняет знак в неравенствах) (*)

Пусть $x_n \le y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a; \quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \quad \Rightarrow$ **Тогда** $a \le b$

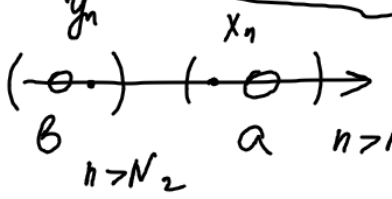
Упражнение

Доказать самостоятельно.

Замечание

$$x_n = \frac{1}{n} \quad y_n = \frac{2}{n} \qquad x_n < y_n$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim \frac{2}{n} = 0$ ((*) — не меняет на противоположный)



$\Rightarrow \forall n > \max(N_1, N_2)$

$x_n > y_n \Rightarrow$ ⫫.

Указание

Теорема (арифметика предела)

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ тогда

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = a+b$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n\cdot y_n) = a\cdot b$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ (при доп. условиях $y_n\neq 0$; $b\neq 0$)

Док-во: Используем Лемму$^{(**)}$

$\lim x_n = a \Rightarrow x_n = a+\alpha_n$ α_n – б.м.п.

$\lim y_n = b \Rightarrow y_n = a+\beta_n$ β_n – б.м.п.

① $x_n+y_n = a+\alpha_n+b+\beta_n = (a+b)+\gamma_n \Longrightarrow$ Снова по Лемме** $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = a+b$

$\gamma_n = \alpha_n+\beta_n$ – снова б.м.п. (по теореме о б.м.п).

доказано.

② $x_n\cdot y_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab+\underbrace{\alpha_n b}_{\text{б.м.п.}}+\underbrace{a\cdot\beta_n}_{\text{б.м.п.}}+\underbrace{\alpha_n\beta_n}_{\text{б.м.п.}}$! $= ab+\delta_n$ $\Rightarrow$ по лемме$^{(**)}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = ab$

δ_n – б.м.п.

③. Доказать самим или прочесть.

Задача

1. $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+5}{7n^2-4n+6} = \left\| \begin{array}{c} \text{Неопределенность} \\ \text{вида } \frac{\infty}{\infty} \\ \text{при } n\to\infty \end{array} \right\| = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{7-\frac{4}{n}+\frac{6}{n^2}} = \frac{2}{7}$$

$\frac{3}{n}\to 0$, $\frac{5}{n^2}\to 0$, $\frac{4}{n}\to 0$, $\frac{6}{n^2}\to 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n^2+5} = 0 \left(= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+5/n^2} = \frac{0}{3} = 0 \right)$$

Замечание "Очевидно", что, если $\alpha_n \to 0$ то $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \to \infty$. Однако 1) нужно дать определение $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \infty$ 2) доказать теорему.

Определение Последовательность β_n называется бесконечно большой, если (б.б.п.)

$\forall K>0 \ \exists N_0(K) \in \mathbb{N}$ т.что $\forall n > N_0$

$|\beta_n| > K$

бесконечно большая последов-ть

$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \infty$$

Теорема: Если α_n – б.м.п. ($\alpha_n \neq 0$) то $\beta_n = \frac{1}{\alpha_n}$ – б.б.п.

(И наоборот) (Если γ_n – б.б.п; $\gamma_n \neq 0 \ \forall n$, то $\delta_n = \frac{1}{\gamma_n}$ – б.м.п.)

Теорема (оценочный признак существования предела)

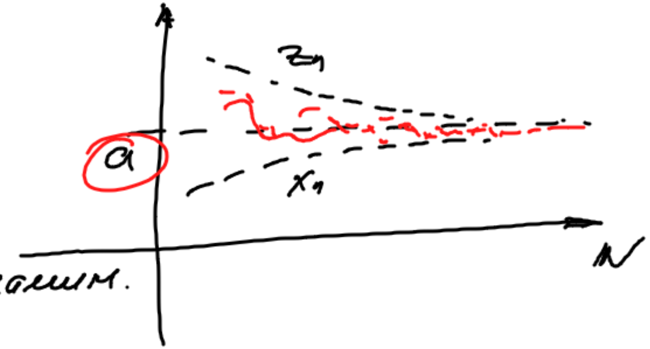
Пусть $x_n \le y_n \le z_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (иногда пишут $\forall n > N_0$)

и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Док-во

Попробовать самим.



Монотонная последовательность

Определение Последовательность x_n называется монотонно возрастающей, если $\forall n \in \mathbb{N} \; x_{n+1} \ge x_n$ (строго монотонно возрастающей — если строгое неравенство)

Упражнение Записать определение монотонно убывающей последовательности.

Наша цель $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и про нее доказать
1) $x_n \le 3$ V
2) $x_n \le x_{n+1}$ VV

Хотелось бы иметь $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

Нам нужно дополнительное утверждение про действительные числа. Свойство (которым не обладают рациональные числа) (полноты) $\Rightarrow$

$\rightarrow$ (в виде аксиомы полноты Вейерштрасса)

Всякое непустое ограниченное сверху подмножество A множества действ. чисел $\mathbb{R}$ имеет точную верхнюю границу (грань). $\sup A$

Пример $A = (0;1)$ $1 = \sup A$ — наименьшая из всех верхних границ.

$x \in (0,1) \Rightarrow$ $x < 5$ 5 — верхняя граница

$x < 4$ 4 — верхняя граница

$x < 3$ . . . .

1 — неуменьшаемая верхняя граница.