Лекция № 5 (06.10.2021)

Опр Говорят, что линия γ (кривая) на плоскости задана уравнением $F(x,y)$, если

$$M(x,y) \in \gamma \subset \mathbb{R}^2 \iff F(x,y)=0$$

Опр Говорят, что кривая – алгебраическая, если функция $F(x,y)$ – многочлен.

Пример
парабола → $y = x^2 \iff x^2 - y = 0$
алгебраическая кривая

$y = \sin x$ – не алгебраическая кривая

Опр Кривая (алгебраическая) первого порядка = если ее задает многочлен 1-го порядка от двух переменных: $ax+by+c=0$.

Опр γ – второго порядка = если ее можно задать многочленом 2-й степени и нельзя задать многочленом 1-й степени относительно переменных (x,y)

....

Теорема: Алгебраические кривые 1-го порядка на плоскости – это прямые и только они.

прямая → $x = y \iff x - y = 0$ (I степени, I пор.) $\quad \underbrace{x^2 - 2xy + y^2 = 0}_{\mathrm{II}\text{ степени}}$ – прямая – линия второго порядка? Нет

Аналогично "кривая γ называется алгебраической кривой 3 порядка (на плоскости Oxy) если её можно задать многочленом третьей степени и нельзя задать никаким многочленом II или I степени относительно переменных x и y.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

λ_1, λ_2 – собств. числа

корни: $|A - \lambda E_2| = 0$

1 порядок: $ax + by + c = 0$ прямые и только они

2 порядок: Общий вид многочлена второй степени от двух переменных (x, y):

$$\Phi(x,y) = \underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{\text{квадратичная часть}} + \underbrace{a_1x + a_2y + a_0}_{\text{линейная часть}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{F_1(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x,y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

матрица квадрат. части $a_{21} = a_{12}$ – т.н. симметрическая матрица

Какие линии на плоскости могут получаться?

Теорема 2 (б/д)

Преобразуя координаты (поворачивая оси и сдвигая) можно привести уравнение к одному из следующих 9 видов:

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (эллипс)

(2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ (мнимый эллипс)

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (точка или пара мнимых пересекающихся прямых $\frac{x}{a}=\pm i\frac{y}{b}$) ($i^2=-1$)

(4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (гипербола)

асимптоты гиперболы

$\underbrace{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}_{=\xi}=0$ и $\underbrace{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}_{=\eta}=0$

(5) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ пара действ. пересек-ся прямых

(6) $y^2=2px$ (парабола)

(7) $x^2=a^2$ пара параллельных прямых

(8) $x^2=-a^2$ пара мнимых паралл-х прямых

(9) $x^2=0$ <u>пара</u> совпавших прямых

$x^2-y^2=1$

$y=\frac{1}{x}$ $xy=1$

$\xi\cdot\eta=1$

Задание

Откуда вообще берутся уравнения эллипса, гиперболы, параболы?

Идея

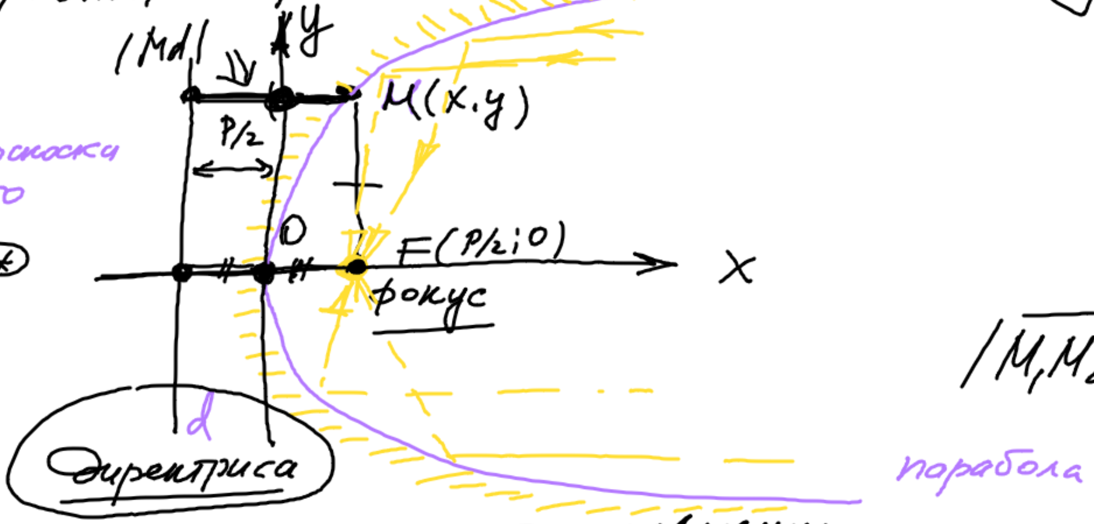
Геом. опр $\Rightarrow$ Система координат $\Rightarrow$ (Алгебраич.) уравнение

① Парабола

— это г.м.т. плоскости (x,y) таких, что

$|Md| = |MF|$ ⊛

геометрическое определение.



$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

расстояние между точками по т. Пифагора.

Наша задача — из этого определения получить уравнение.

Для этого введем систему координат как показано на рисунке.

$$|MF| = \sqrt{(x-p/2)^2+(y-0)^2}$$

$$|Md| = |x+p/2|$$

⊛ $\Rightarrow$ $|x+p/2| = \sqrt{(x-p/2)^2+y^2}$

$$\cancel{x^2}+px+\cancel{\frac{p^2}{4}} = \cancel{x^2}-px+\cancel{\frac{p^2}{4}}+y^2$$

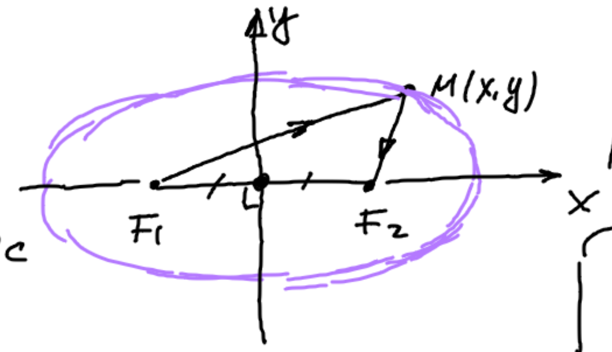
$\Rightarrow$ $y^2 = 2px$

ур-е параболы.

② Эллипс

1) Геом. определение

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a > 2c$$



F_1, F_2 — фокусы.

$|F_1F_2| = 2c$

2) Система координат

Ось x по отрезку F_1F_2.

Начало координат — середина F_1F_2

Ось y — $\perp$ оси OX.

$F_1(-c;0)$ $F_2(c,0)$

3) Запишем наше определение, пользуясь формулой расстояния между точками:

$$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\underbrace{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a}_{\text{опр.}}$$

получим каноническое уравнение эллипса:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + \cancel{y^2}$$

$$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2}$$

$$\cancel{4}xc = \cancel{4}a^2 - \cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$ поменяли местами

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

$$a^2\left((x-c)^2 + y^2\right) = a^4 - 2a^2xc + (xc)^2$$

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + (xc)^2$$

$$a^2x^2 - \cancel{2a^2xc} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2xc} + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$ делим на a^2

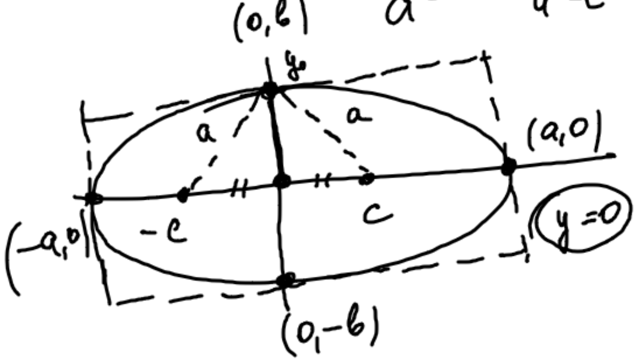
$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ делим на a^2

$(a^2-c^2)\frac{x^2}{a^2}+y^2=(a^2-c^2)$ делим на $a^2-c^2>0$ $(a>c)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

обозначаем $b^2=a^2-c^2>0 \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



по теореме Пифагора $y_0^2=a^2-c^2=b^2$

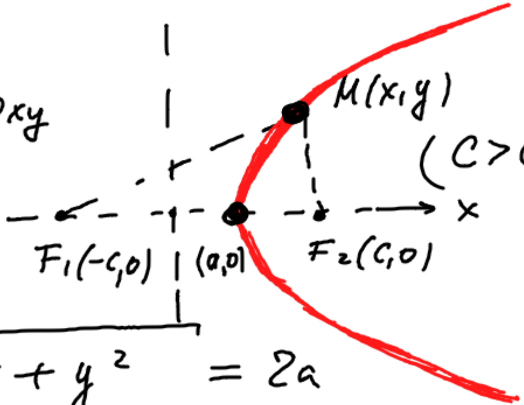
$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{0}{b^2}=1$$

$x_0^2=a^2 \Rightarrow \pm a.$

③ Гипербола

— это г.м.т. $M(x,y)\in Oxy$ т. что

$|MF_1|-|MF_2| = 2a$ $(\pm 2a)$



$(c>a)$!

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\cancel{x^2}+2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\cancel{x^2}-2xc+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}$$

$$\cancel{4}xc=\cancel{4}a^2+\cancel{4}a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(xc-a^2)^2=a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)$$

$$x^2c^2-\cancel{2a^2xc}+a^4=a^2x^2-\cancel{2a^2xc}+a^2c^2+a^2y^2$$

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

Делим на a^2

$$\frac{x^2}{a^2}(c^2-a^2)-y^2=c^2-a^2$$

Делим на $c^2-a^2>0$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

У гиперболы обозначаем $b^2=c^2-a^2$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

$y=0$

$x=a$

или $x=-a$

Замечание "Теорему о классификации" мы не доказываем.

В пространстве R^3 многочлен 1 степени задает плоскость $Ax+By+Cz+D=0$

многочлен 2-й степени от трех переменных будет задавать одну из 17 поверхностей второго порядка:

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоид. $a=b=c=R \Rightarrow$ сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$

. . . .

пара гиперболоидов

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ однополостной гиперболоид.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ двуполостной гиперболоид.

конус

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

пара параболоидов

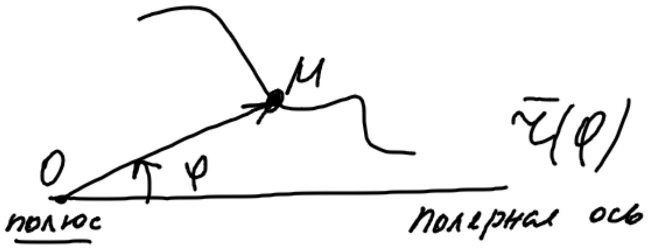
$z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}$ эллиптический

$z=\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}$ — гиперболический,

(цилиндры над всеми кривыми второго порядка и т.д.)

Замечание Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола могут быть получены в сечении конуса плоскостью, поэтому еще древним грекам они известны как *конические сечения*.

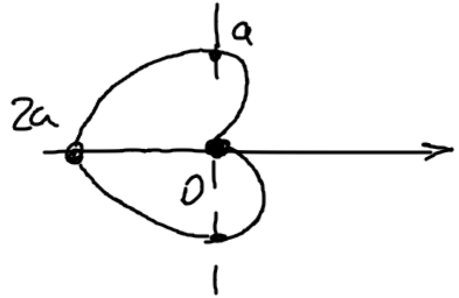
Важный § — запись кривых в *полярной системе координат*



Пример Нарисовать самим

$$\rho(\varphi) = a(1-\cos\varphi)$$

кардиоида



S ?