Теорема о четырех вершинах

1. В 1909 г. индийский математик Мухопадхияя (Mukhopadhyaya) доказал следующую теорему

Теорема 1.1 *У всякой замкнутой выпуклой кривой кривизна имеет по крайней мере четыре точки локального экстремума.*

Примером является эллипс, у которого ровно 4 вершины и являются точками экстремума его кривизны, откуда и пошло название теоремы. Нетривиальность теоремы заключается в том, что в общем случае функция на гладкой кривой, как на компакте, имеет две точки экстремума – точку минимума и точку максимума.

В те времена не обращали особого внимания на классы гладкости, считая все аналитическим. Сейчас мы можем уточнить теорему: достаточно предположить. что кривая имеет гладкость класса C^3,

Доказательство. Допустим, что кривизна имеет только две точки экстремума - точку минимума M и точку максимума. N. Соединим их отрезком MN. Ввиду выпуклости кривой, этот отрезок весь лежит внутри кривой и он разбивает кривую на две дуги C_1 и C_2. Проведем ось x-ов по отрезку MN и введем натуральный параметр s, считая $s = 0$ в точке M и $s = s_0$ в N. Всю длину кривой обозначим L, Пусть участок C_1 расположен ниже оси Ox, на нем $y < 0$ и $0 < s < s_0$. Тогда на участке C_2 имеем $y > 0$ и $s_0 < s < L$. Радиус-вектор $r(s)$ кривой записывается как $\{x(s), y(s)\}$.

Вспомним формулы Френе.

$$\frac{de_1}{ds} = ke_2,\ \frac{de_2}{ds} = -ke_1, \tag{1.1}$$

где $k(s)$ - кривизна кривой и $e_1 = r'(s) = \{x'(s), y'(s)\}, e_2 = \{-y'(s), x'(s)\}$. Отсюда имеем

$$x''(s) = -ky'(s), y''(s) = kx'(s)$$

и

$$\int_0^L ky'(s)ds = -\int_0^L x''(s)ds = 0.$$

Разобъем интеграл на два участка:

$$\int_0^L ky'(s)ds = \int_0^{s_0} + \int_{s_0}^L = 0 \tag{1.2}$$

и применим к каждому интегралу 2-ю теорему о среднем (которая часто называется теоремой Бонне). Эта теорема гласит. что если на отрезке $[a, b]$ даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, такие, что $f(x)$ непрерывна, $g(x)$ монотонна и ее производная существует и непрерывна, тогда в интервале $(a.b)$ найдется точка ξ, такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^{\xi} f(x)dx + g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx.$$

Кривизна $k(s)$ монотонна на каждом из отрезков $[0, s_0]$ и $[s_0, L]$, поэтому к интегралам в (2) применима теорема о среднем. Для первого из них имеем:

$$\int_0^{s_0} ky'(s)ds = k(0)\int_0^{\xi_1} y'(s)ds + k(s_0)\int_{xi_1}^{s_0} y'(s)ds = y(\xi_1)(k_0) - k(s_0)).$$

Аналогично, для 2-го интеграла находим

$$\int_{s_0}^{L} ky'(s)ds = k(s_0)\int_{s_0}^{\xi_2} y'(s)ds + k(0)\int_{xi_2}^{L} y'(s)ds = y(\xi_2)(k(s_0) - k(0)).$$

сложив два равенства, приходим к противоречию, так как слева будет 0, а справа положительное число ввиду неравенств $y(\xi_1) < 0$, а $y(\xi_2) > 0$.