Обобщение леммы Лежандра-Коши

И.Х. Сабитов

1. Напомним лемму Лежандра Коши Ее обобщение читается так

Пусть C - плоская дуга кривизны $k(s)$ с концевыми точками A и B, образующая вместе с хордой AB замкнутую выпуклую кривую. Пусть C^* - дуга той же длины с тем же натуральным параметром s и кривизны $k^*(s) \leq k(s)$. Если d и d^* - длины хорд, соединяющих их концевые точки, тогда $d \leq d^*$. Более того, если $d = d^*$, тогда дуги C и C^* конгруентны.

Доказательство. Обозначим Γ и Γ^* касательные индикатрисы дуг C и C^* соответственно (т.е. образы единичных касательн. Пусть P_1 и P_2 - пара точек на Γ н P_1^* P_2^* - соответствующие им точки на Γ^*. Обозначим $\widehat{P_1P_2}$ $\widehat{P_1^*P_2^*}$ длины дуг, и пусть $\overline{P_1P_2}$ и $\overline{P_1^*P_2^*}$ - расстояния вдоль окружности между точками P_1 и P_2 и, соответственно, между P_1^* и P_2^* (длина дуги равна интегралу от $d\varphi$). Всегда имеем неравенства

$$,\overline{P_1P_2} \leq \widehat{P_1P_2}, \quad \overline{P_1^*P_2^*} \leq \widehat{P_1^*P_2^*},$$

и, в частности,

$$\overline{P_1P_2} = \widehat{P_1P_2}, \tag{1.1}$$

при условии, что $\overline{P_1P_2} \leq \pi$.

Пусть Q - точка на C, в которой касательная к C параллельна хорде AB. Пусть P_0- соответствующая ей точка на Γ. Тогда условие $\overline{P_0P} \leq \pi$ выполнено для всех точек $\in \Gamma$. Если P_0^* - соответствующая P_0 точка на Γ^*, тогда

$$\overline{P_0^*P^*} \leq \overline{P_0P}, \tag{1.2}$$

следовательно,

$$\cos\overline{P_0^*P^*} \geq \cos\overline{P_0P}, \tag{1.3}$$

так как косинус монотонно убывает на $(0, \pi)$. Расположим C таким образом, чтобы хорда AB была параллельна оси Ox. Тогда точка P_0 будет иметь координаты $(1, 0)$, точка P имеет координаты $(x'(s), y'(s))$ и $\cos\overline{P_0P} = x'(s)$. Интеграл

$$\int_0^L dx = \int \cos\overline{P_0P}ds = x_B - x_A = d \tag{1.4}$$

даст длину хорды AB. В случае Γ^* мы таким же образом вычисляем длину проекции C^* на касательную в точке Q^*, которая не больше чем расстояние между концаи, т.е.

$$d^* \geq \int_0^L \cos \overline{P_0^* P^*} ds \geq \int \cos \overline{P_0 P} ds = d$$