И.Х. Сабитов

Задачи № 3202 и №3205

В задаче № 3205 (Демидович) предлагается доказать непрерывность функции двух переменных $f(x, y)$ при условии, что она непрерывна по каждой переменной в отдельности с дополнительным свойством непрерывности по y равномерно относительно переменной x,

Сначала напомним, что значит *равномерная непрерывность по y относительно переменной* x, Напишем определение непрерывности по у в произвольно взятой точке (x_0, y_0) из рассматриваемой области:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0:\ \forall y \text{ с } 0 < |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

В этом определении число δ зависит от взятого ε, y_0 и, вообще говоря, и от значения x_0. Так вот, если существует δ, зависящее *только* от ε и не зависящее от выбора значения x_0, то в этом случае говорят, что свойство непрерывности по y выполняется равномерно относительно x. Значит, в случае непрерывности $f(x, y)$ по y равномерно относительно x это свойство выражается следующей записью

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon, y_0) > 0:\ \forall y \text{ с } 0 < |y - y_0| < \delta \text{ и } \forall x \Rightarrow |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon, \tag{1}$$

Теперь решение задачи получается следующими рассуждениями. Непрерывность в области означает непрерывность в каждой ее точке. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – произвольно выбранная точка. Напишем факт непрерывности функции $f(x, y)$ в точке M_0 по x:

$$\forall\ \frac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists\ \delta_1(\varepsilon,\ x_0,\ y_0):\ \forall x \text{ с } 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2}$$

Затем для того же $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ напишем аналог соотношения (1) с соответствующим $\delta_2(\varepsilon)$:

$$\forall\frac{\varepsilon}{2}\ \exists\delta_2(\varepsilon,\ y_0) > 0:\ \forall y \text{ с } 0 < |y - y_0| < \delta \text{ и } \forall x \Rightarrow |f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

Выберем $\delta(\varepsilon,\ x_0,\ y_0) = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для прямоугольной окрестности точки M_0 с $|x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \delta$ имеем неравенства:

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \le |f(x, y) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

что и означает непрерывность $f(x, y)$ как функции двух переменных.

Теперь на примере функции из № 3202 покажем, что действительно бывают функции, которые непрерывны отдельно по каждой переменной, но ни по одной переменной нет равномерной непрерывности относительно другой. Дана функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, \text{если } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, \text{если } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Отметим. что эта функция прекрасная всюду, кроме точки $(0, 0)$, поэтому всякое "плохое" с ней может быть только в области, содержащей точку (0, 0. Изучим характер ее непрерывности по переменной y. Запишем определение ее непрерывности по y точках (x, y) с $y = y_0 = 0$:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon, x) > 0:\ \forall y \text{ с} 0 < |y| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x, 0)| < \varepsilon.$$

Имеем (для случаев $x > 0$)

$$f(x, y) - f(x, 0)| = \frac{2xy}{x^2 + y^2} < \frac{2x}{x^2 + y^2}\delta < \varepsilon.$$

$$\delta < \frac{\varepsilon(x^2 + y^2)}{2x} < \frac{\varepsilon(x^2 + \delta^2)}{2x}.$$

Решаем это неравенство и получаем условия для допустимых значений δ:

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon x}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

и видим, что при $x \to 0$ нужные значения δ при данном ε становятся сколь угодно малыми, т.е. нужного значения $\delta > 0$, пригодного для всех $x > 0$, не существует - равномерности относительно x свойства непрерывности $f(x, y)$ по y нет! .

На занятии при разборе задачи № 3205 студентами был поставлен интересный вопрос - эта задача показывает, что непрерывности функции по каждой переменной в отдельности и при выполнения условия равномерности непрерывности функции по одной переменной относительно другой является достаточным для непрерывности функции как функции двух переменных; спрашивается, является ли это и необходимым? Пример № 3202 показывает, что в некомпактной области может быть непрерывность по двум переменным без этого свойства, а в случае компактной области это свойство, скорее всего, необходимо, но это надо аккуратно доказать по аналогии с теоремой Кантора для функций от многих переменных. .