Семинар № 6 (16.10.21)

Пределы последовательностей.

I Бесконечно малая последовательность.

Определение: α_n - б.м.п $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ т.что $\forall n > N_0$ $|\alpha_n| < \varepsilon$

Пример 1: $\alpha_n = \frac{1}{n}$ $\quad \varepsilon = 0,1 \Rightarrow N_0 = 10$ (можно взять и больше $N_0 = 11$ или 12 или 20)

$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ достаточно взять $n \in \mathbb{N}$ $\quad N_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

Замечание

$[x]$ – "целая часть x"

$[2,71828] = 2$

(можно и + 10, но хватит + 1)

Пример 2 $\quad \beta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \varepsilon \to N_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$

$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^2}$

Пишут $\alpha_n \to 0$
$n \to +\infty$

Определение 2: Последовательность β_n называется ограниченной, если $\exists C > 0$ такая что $\forall n \in \mathbb{N}$

$$|\beta_n| \leq C$$

Пример

$$\beta_n = \sin(n)$$

$$\Rightarrow C = 1 \quad |\beta_n| \leq 1.$$

Теорема 1: ①. Сумма двух бесконечно малых последовательностей (снова) бесконечно малая последовательность

②. Произведение бесконечно малой пос-ти на ограниченную — (снова) бесконечно малая последов-ть

Док-во: п1 — был на лекции. п2 — самостоятельно (на след. лекции разберем)

Пример $\gamma_n = \frac{\sin(n)}{n} = \alpha_n \cdot \beta_n$ $\quad \alpha_n = \frac{1}{n}$ – б.м.п. $\quad \Rightarrow^{\text{по теореме}}$ γ_n – б.м.п.

$\beta_n = \sin(n)$ – огр.посл.

II

Нужно дать определение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Наводящее соображение:

$x_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$ $\quad \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\quad \Rightarrow$ логично считать, что $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 2$

Определение $\lim x_n = a \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ т.что $\forall n > N_0$

$|x_n - a| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ **Лемма** (*) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$ $\quad \alpha_n$ – б.м.п. при $n\to\infty$ (разберем)

Док-во Сделать самостоятельно или прочесть в учебнике

Следствия

1) Теорема 2

Всякая последовательность, имеющая предел, ограниченная.

Док-во

Пусть $\lim x_n = a \Rightarrow$ возьмем фиксированное $\varepsilon = 1 \Rightarrow$

$$\exists N_0(1) \in \mathbb{N} \text{ т.что } \forall n > N_0$$

$$|x_n - a| < 1$$

$$-1 < x_n - a < 1$$

$$-|a| - 1 \leq a - 1 < x_n < a + 1 \leq |a| + 1$$

$$\Rightarrow |x_n| < |a| + 1 \text{ при } n > N_0$$

Выберем $C = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N_0}|, |a|+1\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \leq C$ $\triangle$.

Замечание

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1000000}{n} = 0$$

но $C = 1000000$!

Замечание Утверждение "нельзя обратить"!

Всякая последовательность, имеющая предел, будет ограниченной.

Но Не всякая ограниченная последовательность будет иметь предел.

Пример $X_n = (-1)^n$.

$|X_n| \leq 1$ (в точности $=1$)

Но! Не существует предела у этой последовательности при $n \to \infty$.

Достаточно взять $\varepsilon = 1/2$ и показать, что неверно, что $\forall n > N_0$ $|1 - X_n| < 1/2$ или $|-1 - X_n| < 1/2$.

Упражнение Прочесть в учебнике или сделать самост.

Теорема 2 ("Арифметические свойства пределов") ("предел и арифметика")

Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$ тогда

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n+y_n) = a+b$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n\cdot y_n = a\cdot b$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ (при доп. усл.: $b\neq 0$; $y_n\neq 0\ \forall n\in\mathbb{N}$)

Док-во: 1. Воспользуемся Леммой(*): $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow x_n = a+\alpha_n$; α_n – б.м.п.

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow y_n = b+\beta_n$; β_n – б.м.п.

$$\Rightarrow x_n+y_n = (a+b) + \underbrace{(\alpha_n+\beta_n)}_{\text{б.м.п. по Теореме 1}} = (a+b)+\gamma_n \xRightarrow{\text{снова по Лемме (*)}} \lim_{n\to+\infty}(x_n+y_n) = a+b$$

Δ

(2) $x_n = a + \alpha_n$

$y_n = b + \beta_n$

по условию и по лемме (*)

$$\Rightarrow \quad x_n \cdot y_n = (a+\alpha_n)(b+\beta_n) = ab + \underbrace{\underbrace{\alpha_n b}_{\text{б.м.п}} + \underbrace{\beta_n \cdot a}_{\text{б.м.п.}}}_{\text{б.м.п.}} + \underbrace{\alpha_n \cdot \beta_n}_{\text{б.м.п}} =$$

по Теор. 1

по Теор. 1 б.м.п. — б.м.п.

$\alpha_n \cdot \beta_n$ — б.м.п.
(потому что $\beta_n \to 0 \Rightarrow \beta_n$ — ограниченная $\Rightarrow \alpha_n \cdot \beta_n$ — б.м.п. по Теор. 1)

по лемме (*)

$$= ab + \delta_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$$

δ_n — б.м.п. $n \to +\infty$

Упражнение Еще раз это прочитать и переписать ! (от руки)

Решение задач

делим на n

① $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+5}{3n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\overset{\to 0}{5/n}}{3+\underset{\to 0}{7/n}} = \frac{2}{3}$$

Указание: (применяется к "неопределенностям" вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x\to+\infty$ или $n\to+\infty$

$\frac{P_m(n)}{Q_k(n)}$ или $\frac{P_m(x)}{Q_k(x)}$ P_m, Q_k – полиномы (многочлены))

"Делим на старшую степень" переменной и числитель, и знаменатель"

② $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+3n-1}{5n^2+7n+4} =$$

делим на n^2

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{5+\frac{7}{n}+\frac{4}{n^2}} = \frac{2}{5}$$

(**)

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2 = a-b$$

Замечание "Неопределенности" – выражение типа

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty-\infty \text{ и } 1^{\infty}$$

3

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} =$$

неопределённость вида $\infty\cdot 0$

Указание В таких задачах можно пробовать умножать и делить на "сопреженной множитель" (в смысле (**))

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(\cancel{1}+\frac{3}{n}-\cancel{1}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} =$$

(т.к. $\frac{3}{n}\to 0$)

$$= \frac{3}{2}$$

Пример

$$\infty - \infty$$

"неопределенность" вида $\infty - \infty$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+7n+1}-\sqrt{n^2+3n+4}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+7n+1}-\sqrt{n^2+3n+4}\right)\left(\sqrt{n^2+7n+1}+\sqrt{n^2+3n+4}\right)}{\sqrt{n^2+7n+1}+\sqrt{n^2+3n+4}} =$$

Замечание (указание)
(поскольку снова задача "с корнями", можно попробовать домножить и поделить на сопряженной)

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(n^2+7n+1)-(n^2+3n+4)}{\sqrt{n^2+7n+1}+\sqrt{n^2+3n+4}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{\sqrt{n^2+7n+1}+\sqrt{n^2+3n+4}} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Делим на n числитель и знаменатель

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4-3/n}{\sqrt{1+\frac{7}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}}} = \frac{4}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = 2 \leftarrow \text{Ответ.}$$

Замечание   **Почему** $\infty - \infty$ это "неопределенность"?

① $\lim \left(\sqrt{2n^2+7n+1} - \sqrt{n^2+3n+4} \right) = \infty$ проверить!

② $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} \right) = 0$ проверить.

Потому что ответ зависит от самих этих последовательностей и будет различным в разных случаях.

В то же время "$\infty + \infty = \infty$" ← нестрого;

"$\infty \cdot \infty = \infty$"   потом будет теорема (об этом).

"$\frac{1}{0} = \infty$" и "$\frac{1}{\infty} = 0$"

Замечание

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_0} =$$

$$= \begin{cases} (1)\ \dfrac{a_m}{b_m} \text{ при } k = m \\ (2)\ 0, \text{ если } m > k \\ (3)\ \infty \text{ если } k > m \end{cases}$$

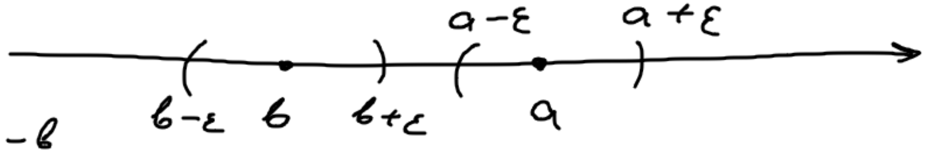
полный разбор случая $\dfrac{\text{многочлен}}{\text{многочлен}}$;

Теорема 3 Если у последовательности x_n есть предел, то он единственный.

т.е. **пусть** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (*) и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ (**)

тогда $a = b$.

Доказательство От противного: пусть $a > b$



возьмем $\varepsilon_0 = \dfrac{a-b}{3}$ тогда $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \varnothing$

Для выбранного ε_0 из (*) $\Rightarrow \exists N_1(\varepsilon)$ т.что $\forall n > N_1 \ x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

из (**) $\Rightarrow \exists N_2(\varepsilon)$ т.что $\forall n > N_2 \ x_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$

Но тогда $\forall n > N_0 = \max(N_1, N_2)$

$x_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon) \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

но это $\varnothing$.

противоречие

Аналогично невозможно, чтобы $b > a$ $\Rightarrow$ $a = b$ $\triangle$.

Предел единственный $\Rightarrow$ еще один аргумент в пользу того, что у последовательности $x_n = (-1)^n$ нет предела.

Теорема 4 (Предельный переход сохраняет знак в неравенствах) (= "не меняет")

Пусть $x_n \leq y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ тогда $a \leq b$

Док-во Самостоятельно от противного. Предположить, что $a > b$ и получить противоречие, как в теореме 3.

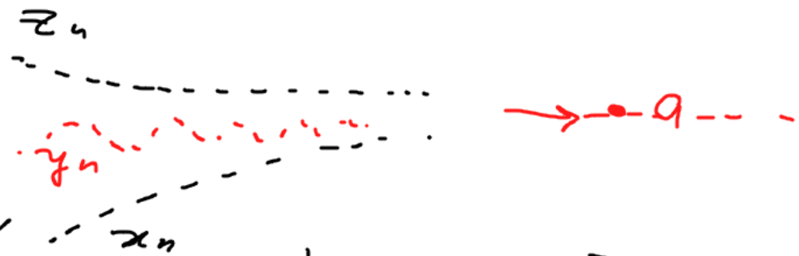
Теорема 6 (оценочный признак существования предела)

Пусть $x_n \le y_n \le z_n$ (***) $\forall n \in \mathbb{N}$ (Замечание: иногда пишут $\forall n > N_0$)

и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (*) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ (**)

у нас есть *, **, ***

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$



Док-во:

Нужно проверить, что

$\forall \varepsilon > 0$ (зафиксируем его) $\exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (его нам нужно найти) такое что

$\rightarrow \quad \forall n > N_0 \quad |y_n - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ — для выбранного $\varepsilon > 0$ $\exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ т.что $\forall n > N_1$

$|x_n - a| < \varepsilon$ т.е. $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$ — для выбранного $\varepsilon > 0$ $\exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ т.что $\forall n > N_2$

$|z_n - a| < \varepsilon$ т.е. $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$

Но у нас есть условие (***): $x_n \leq y_n \leq z_n$ $\forall n$

Возьмем $N_0 = \max(N_1, N_2)$ тогда:

$\underline{\forall n > N_0}$

$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon \Rightarrow$

$\underline{|y_n - a| < \varepsilon}$ $\Rightarrow$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

теорема доказана.

Наша цель

(на след. раз)

и число e

Теорема 7 (теорема Вейерштрасса)

$$x_n < x_{n+1} \quad \forall n$$

$$\exists c \text{ т.ч. } x_n < c \quad \forall n \implies$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}$$

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2{,}718281828\ldots$$

Предел пос-тей $n\to+\infty$ $\Rightarrow$ Предел функции $f(x)$ а) $x\to+\infty$ б) $x\to x_0$ $\Rightarrow$ Непрерывные функции и их св-ва $\Rightarrow$ Дифф. исчисл.