Было в прошлый раз

Определители $2\times 2$ и $3\times 3$

и теорема о разложении определителя по строке/столбцу.

$$|A| = a_{11}\cdot(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + \dots + a_{1n}(-1)^{1+n}M_{1n}$$

$$= a_{k1}(-1)^{k+1}M_{k1} + \dots + a_{kn}(-1)^{k+n}M_{kn}$$

$1 \le k \le n$ и можно такое же разложение записать по любому столбцу.

$M_{ij}$ – минор (определитель такой матрицы размера $(n-1)\times(n-1)$, которая получается из матрицы $A$ вычеркиванием $i$-й строки и $j$-го столбца.

Замечание

$(-1)^{i+j}M_{ij} = A_{ij}$ – "алгебраическое дополнение элемента $a_{ij}$"

Замечание Было $A^T$ – транспонированная матрица.

(строки матрицы $A$ = столбцы матрицы $A^T$)

Теорема (б/д) $A: |A| \neq 0$ то $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A_{ij})^T$

**Задача 1**
(для желающих)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $|A| = 18$

1) по указанной формуле найти $A^{-1}$ (обратную матрицу)

2) проверить, что в самом деле $A \cdot A^{-1} = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

Пример вычисления определителя $4 \times 4$ по теореме о разложении:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

По 1-й строке:

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix}$$

**Задача № 2**

закончить вычисление этим способом. Убедиться, что $|A| = 0$

Замечание. Очень трудоемкий способ.
На самом деле нужно отметить те свойства определителя, которые упростят наши расчеты.

Свойства определителя:

(1) Если любые две строки матрицы $A$ поменять местами (переставить), то определитель изменит знак. (то же самое — про столбцы)

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad |A| = -1 \Rightarrow \hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\hat{A}| = 3\cdot 2 - 5\cdot 1 = 1 \quad \Delta$$

$$|A| = 1\cdot 5 - 2\cdot 3 = -1$$

(2) Если у матрицы есть две одинаковые строки, то ее определитель равен нулю (то же самое — про столбцы)

но она же не изменится.

Пример $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|B| = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ \text{-//-} & \text{-//-} & \text{-//-} & \text{-//-} \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \quad |\hat{A}| = -|A| = |A| \Rightarrow |A| = 0.$$

(3) Общий множитель элементов строки (столбца) "можно вынести за знак определителя"

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 6\cdot 1 - 4\cdot 2 = -2 \qquad |\hat{A}| = 1\cdot 3 - 2\cdot 2 = -1$$

$$|A| = 2\cdot|\hat{A}|$$

Замечание Свойство 3 следует из теоремы о разложении определителя по строке.

(2+3) $\Rightarrow$ (4) Если две строки (два столбца) матрицы A отличаются общим множителем (пропорциональны) то определитель этой матрицы $= 0$.

Пример $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ по св-ву 2

(5). Если любую строку (любой столбец) матрицы A умножить на произвольное число и прибавить (поэлементно) к любой другой строке (другому столбцу), то определитель полученной матрицы будет равен определителю исходной (определитель не изменится)

Пример

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $*3$, $\ominus$ $\quad |A| = 1\cdot5 - 1\cdot3 = 2$

$\quad\quad ||$

$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad |\hat{A}| = 1\cdot2 - 1\cdot0 = 2$

1-ю строку умножили на 3 и вычли из второй строки.

Идея

$(*2)$, $(*3)$, $(*4)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} =$$

С помощью свойства 5, оперируя со столбцами, сделаем все числа, кроме 1, в 1-й строке нулями!

$*2 \quad *3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & -8 & 8 \\ 9 & -8 & -16 & 12 \\ 13 & -12 & -24 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

по свойству ④

пропорциональные столбцы

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & -4 & 8 \\ 9 & -8 & -8 & 12 \\ 13 & -12 & -12 & 16 \end{vmatrix}$$

Содержательный пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{matrix}$$

(Знаем, что $|A| = 18$)

Над строками

$*3$, $\ominus$, $*2$, $\ominus$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

превратить в нули

по св-ву ③

переставим (св-во 1)

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ *5 \end{matrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-18) = 18$$

ура! способ работает.

$7 - 25 = -18$

верхне-треугольная матрица (все элементы под главной диагональю — нули)

Замечание Наиболее эффективный (ручной) способ вычисления определителя — это приведение матрицы $A$ к верхне-треугольному виду с использованием перечисленных ранее свойств определителя ① – ⑤

У верхне-треугольной матрицы определитель равен произведению элементов на главной диагонали

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & & * \\ & \tilde{a}_{22} & \\ 0 & \ddots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \qquad |\tilde{A}| = \tilde{a}_{11} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{nn}$$

Замечание (Забегая вперед.) Ровно так работает метод Гаусса последов-го исключения неизвестных.

__Теорема__ (формулы Крамера)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{pmatrix} \quad \overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

матрица коэффициентов

вектор-столбец неизвестных

вектор-столбец свободных членов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \sim A \cdot \overline{X} = \overline{b}$$

Если $\Delta = |A| \neq 0$, то у системы есть единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$\Delta_i$ – определитель матрицы, полученной из матрицы $A$ заменой $i$-го столбца на столбец $\overline{b}$ – свободных членов.

**Пример**

$*2 \qquad *3$

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 3x+y+2z=6 \\ 2x+3y+z=6 \end{cases}$$

$x=y=z=1$ очевидно.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix} \qquad \bar{b}=\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}$$

$$|A|=18$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&6&3\\3&6&2\\2&6&1\end{vmatrix} = 1\cdot6\cdot1+3\cdot6\cdot3+6\cdot2\cdot2-3\cdot6\cdot2-1\cdot2\cdot6-3\cdot6\cdot1$$

$$=\underbrace{6+54+24}_{84}\;\underbrace{-36-12-18}_{66}=18$$

2-е место

$x=z \quad y=1 \quad z=1$

$$y=\text{"}x_2\text{"}=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{18}{18}=1$$

Метод работает!

Напоминание:

$|A|\neq 0$; то

$\bar{X}=A^{-1}\cdot\bar{b}$

проверить из задачи 1

Задача 3

$$\begin{cases} x+2y+3z=7 \\ 3x+y+2z=9 \\ 2x+3y+z=8 \end{cases}$$

Задача N 4

<u>Замечание</u> 1) А что делать, если $|A| = 0$?

2) А что если $m \neq n$

Нужен способ решить эти задачи

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

<u>Этот способ</u> — метод Гаусса последовательного исключения неизвестных