Лекция №8: Точная верхняя грань. Теорема Вейерштрасса. Число e.

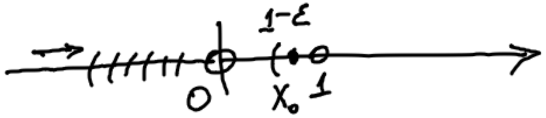
Определение Точной верхней гранью (границей) множества $A \subset \mathbb{R}$ называется такое число M, что

1) $\forall x \in A \quad x \leq M$

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0$, что $M - \varepsilon < x_0 \leq M$ $(x_0 \in A)$

То есть M – наименьшая из всех верхних границ множества (неуменьшаемая)

Пример: $A = (0,1) \quad M = \sup A = 1 \quad (M \notin A)$



$x_0 \in A$

$1 - \varepsilon < x_0 < 1$

$B = [0,1] \quad M = \sup B = 1 \in B$

Замечание (Т.в.) Граница M может как принадлежать, так и не принадлежать множеству A.

Определение Точная нижняя граница мн-ва B ($\inf B$) — это самая большая (неувеличиваемая) из всех нижних границ множества B.

В наших примерах $A = (0,1)$ $\quad 0 = \inf A$.

Принцип (Вейерштрасса) полноты множества действительных чисел $\mathbb{R}$

Всякое непустое ограниченное сверху подмножество $A \subset \mathbb{R}$ (мн-ва д. чисел $\mathbb{R}$) имеет точную верхнюю грань (границу) $\sup A \in \mathbb{R}$.

Замечание 1) это аксиома, т.е. утверждение, принимаемое без доказательства.

2) этим свойством — свойством полноты — **не** обладает множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Пример $A \subset \mathbb{Q}$: $\quad A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ $\quad A$ — ограничено; $\forall x \in A \ x < 1{,}5$

A — не пустое $\quad x = 1{,}4 \in A \quad$ но $\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\in \mathbb{R}$

Замечание (*) **Утверждение**: Всякое непустое ограниченное снизу подмножество $B \subset \mathbb{R}$ множества действ. чисел $\mathbb{R}$ имеет точную нижнюю границу (грань) $\inf B$ уже можно доказать.

$$\boxed{\text{Указание: } \inf B = -\sup(-B)}$$

Теорема Вейерштрасса

Пусть $x_n \le x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\exists C$ т.что $x_n \le C$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

Тогда $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \sup\{x_n\}$

Доказательство:

$\Rightarrow$ В силу аксиомы (принципа) полноты Вейерштрасса $\exists \sup\{x_n\} = M$ (прямо по определению) т.е. $\boxed{\forall n \ \ x_n \le M}$ $\Rightarrow$ $x_n < M + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_{N_0}$ что $M - \varepsilon < x_{N_0} \le M$

А нам нужно доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ (того самого) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ т.что $\forall n > N_0$ $\boxed{M - \varepsilon < x_n} < M + \varepsilon$

это верно

и при этом

В силу монотонности $\forall n > N_0$ $x_{N_0} \le x_n$ $\quad M - \varepsilon < x_{N_0} \le x_n \le M < M + \varepsilon$ $\Rightarrow$ ч.т.д.

По определению предела $M = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Теорема доказана.

Замечание: Всякая монотонно убывающая и ограниченная снизу последовательность y_n имеет предел, равный $\inf\{y_n\}$ Δ.

Аналогично,

Число e

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n^n}$

$x_1 = 2$ $\quad x_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = (1,5)^2 = 2,25 > x_1$ $\quad x_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \approx 2,403\ldots$ (?)

$x_{1000} = (1,001)^{1000} = 2,7169\ldots$ $\qquad x_n \in \mathbb{Q}$

Два факта нужно доказать:

1. $x_n \le x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
2. $x_n \le 3$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Тогда по теореме Вейерштрасса у этой последовательности будет предел; его обозначают $e \approx 2,718281828459045\ldots$

$e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$e \notin \mathbb{Q}$
и оно даже не алгебраическое

Бином Ньютона:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^2b^3+10a^3b^2+5ab^4+b^5$$

$$C_4^3 = 4 = C_4^1 = \frac{4!}{1!\,3!} = \frac{24}{6} = 4$$

Треугольник Паскаля (известен до Паскаля)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$$(a+b)^n = a^n + \gamma_1 a^{n-1} b^1 + \gamma_2 a^{n-2} b^2 + \dots + b^n \qquad (a+b)^4 \sim 1\ 4\ 6\ 4\ 1$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

$$\gamma_k = C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$ число сочетаний из n (неразличимых) элементов по k элементов.

$C_n^k = C_n^{n-k}$ коэффициенты симметричны.

Комбинаторное док-во формулы бинома Ньютона.

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(\cdots\cdots)(a+b)}_{n \text{ скобок}} = \sum \gamma_k a^{n-k} b^k$$

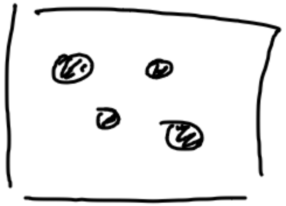
γ_k = число способов выбрать k штук b из n скобок.

A_n^k = "число способов выбрать k различных элементов из n разл. элементов"

$$A_n^k = \underset{\text{для 1-го}}{n}\cdot\underset{\text{2-го}}{(n-1)}\cdot\underset{\text{3го}}{(n-2)}\cdots\underset{k\text{-го}}{(n-k+1)} = \frac{n(n-1)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)(n-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

k человек, n стульев

A_n^k – число размещений



$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

P_k = число перестановок k элементов $= k!$

$3! = 6$

$\frac{1}{3!} = \frac{1}{6} < \frac{1}{4}$

$a = 1 \quad b = x$ модификация бинома Ньютона.

$$(1 + x)^n = 1 + \underset{C_n^1}{\underset{\parallel}{nx}} + \underset{C_n^2}{\underset{\parallel}{\frac{n(n-1)}{2!}}} x^2 + \underset{C_n^3}{\underset{\parallel}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}}} x^3 + \underset{C_n^4}{\underset{\parallel}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}}} x^4 + \dots + x^n$$

$x = 1/n$

$$X_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{1 + \cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}}_{2} + \frac{\cancel{n}(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^{\cancel{2}}} + \underbrace{\frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^{\cancel{3}}_{2}}} + \frac{\cancel{n}(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\,\frac{1}{n^{\cancel{4}}_{3}} + \dots + \underset{\frac{n(n-1)\cdots 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}}{\underset{\parallel}{\left(\frac{1}{n}\right)^n}}$$

$$X_n = 2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}_{\le 1} + \frac{1}{4!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\underbrace{\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)}_{\le 1} + \dots + \frac{1}{n!}\underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}_{\le 1}$$

доказали, что $X_n \le 3$ (**)

$$X_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \underset{< 1/8}{\frac{1}{4!}} + \dots + \frac{1}{n!} \le \underbrace{2 + \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}}^{< 1}}_{\le 3}$$

Осталось доказать, что $x_n \leq x_{n+1}$

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$\leq \qquad\qquad \leq \qquad \leq$$

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots$$

все "парные" у x_{n+1} больше, чем у x_n и еще на одно положительное слагаемое больше $\Rightarrow$

$$\boxed{x_{n+1} > x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}} \quad (*)$$

Т.к. $\underline{\frac{k}{n} > \frac{k}{n+1}} \Rightarrow -\frac{k}{n} < -\frac{k}{n+1} \Rightarrow \left(1 - \frac{k}{n}\right) \leq \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)$

Из * и ** по теореме Вейерштрасса заключаем, что

$\left(\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. (Утверждение про число e) доказано