ОБРАТИМОСТЬ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.А. Зорич
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Семинар по комплексному анализу
Математического института им. В.А. Стеклова
04. 10. 2021

Аннотация

Аннотация доклада

Теорема о глобальном гомеоморфизме для квазиконформных отображений описывает следующее специфически многомерное явление:

Локально обратимое квазиконформное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ при $n > 2$ обратимо глобально.

Мы доказываем операторную версию теоремы о глобальном гомеоморфизме:

Локально обратимый квазиконформный оператор $f : H \to H$, действующий в гильбертовом пространстве H, обратим глобально.

Вводный исторический комментарий

Истоки и применения квазиконформных отображений

ГАУСС и БЕЛЬТРАМИ (геометрия).

Конформно-евклидова карта области поверхности и уравнение Бельтрами.

ГРЕЧ и ЛАВРЕНТЬЕВ (М.А.) (геометрическая теория функций).

Неголоморфный "Пикар"и лемма Грёча (1928).
Мера неконформности отображения.

АЛЬФОРС и ТЕЙХМЮЛЛЕР

Альфорс: Неголоморфное обобщение теории Неванлинны распределения значений мероморфных функций. Термин "квазиконформное"отображение (1935). Первая медаль Филдса (1936).

Тейхмюллер: Конформные структуры на поверхности. Квазиконформные отображения и метрика Тейхмюллера.

Замечания о конформных отображениях

РИМАН и ЛИУВИЛЛЬ

РИМАН: Теорема Римана (1851) (Идея прямого доказательства с подходом к теории Каратеодори.)
Каратеодори (1913) (Граничное поведение отображения.)

ЛИУВИЛЛЬ: Теорема Лиувилля о многомерных конформных отображениях (1850).

Неванлинна (1960) Бесконечномерный случай (гильбертово пространство).

Решетняк (1967) Теорема Лиувилля при минимальных условиях регулярности.
(Юрию Григорьевичу Решетняку 26.09.2021 исполнилось 92 года! Добрые пожелания!)

6 / 36

Конформность в классике

7 / 36

Голоморфная функция $w = f(z)$ как конформное отображение

Геометрический смысл модуля $|f'(z)|$ и аргумента $\arg f'(z)$ производной $f'(z)$ голоморфной функции.

Не независимость!

Изотропность растяжений влечёт сохранение величин углов.

8 / 36

Конформность линейного отображения $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Образ шара — эллипсоид, с отношением полуосей $k_L = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \geq 1$.

Отображение конформно точно тогда, когда $k_L = 1$ (шар переходит в шар).

Величина k_L называется коэффициентом квазиконформности линейного отображения L.

Она (а ещё лучше $\log k_L$, как в теории Тейхмюллера) может служить мерой отклонения от конформности линейного отображения L.

9 / 36

Конформное и квазиконформное отображение

Коэффициент квазиконформности отображения f в точке x — это коэффициент квазиконформности $k_{f'(x)}$ касательного линейного отображения $f'(x)$ в точке x.

Коэффициент квазиконформности k_f отображения f в области есть верхняя грань величины $k_{f'(x)}$ по точкам этой области.

Если коэффициент квазиконформности k_f отображения f равен k, то говорят, что f — k-квазиконформное отображение.

Если $k_f < \infty$, то говорят, что f квазиконформное отображение, отображение с ограниченным искажением или квазирегулярное отображение.

Последний термин обычно употребляют, когда хотят подчеркнуть возможную неоднолистность отображения.

Если $k_f = 1$, отображение f конформно.

10 / 36

Комментарий к определению

Коэффициент квазиконформности отображения в точке можно определить и в случае отображения метрических пространств, без привлечения касательного отображения и дифференцируемости рассматриваемого отображения.

Определения коэффициента квазиконформности и квазиконформного отображения естественно распространяются на случай отображения областей любых римановых многообразий.

Коэффициент квазиконформности отображения не меняется при переходах между конформными метриками риманова многообразия.

В этом смысле класс квазиконформных отображений инвариантен относительно конформных замен метрики риманова многообразия.

Конформность и квазиконформность в развитии

Отображение, конформное по М.Громову

Отображение $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, где $m \geq n$, называется конформным в смысле Громова, если оно в каждой точке переводит бесконечно малый шар прообраза в бесконечно малый шар образа.

Определение естественно распространяется на отображение областей любых римановых многообразий.

Определение также естественным образом расширяется до определения квазиконформности отображения областей любых римановых многообразий (когда образом бесконечно малого шара является эллипсоид с равномерно, по точкам отображаемой области, ограниченным отношением полуосей).

ПРИМЕРЫ отображений, конформных в смысле Громова:

Ортогональная проекция $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (пусть $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$).

Голоморфная функция $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ от $n \geq 1$ переменных.

Конформность и квазиконформность оператора

Нам предстоит иметь дело с оператором $f : H \to H$, действующим в бесконечномерном гильбертовом пространстве H.

Коэффициент квазиконформности $k_f(x)$ отображения f в точке $x \in H$ определяется буквально так же, как он определяется в случае отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ или отображения любых римановых многообразий.

Коэффициент квазиконформности k_f отображения f в области, как всегда, есть верхняя грань величины $k_f(x)$ по точкам этой области.

Коэффициентом квазиконформности оператора f в точке $x \in H$, конечно, можно записать и в привычных для теории операторов обозначениях

$$k_{f'(x)} := \|f'(x)\| \cdot \|(f'(x))^{-1}\|.$$

Теорема о глобальном гомеоморфизме

Формулировка теоремы и возникшие новые вопросы

Локально обратимое квазиконформное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ при $n > 2$ обратимо глобально.

Сравнение с двумерным случаем: $z \mapsto \exp z$.

Возникшие новые вопросы:

Верна ли такая теорема для нелинейных операторов $f : H \to H$, действующих в гильбертовом пространстве? Это вопрос о глобальной обратимости локально обратимых квазиконформных операторов.

Если такая теорема верна, то это даёт достаточное условие существования и единственности решения уравнения $f(x) = y$ при любой правой части $y \in H$.

Обратимость квазиконформных операторов

Теорема обратимости квазиконформных операторов

Мы доказываем операторную версию теоремы о глобальном гомеоморфизме:

Локально обратимый квазиконформный оператор $f : H \to H$, действующий в гильбертовом пространстве H, обратим глобально.

Полный текст

V. A. Zorich, Invertibility of quasiconformal operators
доступен по адресу http://arxiv.org/abs/2108.01408

Конформность и квазиконформность в развитии (дополнение)

Конформность по М.Громову (напоминание)

Отображение $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, где $m \geq n$, называется конформным в смысле Громова, если оно в каждой точке переводит бесконечно малый шар прообраза в бесконечно малый шар образа.

Определение естественно распространяется на отображение областей любых римановых многообразий.

Определение также естественным образом расширяется до определения квазиконформности отображения областей любых римановых многообразий (когда образом бесконечно малого шара является эллипсоид с равномерно, по точкам отображаемой области, ограниченным отношением полуосей).

ПРИМЕРЫ отображений, конформных в смысле Громова:

Ортогональная проекция $P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (пусть $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$).

Голоморфная функция $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ от $n \geq 1$ переменных.

Конформность по Громову, теоремы Лиувилля и Пикара 21 / 36

Формулировака обобщённой теоремы Лиувилля

Громов поставил вопрос о том, какие факты классики остаются в силе и для таких общих конформных отображений.

В частности, верно ли, что если отображение $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ конформно (квазиконформно) и ограничено, то при $m \geq n \geq 2$ оно постоянно?

Теорема.
Если отображение $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ конформно (квазиконформно) и ограничено, то при $m \geq n \geq 2$ оно постоянно.

Полный текст статьи
V. A. Zorich, Conformality in the sense of Gromov and a generalized Liouville theorem
можно найти по адресу http://arxiv.org/abs/2108.00945

22 / 36

Обобщённая теорема Пикара

Теорема.
Если отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$, где $n \geq 2$, квазиконформное в смысле Громова, не принимает больше одного значения в плоскости $\mathbb{R}^2$, то отображение постоянно.

Полный текст статьи
V. A. Zorich, A generalization of the Picard theorem
доступна по адресу http://arxiv.org/abs/2108.05161

23 / 36

Заключительные замечания

Замечание о конформных инвариантах в бесконечномерном случае.

Если бы мы располагали конформным инвариантом пригодным в бесконечномерном случае для квазиконформных операторов, можно было бы повторить исходное доказательство теоремы о глобальном гомеоморфизме для квазиконформных отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Но в определении конформного модуля семейства кривых, как и в определении конформной ёмкости конденсатора, присутствует стандартная мера и интеграл в $\mathbb{R}^n$.

Замечание о полном тексте V. A. Zorich, Invertibility of quasiconformal operators , доступном по адресу http://arxiv.org/abs/2108.01408 , и о и необходимости проверки специалистами (Россия, Финляндия, США).

[Рассказ П.П.Белинского о месячной проверке доказательства Теоремы о глобальном гомеоморфизме на семинаре Ф.Геринга в Мичиганском университете Энн-Арбора (Ann Arbor).]

24 / 36

Что близко?

Работа Р.Неванлинны о бесконечномерной теореме Лиувилля о конформных отображениях гильбертова пространства.

Работа Ф.Джона (Fritz John) о радиусе инъективности для квазиизометрических операторов в нормированных пространствах.

Мои попытки получить независимую от размерности оценку радиуса инъективности для локально обратимых квазиконформных отображений шара в $\mathbb{R}^n$ (усиливающую теорему Мартио, Риккмана и Вяйсала).

Побочный продукт — асимптотика по размерности конформной ёмкости кольца (конденсатора) Тейхмюллера.

25 / 36

Схема доказательства

1. Использование локальной обратимости

Идея продолжения ростка обратного отображения.
Продолжение вдоль лучей.
Особые точки и уход на бесконечность в прообразе.
Следствие: Теорема Адамара (о глобальной обратимости локально обратимого собственного отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$).

2. Включение квазиконформности

Конформные инварианты (конформная ёмкость конденсатора и конформный модуль семейства кривых).
Квазиинвариантность при квазиконформных отображениях.
Много особых точек (препятствующих продолжению ростка вдоль лучей) быть не может!

3. Включение размерности $n > 2$

Граничное поведение квазиконформного отображения и устранение особенностей коразмерности 2 и выше.
Следствие: локально обратимое квазиконформное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ при $n > 2$ не может иметь малое множество особенностей (коразмерности 2 и выше).
Следствием 2 и 3 является заключение, что
Локально обратимое квазиконформное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ при $n > 2$ обратимо глобально.

4. Конформный тип открытого (некомпактного) риманова многообразия и проблема типа

Конформные римановы метрики и конформный тип риманова многообразия.
Геометрия и конформный тип многообразия (проблема типа).
Необходимые, достаточные условия и критерии конформного типа риманова многообразия.

5. Включение конформности по Громову

Вопрос Милнора и пример Оссермана.
Специфика поведения поверхности конформно гиперболического типа в $\mathbb{R}^n$.
Пояснение: Влияние всплесков на коэффициент квазиконформности отображения $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, квазиконформного по Громову.

Продолжение ростка, поднятие путей и препятствия

Локальный гомеоморфизм и поднятие путей

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — локально гомеоморфное отображение (погружение), нормированное условием $f(0) = 0$.

Рассмотрим соответствующий росток f_0^{-1} обратного отображения в точке 0. Он определён в некотором шаре $B(r_0) \subset \mathbb{R}^n$ с центром 0.

Будем продолжать этот росток вдоль лучей, исходящих из начальной точки 0.

Пусть γ — максимальная (конечная или бесконечная) часть соответствующего луча, вдоль которой продолжение оказалось возможно.

Пусть $\tilde{\gamma}$ возникшее в пространстве $\mathbb{R}^n = \tilde{\mathbb{R}}^n$ прообраза $\tilde{\mathbb{R}}^n$ накрытие пути γ.

Если γ не весь луч, то путь γ упирается в некоторую конечную точку пространства, особую точку, препятствующую дальнейшему продолжению ростка обратного отображения.

Из локальной гомеоморфности отображения $f : \tilde{\mathbb{R}}^n \to \mathbb{R}^n$ следует, что путь $\tilde{\gamma}$ в пространстве $\tilde{\mathbb{R}}^n$ уходит на бесконечность.

Замечание о теореме Адамара

Уже одним этим наблюдением мы сейчас заодно доказали такую теорему Адамара:

Если локально гомеоморфное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ собственное (прообраз компакта — компакт), то оно является гомеоморфизмом и $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Иными словами, теорема Адамара утверждает, что

Локально гомеоморфное отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ обратимо глобально тогда и только тогда, когда $f(\infty) = \infty$.

Таким образом, если мы хотим доказать глобальную обратимость локально обратимого квазиконформного отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ или глобальную обратимость полиномиального отображения $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, имеющего постоянный якобиан (равный 1), мы так или иначе должны показать, что $f(\infty) = \infty$. Например, надо показать, что нет особых точек, препятствующих процедуре поднятия пути.

34 / 36

Пояснение к включению конформности по Громову

35 / 36

Комментарий к схеме доказательства

Исходной была идея продолжения ростка обратного отображения.
При этом могут возникнуть препятствия к продолжению.

Привлекая конформные инварианты, можно показать, что препятствий не может быть много.

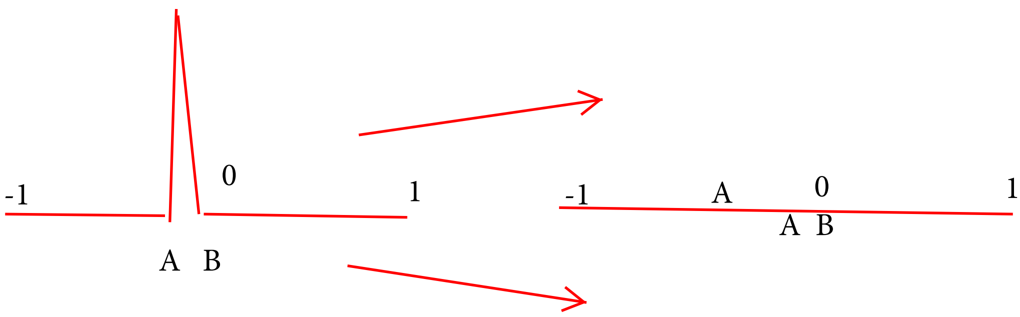
Привлекая условие на размерность (n $>$ 2) и граничное поведение квазиконформных отображений, можно показать, что препятствий не может быть мало (иначе они затрутся).

Значит, препятствий не будет вообще!

Теперь я попробую пояснить последний этап доказательства, где привлекается условие конформности (квазиконформности) отображения в смысле Громова.

36 / 36

Иллюстрация к пояснению



Конформное отображение верхней и нижней частей на свою полуплоскоть при неподвижных точках -1, 0,1. Разница в смещениях точки А.

Выпрямить границу единым конформным отображением невозможно. Квазиконформно можно, но коэффициент квазиконформности будет тем больше, чем больше отношение амплитуды волны к её длине.