О конфигурационном пространстве многоугольника

Пусть на плоскости дан некоторый n-угольник с известными длинами сторон. Изгибание многоугольника - это непрерывная его деформация с сохранением длин сторон. Наглядно это можно представить это так: полагаем, что многоугольник устроен как шарнирный механизм, т.е. его стороны могут свободно вращаться вокруг вершин. В ходе такого вращения длины сторон не изменяются. Но есть еще возможность параллельного переноса и вращения всего многоугольника как твердого тела. Такие деформации называются тривиальными изгибаниями. Чтобы их исключить, зафиксируем любую одну сторону, тогда весь многоугольник нельзя ни вращать, ни переносить, и всякие вращения отдельных сторон будут нетривиальными изгибаниями. Рассмотрим множество всех положений, которые может принять многоугольник. От каких параметров и какого их количества зависят эти положения. Пусть закрепленная сторона имеет вершины с номерами 1 и 2. Уберем пока сторону с номерами вершин n и 1, получим ломаную L с номерами вершин 1,2,3,…,n. Тогда каждая сторона (2,3), (3,4),….(n-1,n) свободно вращается вокруг вершины с меньшим номером, т.е. новые положения вершин зависят от n-2 углов $\phi_2, \phi_3, \mathrm{n}, \phi_{n-1}$, изменяющихся от 0 до 2π, причем при значениях $\phi = 0$ и $\phi = 2\pi$ положения совпадают. Следовательно, множество всех положений ломаной L можно представить как декартово произведение n-2 окружностей. а это называется (n-2)-мерным тором T_{n-2}, по аналогии с обычным двумерным тором вращения T_2. При этой операции концевая точка ломаной L с номером n будет иметь координаты (x_n, y_n), зависящие от значений (n-2) углов $\phi_2, \phi_3, \ldots, \phi_{n-1}$ (и, конечно, от известных фиксированных значений длин сторон ломаной).

Пусть вершина с номером 1 имеет координаты ($x_1=0$, $y_1=0$). Тогда появляется функция $F(\phi_2, \phi_3, \mathrm{n}, \phi_{n-1}) = x_n^2 + y_n^2$. Эта числовая функция определена на торе T_{n-2} и она должна иметь значение, равное квадрату длины l_n стороны между вершинами с номером 1 и n. Таким образом, конфигурационное пространство (КП) данного многоугольника или, другими словами, множество всех возможных положений этого многоугольника при его нетривиальном изгибании, можно представить как поверхность уровня $F=l_n^2$ функции F на торе T_{n-2}. Значит, размерность КП равна $n-3$, так как на n-2 переменных есть одна связь. В частности, КП для 4-х угольника будет одномерным множеством (линией или совокупностью линий), КП для 5-и угольника будет двумерным многообразием. Для них есть точное описание топологического строения в зависимости от длин сторон многоугольника, что реализовано в программе Екатерины Зепутряевой.