И.Х. Сабитов

Замена переменных

Замена переменных - часто встречающаяся операция, она особенно часто используется в теории дифференциальных уравнений в целях упрощения уравнений. В задачнике Б.П. Демидовича во введении к соответствующему параграфу есть готовые формулы для перехода от исходных переменных к новым переменным, запомнить их можно, конечно, но лучше понять, откуда они появились и тогда их использовать с пониманием, и на этой основе научиться выражать и производные высших порядков от исходных функций через производные от новых функций. Получение этих основано на свойстве независимости (или инвариантности) формы первого дифференциала от того, являются ли аргументы функции зависимыми или независимыми переменными.

Пусть дана тройка переменных (x, y, z), в которой переменная z является функцией от двух первых переменных, так что $z = z(x, y)$. Надо перейти к новой тройке переменных (u, v, w), в которой переменная w считается функцией от (u, v), т.е. $w = w(u, v)$. Перейти к новым переменным означает, что все выражения, содержащие (x, y, z) и производные функции z по x, y нужно преобразовать в выражения, в которых участвуют только (u, v, w) и производные функции w по u, v.

Рассмотрим первый случай: переход к новым переменным дан в виде

$$x = f(u, v, w) \tag{1}$$
$$y = g(u, v, w) \tag{2}$$
$$z = h(u, v, w). \tag{3}$$

Записываем этот переход в следующем виде

$$(x, y, z = z(x, y)) \longrightarrow (u, v, w = w(u, v)).$$

Представим дифференциал dz через dx, dy и далее через du, dv, с учетом соотношений (1)-(2):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw) + \frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv + \frac{\partial g}{\partial w}dw) = Adu + Bdv, \tag{4}$$

где

$$A = \frac{\partial z}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}) + \frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}),\ B = \frac{\partial z}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}) + \frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v})$$

(учтено, что $dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv$).

Теперь вычислим dz с учетом соотношения (3):

$$dz = \frac{\partial h}{\partial u}du + \frac{\partial h}{\partial v}dv + \frac{\partial h}{\partial w}dw = Cdu + Ddv, \tag{5}$$

где

$$C = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},\ D = \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Мы получили два представления (4) и (5) дифференциала dz с независимыми дифференциалами du и dv. Приравнивая в них коэффициенты при du и dv, получаем

$$A = C\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}) + \frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}) = \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u} \tag{6}$$

$$B = D\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}) + \frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}) = \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}. \tag{7}$$

Решая полученную относительно $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ линейную систему, получаем искомые представления для $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через производные $\frac{\partial w}{\partial u}$ и $\frac{\partial w}{\partial v}$).

Теперь для выражения производных 2-го и более высокого порядка через новые переменные используем знание представления производных первого порядка. Именно, пусть нам известно, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = R(u, v, w, U, V),\ \frac{\partial z}{\partial y} = T(u, v, w, U, V), \tag{8}$$

где

$$R = \frac{\partial w}{\partial u},\ T = \frac{\partial w}{\partial v}. \tag{9}$$

Находим дифференциал

$$d(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv + \frac{\partial f}{\partial w}dw) +$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv + \frac{\partial g}{\partial w}dw) = Ldu + Mdv,$$

где

$$L = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u})$$
$$M = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}).$$

Теперь находим $d(\frac{\partial z}{\partial x})$ из его представления через (6) и (7). Имеем

$$d(\frac{\partial z}{\partial x}) = \frac{\partial R}{\partial u}du + \frac{\partial R}{\partial v}dv + \frac{\partial R}{\partial w}dw + \frac{\partial R}{\partial U}dU + \frac{\partial R}{\partial T}dV = Pdu + Qdv,$$

где

$$P = \frac{\partial R}{\partial u} + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial R}{\partial U}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial R}{\partial V}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}$$
$$Q = \frac{\partial R}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial R}{\partial U}\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial R}{\partial V}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\ .$$

Снова приравняем коэффициенты $L = P, M = Q$ и получим для $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ линейную систему, решив которую выразим их через новые переменные. Работая с $T(u, v, w, U, V)$ аналогичным образом находим и
$displaystyle frac \partial^2 z \partial y^2$.

Частные случаи.

1) Функция не изменяется, но участвует в замене аргументов. Тогда $h(u, v, w) = w$, т.е. везде $w = z$ и уравнения (6) и (7) принимают вид

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}) + \frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}) = \frac{\partial z}{\partial u} \tag{10}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}) + \frac{\partial z}{\partial y}(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}) = \frac{\partial z}{\partial v}. \tag{11}$$

2) Функция не изменяется и не участвует в замене аргументов. Тогда уравнения (6)-(7) принимают вид

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} \tag{12}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v}. \tag{13}$$

Соответственно, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ находятся из линейных уравнений (10)=(13).

Рассмотрим второй случай, когда замена переменных осуществляется по закону

$$u = F(x, y, z) \tag{14}$$
$$v = G(x, y, z) \tag{15}$$
$$w = H(x, y, z), \tag{16}$$

т.е. рассматривается такой же переход $(x, y, z = z(x, y)) \longrightarrow (u, v, w = w(u, v))$, но на этот раз дана зависимость новых координат от исходных (которые обычно называют "старыми"). Если в этом случае можем найти обратное отображение, то приходим первому случаю. Но можно поступить аналогично предыдущему. Найдем дифференциал dw двумя способами, первый раз ищем как от функции аргументов (u, v):

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv = \frac{\partial w}{\partial u}(\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz) +$$
$$+\frac{\partial w}{\partial v}(\frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial z}dz) = a\ dx + e\ dy,$$

где коэффициенты a и e вычисляются с учетом равенства $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy.$ Затем вычисляем

$$dw = dH(x, y, z) = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial z}dz$$

снова с учетом равенства $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$. Получаем соотношение вида $dw = b\ dx + c\ dy$. Приравняв коэффициенты $a = b, e = c$, для нахождения производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$ приходим к линейной системе. Но при этом переменные x, y, z могут еще остаться, поэтому этот способ пригоден только для частных случаев, когда уравнение, содержащее $x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, таково, что после замены $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ на их выражения через $\frac{\partial w}{\partial u}, frac\partial z\partial v$ в уравнении все x, y, z исчезают, иначе отображение $(14) - (16)$ все равно придется обращать.

Нахождение вторых производных в случае замены (14)-(16) проще, чем в случае замены (1)-(3). Действительно, мы знаем выражение первых производных через $(x, y, z, u, v, w, w'_u, w'_v)$, тогда для представления производных от первых производных через первые и вторые производные $w'_u, w'_v, w''_{uu}, w''_{uv}, w''_{vv}$ достаточно заметить, что имеем равенства

$$(w'_u)'_x = w''_{uu}u'_x + w''_{uv}v'_x,\ (w'_u)'_y = w''_{uu}u'_y + w''_{uv}v'_y,\ (w'_v)'_x = w''_{vu}u'_x + w''_{vv}v'_x,\ (w'_v)'_y = w''_{vu}u'_y + w''_{vv}v'_y,$$

через которые можно найти нужные выражения для вторых поизводных.

Итак, общий вывод: при замене переменных вида (1)-(3) надо искать два представления дифференциала dz - сначала как функции переменных x и y с учетом равенств (1)-(2), а затем как функции (3), и приравнять коэффициенты при дифференциалах du и dv. При замене вида (14)-(16) надо искать два представления дифференциала dw - сначала как функции переменных u и v с учетом равенств (14)-(15), а затем как функции (16), и приравнять коэффициенты при дифференциалах dx и dy.

Пример. Как пример, решим задачу № 3513 из задачника Демидовича. Преобразовать уравнение

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x} \tag{17}$$

заменой переменных

$$u = \frac{x}{y} = F(x, y, z),\ v = x = G(x, y, z),\ w = xz - y = H(x, y, z).$$

Видим, замена переменных вида (14)-(16). Вообще говоря, имеем частный случай - замена аргументов от функции не зависит. Но будем решать как общий случай : находим dw двумя способами.

Имеем

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{ydx - xdy}{y^2} + \frac{\partial w}{\partial v}dx = (w'_u\frac{1}{y} + w'_v)dx - \frac{xw'_u}{y^2}dy.$$

С другой стороны, из $w = H$ имеем

$$dw = zdx + xdz - dy = (z + xz'_x)dx + (xz'_y - 1)dy.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получаем

$$xz'_y - 1 = -\frac{xw'_u}{y^2} \Rightarrow z'_y = \frac{1 - \frac{xw'_u}{y^2}}{x} = \frac{y^2 - xw'_u}{xy^2}. \tag{18}$$

Дальше можем искать $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ по описанному выше методу непосредственным вычислением на основании известного из (18) вида z'_y и известных данных правил замены переменных. Имеем

$$(w'_u)'_y = w''_{uu}u'_y + w''_{uv}v'_y = -w''_{uu}\frac{x}{y^2},$$

поэтому

$$z''_{yy} = \left(\frac{y^2 - xw'_u}{xy^2}\right)'_y = -(\frac{w'_u}{y^2})'_y = w''_{uu}\frac{x}{y^4} + 2\frac{w'_u}{y^3}.$$

Подставим найденные значения z'_y и z''_{yy} в уравнение (17) и после сокращений и приведения подобных получим уравнение

$$\frac{x}{y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0 \Rightarrow w''_{uu} = 0.$$

Видим, уравнение, во-первых, сильно упростилось и его можно решить (кстати, найдите общий вид решения $z(x, y)$), во-вторых. как было отмечено выше, иногда можно обойтись без обращения отображения (14)-(16), т.е. нам не понадобилось искать вид зависимости x, y, z от новых переменных.

Задание. Так как на самом деле в данном примере обратное отображение находится легко, замените преобразование (14)-(16) на преобразование вида (1)-(3) и таким образом преобразуйте то же уравнение (17).