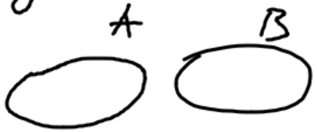
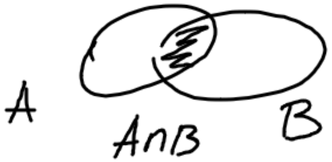
Лекция №6 Введение в анализ.
Теория пределов.

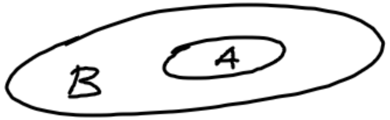


Множества $A, B, \ldots$

$A \cap B$ – пересечение множеств

$A \subset B$ – подмножество (*)





$A \cup B$ – объединение множеств A и B

$\varnothing$ – пустое множество;

$x \in A$ = "x – элемент множества A"

Кванторы: $\forall$ = "любой, всякий"

$\exists$ = "существует"

$(*)$ $A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

($A \subset B$ в том и только в том случае, если для всякого элемента x из A верно, что $x \in B$)

Мы считаем, что для всякого элемента x и некоторого (любого) множества A верно одно из двух утверждений
1) или $x \in A$
2) или $x \notin A$.

Последнее обстоятельство описывают так: $x \in \overline{A}$ – дополнению A (до некоторого универсального множества E, в котором вообще говоря, есть все x)

Опр $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow x \notin A$

Теорема ("правила де Моргана") (давно известные в логике)

(б/д)

1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
3) $\overline{\overline{A}} = A$
4) $A \cap \overline{A} = \varnothing$
5) $A \cup \overline{A} = E$ (унив. мн-во)

Замечание

Т.н. "наивная теория множеств" разработана Кантором. (См. энциклопедии).

Для нас важно $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ← действительные числа.

натур. числа, целые числа, рациональные числа

Опр.:
Говорят, что $f: A \to B$ — функция из множества A в множество B,
если $\forall y \in B \ \exists x \in A$ т.что $y = f(x)$

Комментарий При наличии интереса можно скинуть по почте простые материалы по теории множеств и математической логике.

Просто для сведения

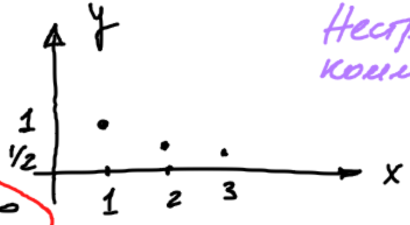
$\mathbb{Z}$ - кольцо $\subset \mathbb{Q}$ - поле $\subset \mathbb{R}$
(хорошо с $+$) (все хорошо с "$+$" и с "$\cdot$") "полное" (об этом будет подробно)

Замечание Если $A, B \subset \mathbb{R}$ то говорят о "числовой функции"

Замечание
Если $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
то f называется "числовой последовательностью".

Пример $f(n) = \frac{1}{n}$

Маленькая сверхзадача
Дать строгое определение
$\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to \infty$



Нестрогий комментарий.
Самый "простой" вариант функции

Определение Последовательность $f(n)$ называется ограниченной, если $\exists C>0$ т. что $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f(n)| \le C$

Примеры 1) $f_n \equiv f(n) = \frac{2}{n}$ $|f_n| \le 2$

2) $g_n = \sin(n)$ $|g_n| \le 1$

Дадим определение бесконечно малой последовательности

Если какое бы (малое) число $\varepsilon > 0$ ни взять, найдется такой номер $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

что при $n > N_0$ $|x_n| < \varepsilon$

то говорят, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$x_n = \frac{1}{n}$

$\varepsilon = 0{,}1 \Rightarrow$

$N_0 = 10$

$\varepsilon = 0{,}01 \Rightarrow$

$N_0 = 100$

$\varepsilon = 0{,}001$

$N_0 = 1000$

Определение бесконечно малой последовательности.

$\varepsilon \to \frac{1}{n} < \varepsilon \to n > \frac{1}{\varepsilon}$ N_0 – натуральное число, $\ge \frac{1}{\varepsilon}$

$\varepsilon = 0{,}1 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} = 10$

$\varepsilon = 0{,}01 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} = 100$

$\Rightarrow$ Например $N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ (мн-во нат. чисел)

целая часть

Определение $\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ т.что $\forall n > N_0 \ |x_n| < \varepsilon$.

(x_n - бесконечно малая последовательность)

Примеры

1) $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

2) $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2} \Rightarrow N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$

и т.д.

Замечание (Упражнение) Всякая бесконечно малая последовательность будет ограниченной.

Теорема 1 1) Сумма двух бесконечно малых последовательностей - снова бесконечно малая последовательность.

2) Произведение бесконечно малой последов. на ограниченную посл-ть - снова бесконечно малая посл-ть.

Док-во: Докажем 1 пункт. Что нужно доказать? $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$

Что дано? $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$

Замечание (Лемма)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff x_n = a + \alpha_n;\ \alpha_n - \text{б.м.п.}$$

Определение

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$$
$$\text{т.что } \forall n > N_0\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Наша цель: Распространить арифметику (и другие действия) с конечных величин на "пределы" (на величины, имеющие предел)

К примеру,

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 2$ то $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 5$ $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 6$ и т.д.

Начинаем с теорем о свойствах б.м.п.

Док-во Th 1

п 1) Записываем определение того, что нужно доказать:

$\lim\limits_{n\to\infty} |x_n + y_n| = 0 \iff \underbrace{\forall \varepsilon > 0}_{\text{зафиксируем}}$ $\underbrace{\exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}}_{\text{его нужно найти}}$ т. что $|x_n + y_n| < \varepsilon$ $\forall n > N_0$.

Из того, что нам дано для выбранного $\varepsilon/2$

$\exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ т. что $\underline{\forall n > N_1}$ $|x_n| < \varepsilon/2$

$\exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ т. что $\underline{\forall n > N_2}$ $|y_n| < \varepsilon/2$

Возьмем $N_0 = \max(N_1, N_2)$ тогда $\forall n > N_0 \Rightarrow \begin{matrix} n > N_1 \\ n > N_2 \end{matrix}$

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ч. т. д.

2) Самостоятельно (или на консультации).