Производящая функция

И.Х. Сабитов

1. Напомним, что для данной последовательности чисел c_n ее производящая функция *определяется* как формальный степенной ряд

$$\sum_n c_n x^n.$$

Если этот ряд сходится в какой-то области, тогда ее сумма будет определенной в этой области некоторой функцией $f(x)$, а если ряд нигде не сходится, все равно с рядом можно проводить некоторые формальные действия и соответственно получать некоторую информацию о поведении членов последовательности.. Наиболее распространённое использование производящих функций заключается в нахождении членов последовательности, если известна какая-нибудь связь между ними.

Рассмотрим два примера такой ситуации.

2. Числа Фибоначчи. Итальянский математик Леонардо Фибоначчи из Пизы (1180-1240) сформулировал следующую задачу по "бизнесу с кроликами". Пусть пара взрослых кроликов каждый месяц производит потомство из двух крольчат разного пола, которые через месяц становятся взрослыми и тоже готовы производить потомство; спрашивается, сколько пар кроликов будет у хозяина через год после покупки им одной пары взрослых кроликов? Считаем, что сначала у хозяина 0 пар кроликов. Затем он покупает одна пару кроликов и у него появляется одна пара кроликов. Через месяц от них рождается пара крольчат и у хозяина уже есть две пары. Еще через месяц будут три пары. их которых две пар готовы к производству крольчат. Значит, еще через месяц у хозяина будут уже 5 пар, из которых 3 пары взрослые и две пары малышей. Нетрудно вычислить, что к концу очередного месяца число пар будет равно сумме пар, которые были к концу предыдущих двух месяцев. Эту схему изменения количества пар кроликов можно формализовать следующим образом. Пусть дана последовательность чисел

$$v_0 = 0, v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 2, ..., v_n, ...$$

с условием

$$v_n = v_{n-2} + v_{n-1}, n \geq 2, \tag{1.1}$$

и надо найти значение v_n для произвольного n.

Задачу решаем методом производящих функций. Составим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = v_1 x + v_2 x^2 + ...$$

и обозначим эту сумму как $f(x)$. Имеем два равенства

$$xf(x) = v_1 x^2 + \sum_{k=2}^{\infty} v_k x^{k+1} = x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} v_{n-1} x^n = \sum_{n=2}^{\infty} v_{n-1} x^n$$

$$x^2 f(x) = x^3 + \sum_{k=3}^{\infty} v_{k-1} x^{k+1} = \sum_{n=2}^{\infty} v_{n-2} x^n$$

(мы выполнили операцию *изменения индекса суммирования*, чтобы переменная x всюду была одной и той же степени n – проверьте правильность появления нескольких первых степеней x). Сложив эти равенства и используя условия $v_0 = 0$ и (1.1) , получим

$$(x + x^2) f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} v_n x^n = -v_1 x + \sum_{n=1}^{\infty} v_n x^n = -x + f(x),$$

откуда узнаем явный вид функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}. \tag{1.2}$$

Теперь остается разложить эту функцию в ряд Маклорена, представив $f(x)$ в виде суммы для двух геометрических прогрессий

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{a}} - \frac{1}{1 + \frac{x}{b}} \right),$$

где

$$a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

и в итоге получаем ответ

$$v_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Обратите внимание, что при выводе формул мы не предполагали априори сходимость ряда для $f(x)$, так как проделанные вычисления справедливы и без этого предположения.

2. Числа Каталана. Бельгийский математик Эжен-Шарль Каталан (1814-1894) нашел формулу, позволяющую вычислить число триангуляций выпуклого n-угольника с использованием только его сторон и непересекающихся диагоналей. В интернете есть информацию, что его формула используется в более чем 60 задачах из различных областей математики, главным образом, комбинаторики. Для нас важно ее геометрическое содержание. Для многоугольников с малым числом вершин число их различных триангуляций считается простыми явными построениями: у треугольника триангуляция одна, для 4-х угольника триангуляции получаются проведением одной из его диагоналей, значит, число триангуляций равно 2, для 5-угольника каждая его триангуляция получается проведением диагоналей из одной из вершин, значит, существуют всего 5 триангуляций. Но для 6-угольника перебор всех его триангуляции уже требует некоторой внимательной работы, чтобы убедиться, что не пропущен ни один возможный вариант триангуляции.

Как для чисел Фибоначчи важно было знать закон их взаимосвязи (1.1), так и для чисел Каталана найдем соответствующую связь. Пусть для $(n+2)$- угольника сере C_n j обозначено число Каталана. Примем по определению, что число $C_0 = 1$. По сказанному выше имеем $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 5$. Пусть дан некоторый $(n+2)$- угольник, вершины которого пронумерованы в некотором циклическом порядке от 1 до $n+2$. В любой его триангуляции любая его сторона входит в какой-нибудь треугольник триангуляции. Возьмем сторону с номерами вершин 1 и 2. Рассмотрим треугольник с основанием $[1,2]$ и с вершиной под некоторым номером $k, 3 \leq n+2$. Этот треугольник разбивает весь многоугольник на две части, одна часть P_1 с $(k-3)+2$ вершинами $2, 3, ...k$, другая часть P_2 с ;$(n-k+2)+2$ вершинами $1, k, k+1, ..., n+2$. Ни одна вершина из части P_1 не соединяется ни с какой вершиной из части P_2, иначе такая диагональ должна бы пересечься с диагоналяит $[1,k]$ и $[2,k]$, что запрещено. Значит, дальнейшее разбиение исходного многоугольника на треугольники происходит отдельно в P_1 и P_2. А число триангуляций в P_1 равно C_{k-3}, а в P_2 оно равно C_{n-k+2}. Суммируя по всем возможным значениям k, получаем, что

$$C_n = \sum_{k=3}^{n+2} C_{k-3}C_{n-k+2} = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + ... + C_{n-1}C_0, n \geq 1, \qquad (1.3)$$

и тем самым мы получили нужную связь между значениями C_i (аналог формулы (1.1)).

Согласно общей теории. составляем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

и обозначим эту сумму как $f(x)$. Мы не будем выводить формулу для выражения вида $f(x)$, как это сделали для чисел Фибоначчи (заметим только как намек, что соотношение (1.3) похоже на коэффициенты, получаемые при степенях x при умножении многочленов), а предложим готовый ответ и проверим, как с его помощью получить формулу для чисел Каталана.

Утверждается, что производящая функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Имеем

$$f^2(x) = \frac{1 + 1 - 4x - 2\sqrt{1-4x}}{4x^2} = \frac{1}{x}f(x) - \frac{1}{x}. \qquad (1.4)$$

.Далее,

$$f^2(x) = f(x) \cdot f(x) = (C_0 + ... + C_{n-1}x^{n-1} + ...)(C_0 + ... + C_{n-1}x^{n-1} + ...) =$$

$$C_0C_0 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + ... + (C_0C_{n-1} + ... + C_{n-1}C_0)x^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^{n-1}.$$

С учетом (1.4) получаем

$$f(x) - 1 = xf^2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n. \qquad (1.5)$$

Напомним разложение Маклорена

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha + ... + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-(n-1))}{n!}\alpha^n + ... =$$

$$1 + \frac{1}{2}\alpha + ... + (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!}{n!(n-2)!2^{2n-2}}\alpha^n + ...$$

Применяя его к $f(x)$ при $\alpha = -4x$ находим

$$f(x) = \frac{1 - (1 - 2x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!4}{n!(n-2)!} x^n + ...}{2x}.$$

Отсюда и из (1.5) получаем

$$xf^2(x) = f(x) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!2}{n!(n-2)!} x^{n-1} =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n.$$

значит,

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$$

Вот теперь можем найти число триангуляций 6-угольника. Так как $6 = 4 + 2$, то

$$C_4 = \frac{8!}{5!4!} = 14.$$

Нерешенная задача: пусть внутри многоугольника поставлены конечное число точек, и триангуляцию нужно делать, используя эти точки тоже как вершины треугольников. Можно ли указать формулу для количества триангуляций? Очевидно, будет иметь значение расположение добавленных точек.