Семинар 7 (23.10.2021)

① Решение задач на пределы последовательностей.

Уже известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$ $(a>0)$

Верно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$:

$n > 10$ $n^3 < 2^n$

$10^3 = 1000$

$2^{10} = 1024$

По теореме о "зажатой последов-ти"

$$0 < \frac{n^2}{2^n} < \frac{1}{n}$$

при $n > 10$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

т.к. $\frac{1}{n} \to 0$ при $n \to +\infty$

Утв. (б/д)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

при фиксированном $k \in N$

$a > 1$

Теперь, используя эти факты, будем решать задачи из книги А.К. Рябникова по теории пределов

(A)

б пример вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $n \to +\infty$ (делим на n в старшей степени;
- если у числителя и знаменателя эта степень одинаковая, в пределе получится число;
- если степень знаменателя больше степени числителя, получится 0.
- если степень числителя больше степени знаменателя, получится ∞.

а) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n-1}{3n^2+7n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\overset{\to 0}{\frac{3}{n}}-\overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}}{3+\underset{\to 0}{\frac{7}{n}}+\underset{\to 0}{\frac{5}{n^2}}} = \frac{2}{3}$$

б) $$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+7}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{2/n}+\overset{\to 0}{7/n^2}}{1+\underset{\to 0}{1/n^2}} = 0$$ при $n \to \infty$.

в) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+n^2-7n+11}{n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}-\overset{\to 0}{\frac{7}{n^2}}+\overset{\to 0}{\frac{11}{n^3}}}{\underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}+\underset{\to 0}{\frac{4}{n^3}}} = "\frac{3}{0}" = \infty$$

(Б) Неопределенность вида $\infty \cdot 0$; рассмотрим

Пример

$$\lim_{n\to\infty} \underset{\downarrow \infty}{n}\Big(\underbrace{\sqrt{1+\frac{7}{n}}-1}_{\to 0}\Big) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{7}{n}}+1} =$$

(Указание. Если в задаче встречается разность корней $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, можно попробовать домножить и поделить на сопряженной множитель $\sqrt{a}+\sqrt{b}$)

$$\left((\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2 = a-b \right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(1+\frac{7}{n}-1\right)}{\sqrt{1+\frac{7}{n}}+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{7}{\sqrt{1+\underset{\to 0}{\frac{7}{n}}}+1} = \frac{7}{2}$$

Замечание 1: $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{1+\frac{7}{n}} = 1$

попробовать доказать "по определению"

(Упражнение на теорию)

Замечание 2

Если взять $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}-1\right)$

то получим ∞

(проделать самостоятельно)

Если взять $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{7}{n^3}}-1\right)$

то получим 0

(В) Неопределенность вида "$\infty - \infty$"

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-2n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cancel{n^2}+n-(\cancel{n^2}-2n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-2n}} =$ "$\dfrac{\infty}{\infty}$; $n\to+\infty$" $= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}}} =$

делим числ. и знаменатель на n в старшей степени

$= \dfrac{3}{2}$.

(Замечание Если корень $\sqrt[k]{\ldots}$ делим на n, то под корнем выражение делится на n^k)

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+5}-n\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+5}-n\right)\left(\sqrt{n^2+5}+n\right)}{\sqrt{n^2+5}+n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cancel{n^2}+5-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+5}+n} = \dfrac{5}{\infty} = 0.$

в) (самостоятельно)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n^2+5}-n\right) = \infty$

Реши задачу N9
стр. 44.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}-1}{\sqrt[n]{5}-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{3}-1}{1/n}\cdot\frac{1/n}{\sqrt[n]{5}-1}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{\sqrt[n]{3}-1}{1/n}}{\dfrac{\sqrt[n]{5}-1}{1/n}}=\frac{\ln 3}{\ln 5}$$ ответ

Утверждение 1:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{1/n}=1$, $a>0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^{1/n}-1}{1/n}=\ln a$

(докажем позже)

2* $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{h}-1}{h}=\ln a.$

$\sqrt[n]{3}=3^{1/n}$

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$$

<u>N</u>. 10 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3^n}{n+3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3^n}{n+3\cdot 3^n} =$ поделим на 3^n "наибольшее выражение" $= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\frac{n^2}{3^n}+1}{\frac{n}{3^n}+3} =$

Вспоминаем (Утверждение: $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ $\quad k\in\mathbb{N}$, $a>1$)

$$= \frac{0+1}{0+3} = \frac{1}{3} \quad \triangle.$$

<u>N 11</u> — самостоятельно.

"Число e" (Второй замечательный предел)

Зная, что $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e \approx 2{,}71828\ldots$

решим несколько задач; существование предела будет доказано на следующей лекции.

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad X_1 = 2 \quad X_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25$$

$$x_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = \approx 2{,}370\ldots$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2$$

Используем (пока недоказанное)

Утверждение $\lim_{X\to+\infty}\left(1+\frac{1}{X}\right)^X = e$ (и)

$X = \frac{n}{2}$

$X \in \mathbb{R}$ а не только $X \in \mathbb{N}$

Утверждение

Если: $\lim_{n\to\infty} X_n = a$ то $\lim_{n\to\infty}(X_n)^2 = a^2$

(для второй степени это просто)

Более сложный факт $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$ – любое действ. число.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow$$ Следствие (класс задач)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = e^2 \qquad \beta_n = \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0, \quad n\to+\infty$$

Упражнение: принимая без доказательства сформулированное ранее утверждение, получить этот ответ.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+3}{n^2+n-1}\right)^{2n} =$$ {Неопределенность вида 1^∞}

Будем сразу пользоваться $\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$

(У нас было $\alpha_n = \frac{1}{n}$)

$$n^2+2n+3 = n^2+n-1+(n+4)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n+4}{n^2+n-1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{n+4}{n^2+n-1}\right)^{\frac{n^2+n-1}{n+4}}}_{\to e \text{ при } n\to+\infty}\right)^{\frac{n+4}{n^2+n-1}\cdot 2n}$$

$\left(\alpha = \frac{n+4}{n^2+n-1} \to 0\right.$ при $n\to+\infty$ проверить!!!$\left.\right)$

$\frac{1}{\alpha} = \frac{n^2+n-1}{n+4}$

$$= e^{\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+8n}{n^2+n-1}} = e^2$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2+8n}{n^2+n-1}=2$ (см. замечание в начале занятия)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+3}{n^2+3n+1}\right)^{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2n+2}{n^2+3n+1}\right)^{3n}=\lim_{n\to+\infty}\Bigg(\underbrace{\left(1+\frac{(-2n+2)}{n^2+3n+1}\right)^{\frac{n^2+3n+1}{-2n+2}}}_{\to e}\Bigg)^{\frac{(-2n+2)3n}{n^2+3n+1}}=$$

Неопределенность вида 1^∞

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2n+2)\cdot 3n}{n^2+3n+1}}=e^{-6}$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2n+2)(3n)}{n^2+3n+1}=-6$

Замечание: Использовано такое свойство (б/д)

$$\lim_{n\to\infty}e^{x_n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=e^a$$

$\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\right)$

Введём новое определение: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ если $\forall \varepsilon > 0\ \exists K(\varepsilon) > 0,\ K \in \mathbb{R}$

т.что $\forall x > K(\varepsilon) > 0$

$|f(x) - A| < \varepsilon$

(аналог определения предела последовательности $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = A$)

Замечание. Практически все свойства "нового предела" "сохраняются" (т.е. такие же, как у предела последовательности).

(Вместо свойства ограниченности последовательности, имеющей предел, здесь будет свойство "финальной ограниченности")

(например)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+7}-\sqrt{x^2+x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+7}-\sqrt{x^2+x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x+7}+\sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{x^2+2x+7}+\sqrt{x^2+x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+7}{\sqrt{x^2+2x+7}+\sqrt{x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+7/x}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+7/x^2}+\sqrt{1+1/x}} = \frac{1}{2}$$

(Но подходы к решению задач – те же, что и раньше)

Хотим

<u>Аналогично</u>: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\boxed{\text{II}}$ $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

Новое определение предела — <u>предел функции в точке x_0</u>

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ т. что $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

(Определение предела функции $f(x)$ в точке x_0 по Коши).

Определение Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ $\Rightarrow$ Лемма $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$

$f(x) = A + \alpha(x)$

$\alpha(x)$ – б.м.ф. $(x \to x_0)$

Замечание Сохраняются свойства бесконечно малых

т.е. 1) сумма двух бесконечно малых (ф-ций) (при $x \to x_0$) – снова б.м.ф

2) произведение б.м.ф на ограниченную – снова б.м.ф.

$\Rightarrow$ Как следствие, справедлива такая же теорема об арифметике пределов функций, как и про последовательности.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$ то $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

и про частное $\frac{f}{g}$ …

Пример (решение задач)

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x+1}{3x+5} = \frac{3}{8}$$ (по нашей теореме)

$$\lim_{x \to 2} x^4 = 16$$

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$ — На лекции отдельно это доказали.

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$\frac{0}{0}$$?!

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8} = \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{4}{4+4+4} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)(x^2+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+1}=\frac{2\cdot 2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$$

1-й замечательный предел (будет доказан на лекции)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow$$ будет доказано $(\sin x)'=\cos x$

и $(\cos x)'=-\sin x$

Решим задачу $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} =$

(зная, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$$

($\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$)

$$= \frac{1}{2}$$