К геометрии плоских кривых

1. Напомним, что кривая считается кривой гладкости C^n, если существует такая ее параметризация $r(t) = \{x(t), y(t)\}$, в которой координатные функций $x(t)$ и $y(t)$. имеют гладкость класса C^n. Но важным дополнением является требование *регулярности* ее параметрического представления, которое заключается в условии, что $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, т.е. производные $x'(t)$ и $y'(t)$ не должны обращаться одновременно в нуль. Наиболее простой и информативной для кривой является ее *натуральная* параметризация, когда в качестве параметра точки выбирается длина дуги s, отсчитываемая до этой точки от некоторой точки кривой. Характерным признаком натуральности выбранной параметризации является выполнение равенства $x'^2(s) + y'^2(s) = 1$ для всех s. Это значит, тогда касательный вектор к кривой $\dfrac{dr}{ds} = e_1 = \{x'(s), y(s)\}$ является единичным. Для выбора единичной нормали e_2 имеются два варианта $\{y'(t), -x'(t)\}$ или $\{-y'(t), x'(t)\}$. Обычно выбирается второй вариант (чтобы пара $(e_1, e_2$ была правой). Для всякого единичного вектора есть замечательное свойство, что он ортогонален своей производной. Значит, предполагая, что кривая имеет гладкость класса C^2, получаем $\dfrac{de_1}{ds}$ параллелен e_2, поэтому существует функция $k(s)$, такая, что

$$\frac{de_1}{ds} = ke_2, \ \frac{de_2}{ds} = -ke_1. \tag{1.1}$$

Эти формулы называются *формулами Френе* для плоской кривой. Коэффициент $k(s)$ называется *кривизной* кривой. Сейчас мы выясним его геометрический смысл. Для этого сначала вычислим значение $k(s)$ через производные радиус-вектора кривой. Имеем равенства

$$k(s) = \frac{de_1}{ds}e_2 = (x''(s), y''(s))(-y'(s), x'(s)) = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s). \tag{1.2}$$

Пусть кривая обозначена как Γ, пусть точка $M_0 \in \Gamma)$ имеет координаты $(0, 0)$ и пусть в этой точке $y'_s(0) = 0, x'_s(0) = 1$. Тогда в близкой точке $M(s)$ касательная к кривой имеет направление вектора $\{x'(s), y'(s)\}$ и угол φ между касательной и направление оси Ox вычисляется по формуле $\varphi(s) = arctg\dfrac{y'(s)}{x'(s)}$. Вычисляя производную $\varphi'(s)$ по s и учитывая, что $x'^2(s)+y'^2(s)=1$, находим, что

$$\frac{d\varphi}{ds}=x'(s)y''(s)-y'(s)x''(s)=k(s),$$

т.е. кривизна k равна *скорости изменения угла* между направлением касательной к кривой и некоторым фиксированным направлением, например, направлением оси Ox. Поэтому чем меньше k (по модулю), тем ход кривой ближе к ходу прямой (т.е. кривая искривляется мало или, можно сказать, искривляется медленно), чем кривизна больше. тем быстрее поворачивается касательная, это значит, что быстро поворачивается и кривая. Так как угол φ измеряется в радианах, т.е. безразмерной величиной, то размерность кривизны равна см$^{-1}$ (если длины измерять в сантиметрах).

Для окружности в функции натурального параметра s

$$x=R\cos\frac{s}{R},\ y=R\sin\frac{s}{R},\ 0\leq s\leq 2\pi R,$$

формула (1.2) дает, что у окружности кривизна $k(s)\equiv\frac{1}{R}$, и ее размерность как раз и равна см$^{-1}$.

При изменении ориентации кривой кривизна изменяет свой знак (при условии, что по-прежнему считаем длину дуги возрастающей при обходе кривой). ,. Проверим это на примере окружности. Уравнение окружности при ее обходе по часовой стрелке имеет вид .

$$x=R\cos\frac{s}{R},\ y=-R\sin\frac{s}{R},\ 0\leq s\leq 2\pi R$$

и по формуле (1.2) имеем $k=-1/R$.

Изменение поворота касательной является основой определения индекса замкнутой кривой Γ, поэтому можем утверждать, что для нее

$$Ind_\Gamma=\oint_\Gamma k(s)ds. \tag{1.3}$$

Если кривая локально задана в виде графика C^2-гладкой функции $y=f(x)$, тогда ее кривизна вычисляется по формуле

$$k(x)=\frac{f''(x)}{(1+f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}.$$

Отсюда, в частности, имеем, что если кривизна кривой всюду равна нулю, то такая кривая является прямой или отрезком прямой.

Вспоминая определения функций, выпуклых вверх или вниз, получаем, что при неравной нулю кривизне кривая локально лежит выше или ниже касательной, т.е. по одну ее сторону. Договоримся, что мы обходим кривую так, чтобы касательная локально оставалась справа по ходу обхода. Среди гладких замкнутых кривых выделяют тот класс кривых, которые на всем своем протяжении локально остаются слева от касательной (или, по-другому, касательная остается справа по ходу обхода). Тогда кривизна кривой не может изменять свой знак, иначе в точке изменения знака кривой имеем точку перегиба и касательная расположится по разные стороны от кривой. Покажем, что кривизна всегда будет неотрицательной. Пусть $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma$ - точка кривой, в которой ордината y достигает минимума, равного y_0. Тогда вся кривая лежит выше (точнее. не ниже) прямой) $y = y_0$, являющейся касательной. Так как касательная должна оставаться справа по ходу обхода кривой, мы должны двигаться в сторону возрастания абсциссы x. Мы знаем, что кривая лежит выше касательной, если она выпукпа вниз; а это бывает,только если $f''(x_0) \geq 0$. Если $f''(x_0) > 0$, то доказано, что кривизна кривой всюду неотрицательна. Если же $f''(x_0) = 0$, то повернув оси координат, можем добиться. чтобы в новых осях была точка с положительной второй производной от соответствующего аналога функции $f(x)$. Значит, доказано, что у кривых с указанным свойством расположения касательных кривизна всюду неотрицательна.

Гладкую кривую называют выпуклой в целом, если она вся лежит по одну сторону от каждой своей касательной. Более точное определение следующее. Пусть гладкая кривая обозначена как Γ, точка на ней M. Кривая называется строго выпуклой, если для каждой ее точки M множество $\Gamma \setminus M$ лежит строго по одну сторону от касательной к Γ в M, не пересекаясь с ней. Если же есть точка, для которой касательная T пересекается с кривой еще в других точках, кроме M, то кривая должна располагаться по одну сторону от T в нестрогом смысле и пересечение $\Gamma \cup T$ должно быть связным, т.е. отрезком или интервалом, если M - внутренняя точка кривой. Напоминаем, что если кривая имеет самопересечение, то точка самопересечения считается за две точки, так как она имеет два различных прообраза. Это уточнение не позволяет считать дважды проходимую окружность с уравнением $x = \cos 2t, y = \sin 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$, выпуклой. хотя вся она лежит строго по одну сторону от каждой своей касательной. Очевидно, выпуклые в целом кривые являются и локально выпуклыми.

Верны следуюшие утверждения.

1) Если замкнутая кривая жордановая и локально выпуклая, тогда она является выпуклой и в целом.

2) Если замкнутая кривая локально выпуклая и имеет индекс ± 1, тогда она выпуклая в целом.

3) Замкнутая кривая, выпуклая в целом, является жордановой.