МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОСУДАРСТВ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Захаров В.К.

«Война − это акт насилия, имеющий целью заставить противника выполнить нашу волю». [*Клаузевиц К.* О войне. Части 1-4. − М.: РИМИС, 2009. С. 26.]

Приведённое выше определение войны является красивым, но совершенно бесполезным для создания какого-либо действительного и, тем более, формализованного представления о войне между государствами. Поэтому первоначальный интерес к созданию математической модели войны возник у автора после выхода в свет книги [1], посвящённой **имитационному** моделированию Пелопонесской войны.

Однако действительное побуждение к созданию, сначала формализованных, а затем и оптимизационных математических моделей войны возник у автора только после создания автором в 2011 году *общей оптимизационной математической модели государства в широком смысле* (*т.е. государства-страны*) [2-7].

Продвижение к построению на этой основе *общей математической оптимизационной модели взаимодействия двух государств* наступило только в 2019 году, когда удалось математически формализовать ***мирное и военное подчинительные взаимодействия двух государств*** [8-16]. Именно эти виды взаимодействия оказались наиболее заметными в истории XX и XXI веков.

Цель и мирного, и военного подчинительного взаимодействия одна и та же. Это − **достижение наибольшего расхождения** совокупных достояний взаимодействующих государств к концу некоторого промежутка времени **в пользу одного из них**. Однако способы управления при этих взаимодействиях могут качественно отличаться друг от друга.

Часть 1. Математическая модель устройства и деятельности государства

АРХЕТИП ГОСУДАРСТВЕННОГО УСТРОЕНИЯ. НОМ КАК ОБЩАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИСТОРИЧЕСКИХ И СОВРЕМЕННЫХ ГОСУДАРСТВ

Среди всех (бытийных) обществ современного мира выделяются такие важные общества, как *государства* (*в широком смысле*) или иначе *управляемые страны*. Несмотря на разницу в размерах, все они устроены и действуют примерно одинаково.

Более того, если мы погрузимся в глубочайшую древность, когда люди жили только малыми семьями, и будем подниматься вверх по исторической лестнице, проходя этапы большой семьи, рода и племени, то мы заметим, что и эти организованные социально-исторические образования осуществляли в **тех условиях** бытие, **близкое** к бытию современных государств. И поэтому возникает естественное предположение, что современные государства **устроены и действуют по одному архетипу**, который зародился ещё на этапе малой семьи.

Этот архетип можно назвать ***архетипом государственного устроения***, а все социально-исторические образования, такие как малые семьи, большие семьи, роды, племена, простые государства, державы и империи, можно называть ***номами*** **(**от греческого слова «*номос*» означающего «обычность, устроенность» и, в частности, управляемую устроенность областей в Древнем Египте, Древней Греции и в современной Греции).

Архетип государственного устроения состоит в том, что каждое ***государство является сложным трёхуровневым бытийным обществом***, устроенным в виде совокупности ***основных*** **(*под*)*систем***, связанных друг с другом в единую систему и зависящих друг от друга так, что без каждой из этих систем ном существовать не может. **Основными системами государства** являются: *содержательная, обеспечительная, сочетательная, совокупная распорядительная* и *верховная системы*.

В ***содержательной системе C*** осуществляется рождение *жителей государства* и обретение *жизненных средств* (*предметов, услуг и пр.*), непосредственно предназначенных для рождения и выживания жителей государства. ***Обеспечительная система D*** обеспечивает указнóе целевое движение внутри государственных и вне государственных достояний посредством побуждения (принуждения и убеждения) единиц государства к выполнению соответствующих установлений (институций). ***Сочетательная система E*** осуществляет указнóе целевое сочетание всех видов движения внутри государственных и вне государственных достояний посредством производства, сбора, хранения и раздачи денег, статистических сведений, стратегических запасов и т.п. ***Распорядительные системы F***, ***G*** и ***H*** ведают (управляют) деятельностью содержательной, обеспечительной и сочетательной систем, соответственно. Поэтому их можно именовать ***содержательно-распорядительной системой***, ***обеспечительно-распорядительной системой*** и ***сочетательно-распорядительной системой***, соответственно. Они образуют ***совокупную распорядительную систему***. ***Верховная система P*** ведает (управляет) деятельностью совокупной распорядительной системы.

Содержательная, обеспечительная и сочетательная системы связаны с *природной средой* A_1, *внешней надприродной средой* A_2 и *внутренней теневой средой* A_3.

Используемые государством и производимые им достояния подразделяются на следующие ***виды***: *содержательное* (код 1), *распорядительное* (код 2), *верховное* (код 3), *обеспечительное* (код 4), *сочетательное* (код 5).

Изображение имеющихся в государстве систем, достояний и потоков дано ниже на рисунке 1.

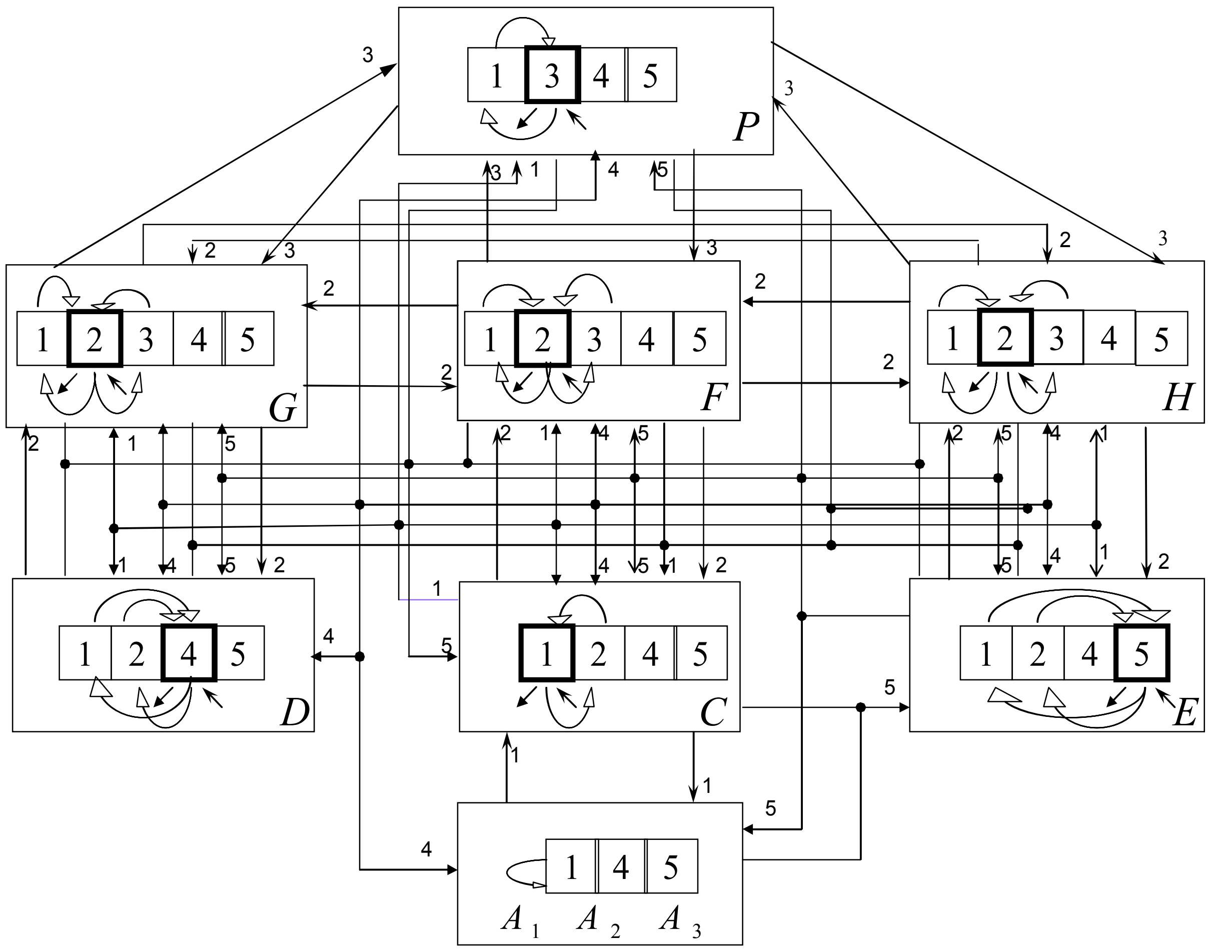

Рис. 1. Схема систем, достояний и потоков государства

Потоки S_{MN}^{mn} называются ***передаточными***. Потоки S_{MM}^{mn} при $m \neq n$ называются ***преобразовательными***.

На рисунке 1 основные достояния систем выделены квадратиком с жирным контуром. Дугами указаны **преобразовательные потоки**. **Передаточные потоки** показаны стрелками с указанием кодов на концах стрелок. Потоки передачи сочетательного достояния из сочетательной системы *E* во все остальные системы нома указаны разветвляющейся сетью стрелок с кодом 5 на конце. Потоки передачи содержательного достояния из содержательной системы *C* во все остальные системы нома указаны разветвляющейся сетью стрелок с кодом 1 на конце. **Произведённые потоки** обозначены короткими косыми входящими стрелочками, а **изведённые** – выходящими.

В содержательной системе *C* выделим ***казённую* (*бюджетную*) *часть*** C_b и ***не казённую* (*автономную*) *часть*** C_a.

Денежный ссудный поток L_{EC}^{55} передаётся учётной системой содержательной системе **на условии возврата с процентом *r100%*.** (здесь буква *L* от слова «loan»). Он в конечном итоге возвращается в учётную систему вместе с процентной частью от ссуды, т.е. в виде ***возвратно-ссудного сбора*** $L_{EC}^{55} + rL_{EC}^{55}$. Число *r100%*

называется ***установочной ставкой для эмиссионного денежного центра***: оно показывает, что содержательная единица, беря деньги в долг в количестве W, должна будет в конечном итоге отдать эмиссионному денежному центру деньги в количестве $W + rW$. Чаще всего установочная ставка удовлетворяет неравенству $0 < r < 1$.

Считаем, что денежные казённо-раздаточные потоки S_{EM}^{55} для $M=C_b,D,E,F,G,H,P$ состоят из двух частей: из ***бюджетной части*** B_{EM}^{55} (здесь буква B от слова «budget») и ***установочно-ссудной части*** $q_i r L_{EC}^{55}$, т.е.

$$S_{EC_b}^{55} = B_{EC_b}^{55} + q_0 r L_{EC}^{55}$$

$$S_{ED}^{55} = B_{ED}^{55} + q_1 r L_{EC}^{55}$$

$$S_{EE}^{55} = B_{EE}^{55} + q_2 r L_{EC}^{55}$$

$$S_{EF}^{55} = B_{EF}^{55} + q_3 r L_{EC}^{55}$$

$$S_{EG}^{55} = B_{EG}^{55} + q_4 r L_{EC}^{55}$$

$$S_{EH}^{55} = B_{EH}^{55} + q_5 r L_{EC}^{55}$$

$$S_{EP}^{55} = B_{EP}^{55} + q_6 r L_{EC}^{55},$$

где $q_0 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 = 1$.

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ГОСУДАРСТВА

Число $W_M^m(t)$ назовём *оценённым совокупным достоянием вида m системы M в момент времени t*. Напомним, что число $\dot{W}_M^m(t)$ называется *скоростью изменения* (*оценённого*) *совокупного достояния вида m системы M в момент времени t*.

Поток $S_{LM}^{lm}(t)$ назовём *входящим в систему M*, поток $S_{MN}^{mn}(t)$ назовём *выходящим из системы M*, а потоки $S_{MM}^{lm}(t)$ и $S_{MM}^{mn}(t)$ назовём и *входящими*, и *выходящими*.

Система эволюционных уравнений государства составляется по следующему ***принципу сохранения***: скорость изменения оценённого совокупного достояния какого-либо вида в какой-либо основной системе в момент времени t равна сумме всех входящих оценённых потоков этого достояния в эту систему в момент времени t минус сумма всех выходящих оценённых потоков этого достояния из этой системы в момент времени t. В итоге получается следующая система уравнений.

1) $$\dot{W}_C^1 = L_{EC}^{55} - (p_1 B_{ED}^{55} + p_2 B_{EE}^{55} + p_3 B_{EF}^{55} + p_4 B_{EG}^{55} + p_5 B_{EH}^{55} + p_6 B_{EP}^{55}) - e_0 W_C^1,$$

где

$$L_{EC}^{55} = aW_C^1 (K - W_C^1)/(c + dr + (B_{EC_b}^{55} + B_{ED}^{55} + B_{EE}^{55} + B_{EF}^{55} + B_{EG}^{55} + B_{EH}^{55} + B_{EP}^{55})).$$

2) $$\dot{W}_D^4 = B_{ED}^{55} - e_1 W_D^4$$

3) $$\dot{W}_E^5 = B_{EE}^{55} - e_2 W_E^5$$

4) $$\dot{W}_F^2 = B_{EF}^{55} - e_3 W_F^2$$

5) $$\dot{W}_G^2 = B_{EG}^{55} - e_4 W_G^2$$

6) $$\dot{W}_H^2 = B_{EH}^{55} - e_5 W_H^2$$

7) $$\dot{W}_P^3 = B_{EP}^{55} - e_6 W_P^3.$$

Здесь $K>0$, $a, c, d>0$, $0 < e_i < 1$, $0 < p_i < 1$.

ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГОСУДАРСТВА

В полученной выше системе уравнений для государства S параметры B_{EM}^{55}, r для $M=C_b,D,E,F,G,H,P$ являются управлениями.

Из самого вида уравнений вытекают следующие непосредственные выводы.

1. Увеличение бюджетных раздач B_{EM}^{55} казённым системам $M=C_b,D,E,F,G,H,P$ приводит к приращению их основных достояний. Однако это приводит и к одновременному убыванию содержательного достояния содержательной системы C как за счёт уменьшения ссудного заимствования, так и за счёт увеличения предметных отдач $p_i B_{EM}^{55}$ казённым системам M.

2. Увеличение установочной ставки сочетательной системы r также приводит к приращению основных достояний указанных казённых систем. Однако, как и ранее, это приводит и к одновременному убыванию содержательного достояния содержательной системы C как за счёт уменьшения ссудного заимствования, так и за счёт увеличения предметных отдач $p_i q_i r L_{EC}^{55}$ казённым системам M.

Из сказанного следует, что верховная система государства S должна решать **оптимизационную задачу** на выбор оптимизирующих управлений B_{EM}^{55}, r в системе уравнений государства в соответствии с поставленными целями на временном промежутке $[t_0, T]$. При этом оптимизирующие управления для всех моментов времени t из этого промежутка должны быть ограничены как снизу, так и сверху следующими числовыми неравенствами:

$r_0 \le r(t) \le r_1$, $(B^{55}_{DM})_0 \le B^{55}_{DM}(t) \le (B^{55}_{DM})_1$ для M=C_b,D,E,F,G,H,P.

Одной из возможных оптимизационных задач может быть следующая задача.

Рассмотрим совокупность σ всех *S-внутренних управлений* $r, B^{55}_{EC_b}, B^{55}_{ED}, B^{55}_{EE}, B^{55}_{EF}, B^{55}_{EG}, B^{55}_{EH}, B^{55}_{EP}$, заданных как функции от момента времени t на промежутке времени $[t_0,T]$.

Рассмотрим *совокупное достояние* $W_S(T,\sigma) = (W^1_C + W^4_D + W^5_E + W^2_F + W^2_G + W^2_H + W^3_P)(T)$ *государства S в момент времени T при управлении* σ *на промежутке времени* $[t_0,T]$. Рассмотрим *начальное совокупное достояние* $W_S(t_0) = (W^1_C + W^4_D + W^5_E + W^2_F + W^2_G + W^2_H + W^3_P)(t_0)$ *государства S в момент времени* t_0.

Рассмотрим возможный *целевой функционал* $\Phi(T,\sigma) = W_S(T,\sigma) - W_S(t_0)$ ***прироста*** *совокупного достояния государства S к моменту времени T при управлении* σ *относительно его начального совокупного достояния в момент времени* t_0.

Деятельность государства S при управлении σ в системе исходных уравнений для государства S обозначим через $A(S,\sigma)$.

Деятельность $A(S,\sigma^*)$ государства S называется ***оптимальной*** *на промежутке времени* $[t_0,T]$ *относительно выбранного целевого функционала* $\Phi(T,\sigma)$, если для любой другой деятельности $A(S,\sigma)$ государства S выполнено неравенство $\Phi(T,\sigma^*) \ge \Phi(T,\sigma)$. Задачу на нахождение оптимальной деятельности $A(S,\sigma^*)$ государства S можно записать в виде $\Phi(T,\sigma) \to \max$.

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ И СВЯЗАННЫЕ НИМ ГРАФИКИ

В статьях [2, 4, 5] было найдено оптимальное решение последней системы с помощью принципа максимума Понтрягина при следующих числовых данных:

T=100, K=300, d=20, a=0,0005, c=1, p_1=0,3, p_2=0,6, p_3=p_4=p_5=0,2, p_6=0,7, e_0=0,015, e_1=0,005, e_2=0,02, e_3=e_4=e_5=0,005, e_6=0,01, $W^1_C(0) = 100$, $W^4_D(0) = 20$, $W^5_E(0) = 20$, $W^2_F(0) = 10$, $W^2_G(0) = 10$, $W^2_H(0) = 10$, $W^3_P(0) = 30$, r_0=0.001, r_1=1, $(B^{55}_{EC_b})_0 = 0$, $(B^{55}_{EC_b})_1 = 0.5$, $(B^{55}_{DM})_0 = 0.1$, $(B^{55}_{DM})_1 = 0.2$ для M=D,E,F,G,H,P.

Оптимальным оказалось постоянное управление $u^*(t)$=r_0=0.001, $v^*(t) = (B^{55}_{EC_b})_0 = 0$, $w^*_1(t) = (B^{55}_{ED})_1 = 0{,}2$, $w^*_2(t) = (B^{55}_{EE})_1 = 0{,}2$, $w^*_3(t) = (B^{55}_{EF})_1 = 0{,}2$, $w^*_4(t) = (B^{55}_{EG})_1 = 0{,}2$, $w^*_5(t) = (B^{55}_{EH})_1 = 0{,}2$, $w^*_6(t) = (B^{55}_{EP})_1 = 0{,}2$ при $0 \le t \le 100$. При этом управлении **наибольшее значение** целевой функции $\Phi^*(\sigma^*,t) = (W^1_C + W^4_D + W^5_E + W^2_F + W^2_G + W^2_H + W^3_P)(t)$ совокупного конечного достояния государства к моменту времени T=100 оказалось равным $\Phi^*(100)=((W_C^1)*+(W_D^4)*+(W_E^5)*+(W_F^2)*+(W_G^2)*+(W_H^2)*+(W_P^3)*)(100)=353{,}127$.

Отметим, что найденное решение $\Phi^*(100)$ непрерывно зависит от начальных условий. Численный эксперимент показал, что малые возмущения начальных условий задачи не вызывают сильного возмущения решения, что свидетельствует о его устойчивости.

Ниже приводятся графики фазовых функций, соответствующие **оптимальному управлению**. На них по горизонтальной оси отложено время t, а по вертикальной оси отложены оптимальные функции $(W_C^1)*$, $(W_D^4)*$, $(W_E^5)*$, $(W_F^2)*$, $(W_G^2)*$, $(W_H^2)*$, $(W_P^3)*$ и оптимальная целевая функция $\Phi^*=(W_C^1)*+(W_D^4)*+(W_E^5)*+(W_F^2)*+(W_G^2)*+(W_H^2)*+(W_P^3)*$, соответственно. Функции $(W_F^2)*$, $(W_G^2)*$ и $(W_H^2)*$ являются равными.

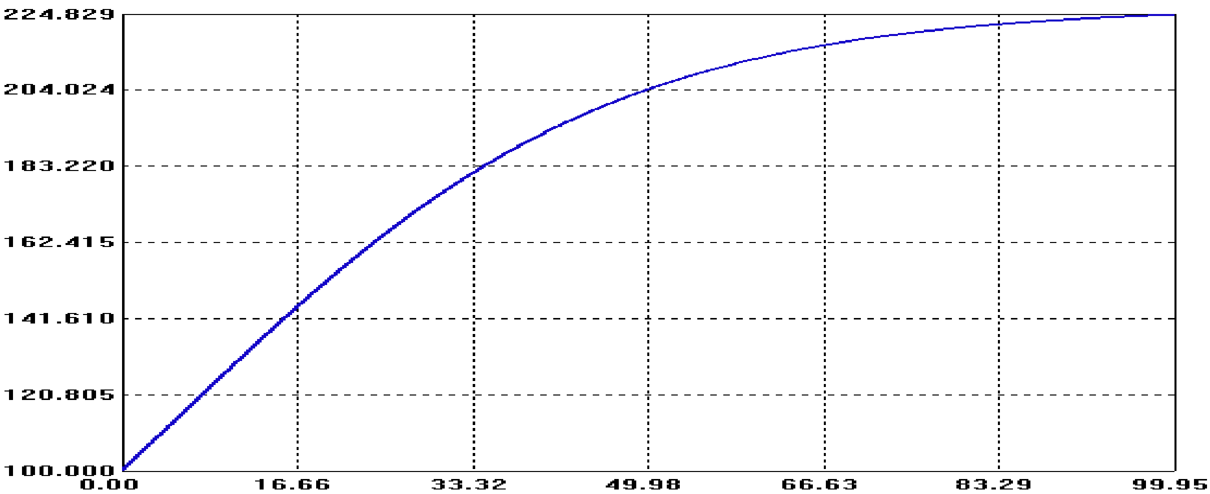

График 1. **Зависимость оптимальной функции** $(W_C^1)*$ **от времени**

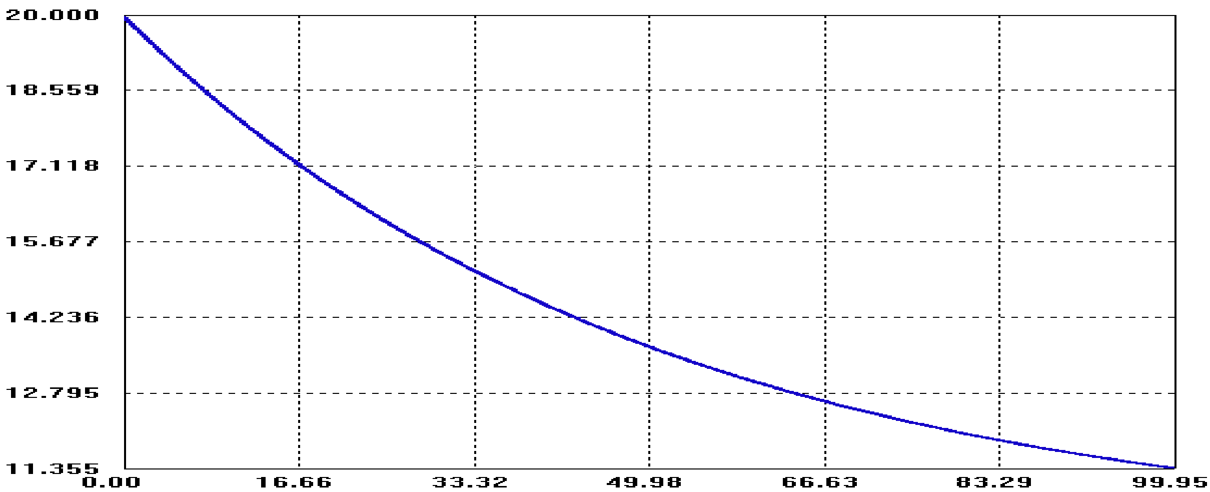

График 2. **Зависимость оптимальной функции** $(W_D^4)*$ **от времени**

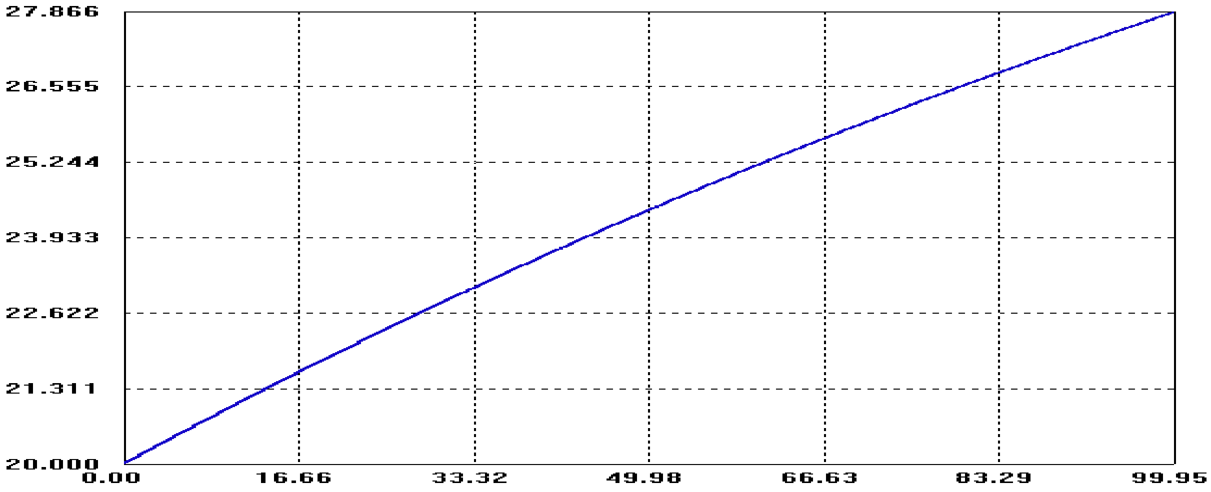

График 3. **Зависимость оптимальной функции** $(W_E^5)*$ **от времени**

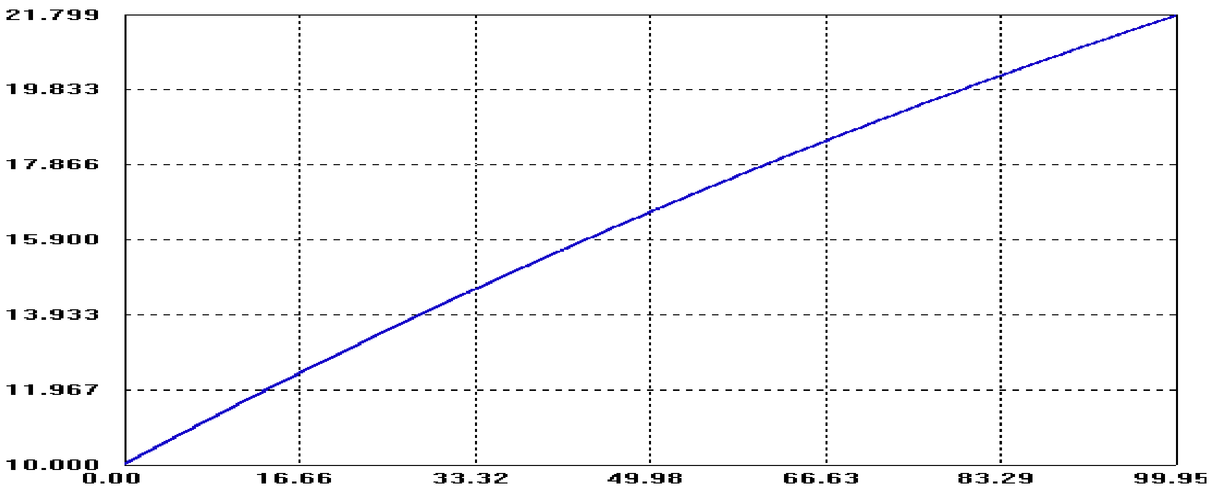

График 4. **Зависимость оптимальных функций** $(W_F^2)*$, $(W_G^2)*$ **и** $(W_H^2)*$**от времени**

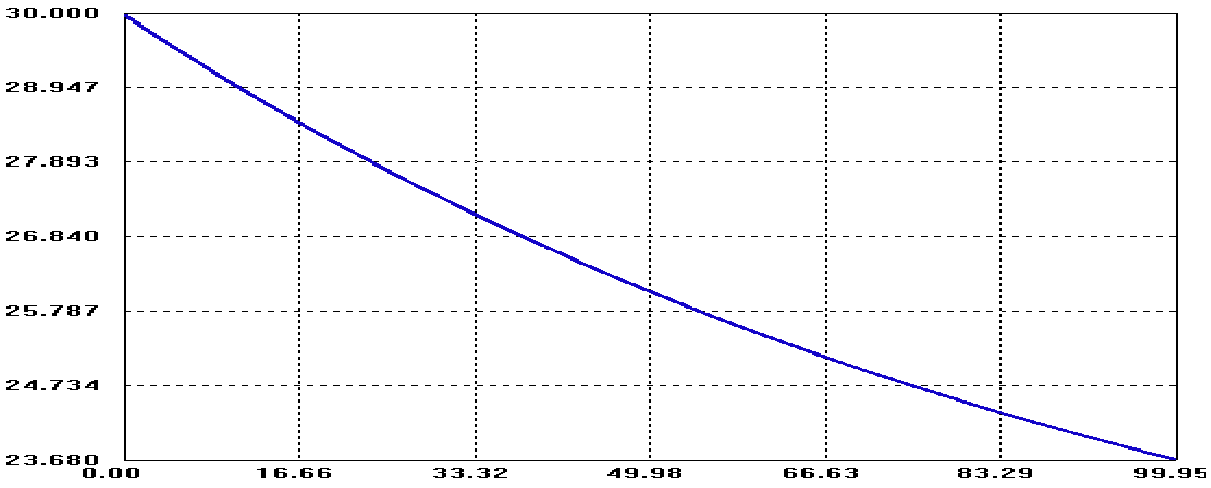

График 5. **Зависимость оптимальной функции** $(W_P^3)*$ **от времени**

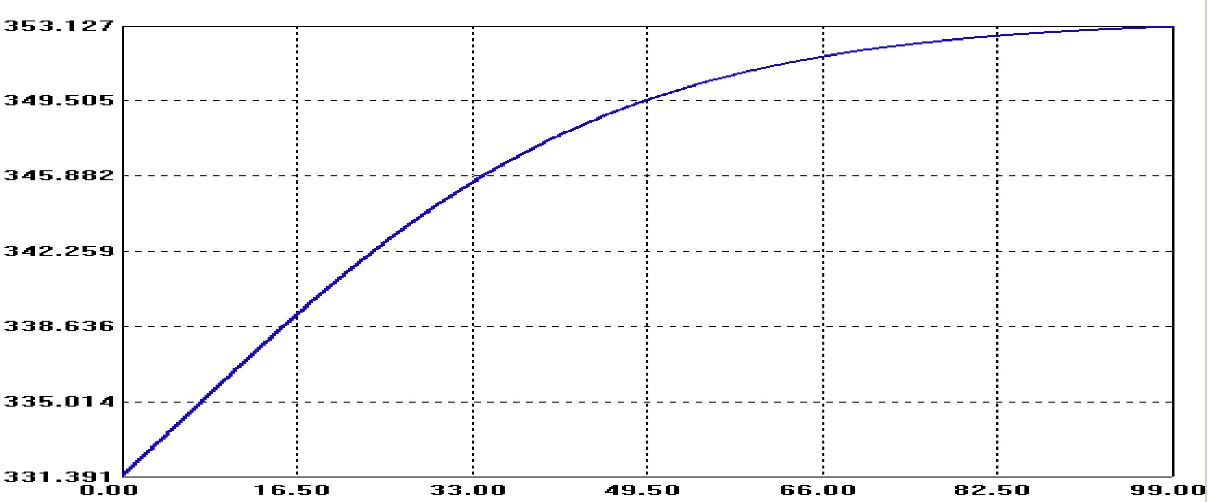

График 6. **Зависимость оптимальной целевой функции**
$\boldsymbol{\Phi^*}=(W_C^1)*+(W_D^4)*+(W_E^5)*+(W_F^2)*+(W_G^2)*+(W_H^2)*+(W_P^3)*$ **от времени**

СОДЕРЖАТЕЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ

В оптимизационной задаче для **модели государства при базисном использовании ссудного дохода** наибольшее совокупное достояние государства в конце временного промежутка (см. график 6) достигается при следующих управлениях:

1) при самой низкой и **постоянной** установочной ставке сочетательной системы $r(t)$=0.001;

2) при самом низком и **постоянном** бюджетном потоке $B_{EC_b}^{55}(t)=0$ в базисную казённую часть содержательной системы C_b;

3) при самых высоких и **постоянных** бюджетных потоках $B_{EM}^{55}(t)=0{,}2$ в системы M=D,E,F,G,H,P.

При таких управлениях и достояние содержательной системы C, и совокупное достояние всего государства монотонно увеличиваются по S-**образной кривой** [17, п. 9.2] с замедлением скорости увеличения (см. графики 1 и 6), достояния систем E,F,G,H монотонно увеличиваются, а достояния систем D и P монотонно уменьшаются.

Часть 2. Математическая модель военного подчинительного взаимодействия между двумя государствами

Будем рассматривать два государства: государство S, изображённое выше, и государство $S(I)$, все соответствующие признаки которого снабжены указательной римской цифрой I в круглых скобках. Далее мы рассмотрим **военное подчинение государства S государству $S(I)$**. Оно осуществляется **нападательным** управлением τ со стороны государства $S(I)$ независимо от любого S-внутреннего управления σ .

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДОСТОЯНИЯ И ПОТОКИ ПРИ ВОЕННОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ГОСУДАРСТВ

Будем рассматривать два государства: государство *S*, изображённое в первой части, и государство *S*(*I*), все соответствующие признаки которого снабжены указательной римской цифрой *I* в круглых скобках.

Составим математическую модель оптимального итогового военного подчинения государства *S* государству *S*(*I*) при условии **нападения** государства *S*(*I*) на государство *S*.

Для этого в содержательную систему *C* государства *S* введём дополнительное содержательное достояние 1(*I*) системы *C*(*I*) государства *S*(*I*) и дополнительное обеспечительное достояние 4(*I*) системы *D*(*I*) государства *S*(*I*).

Введём также дополнительные потоки $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$, $Z_{CC}^{11(I)}$, $Z_{CC(I)}^{1(I)1(I)}$, $Z_{C\mapsto}^{11}$ и $Z_{C\mapsto}^{4(I)4(I)}$ для системы *C*, название и смысл которых разъясняются далее.

Кроме того, в обеспечительную систему *D* государства *S* введём дополнительное обеспечительное достояние 4(*I*) системы *D*(*I*) государства *S*(*I*).

Введём также дополнительные потоки $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$, $Z_{DD}^{44(I)}$, $Z_{DD(I)}^{4(I)4(I)}$, $Z_{D\mapsto}^{44}$ и $Z_{D\mapsto}^{4(I)4(I)}$ для системы *D*, название и смысл которых разъясняются далее.

НАЗВАНИЕ И СМЫСЛ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПОТОКОВ

Поток $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$ называется *нападательным на систему C из системы D*(*I*) для разрушения и отнятия, указанных ниже.

Поток $Z_{CC}^{11(I)}$ называется *содержательно предотъёмным*. Смысл его состоит в том, что содержательное достояние 1 системы *C* государства *S* отнимается государством *S*(*I*) посредством военной «силы» 4(*I*), приходящей в систему *C* в виде нападательного потока $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$, и становится содержательным достоянием 1(*I*) системы *C*(*I*).

Поток $Z_{CC(I)}^{1(I)1(I)}$ называется *содержательно отъёмным*. Смысл его состоит в том, что **отнятое** у системы *C* содержательное достояние 1(*I*) доставляется в систему *C*(*I*).

Поток $Z_{C\mapsto}^{11}$ называется *содержательно разрушительным*. Смысл его состоит в том, что содержательное достояние 1 системы *C* **разрушается** посредством военной «силы» 4(*I*), приходящей в систему *C* в виде нападательного потока $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$.

Поток $Z_{C\mapsto}^{4(I)4(I)}$ называется *издержным относительно системы C*. Смысл его состоит в том, что для разрушения некоторой части содержательного достояния 1 системы C и для отнятия некоторой другой части этого достояния 1 у системы C приходится «жертвовать» военной «силой» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$.

Поток $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$ называется *нападательным на систему D из системы D*(I) для разрушения и отнятия, указанных ниже.

Поток $Z_{DD}^{44(I)}$ называется *обеспечительно предотъёмным*. Смысл его состоит в том, что обеспечительное достояние 4 системы D государства S отнимается государством S(I) посредством военной «силы» 4(I), приходящей в систему D в виде нападательного потока $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$, и становится обеспечительным достоянием 4(I) системы D(I).

Поток $Z_{DD(I)}^{4(I)4(I)}$ называется *обеспечительно отъёмным*. Смысл его состоит в том, что **отнятое** у системы D обеспечительное достояние 4(I) доставляется в систему D(I).

Поток $Z_{D\mapsto}^{44}$ называется *обеспечительно разрушительным*. Смысл его состоит в том, что обеспечительное достояние 4 системы D **разрушается** посредством военной «силы» 4(I), приходящей в систему D в виде нападательного потока $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$.

Поток $Z_{D\mapsto}^{4(I)4(I)}$ называется *издержным относительно системы D*. Смысл его состоит в том, что для разрушения некоторой части обеспечительного достояния 4 системы D и для отнятия некоторой другой части этого достояния 4 у системы D приходится «жертвовать» военной «силой» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока $Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$.

Изображение указанных дополнительных достояний и потоков дано ниже на рисунке 2. На нём дугами указаны **преобразовательные потоки**. **Передаточные потоки** показаны стрелками с указанием кодов на концах стрелок. **Разрушительные** и **издержные потоки** обозначены короткими косыми выходящими стрелочками.

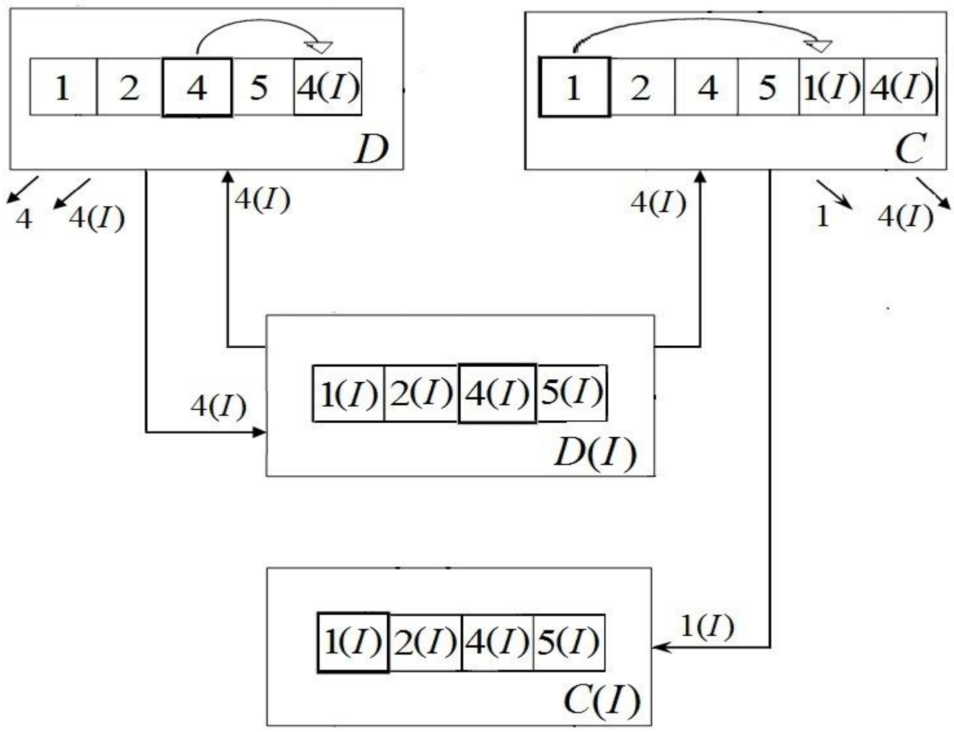

Рис. 2. Схема военного взаимодействия двух государств

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДЕНЬГАМИ РАЗНЫХ ГОСУДАРСТВ И СВЯЗИ МЕЖДУ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ПОТОКАМИ

Поскольку некоторые потоки оценены в деньгах 5 государства *S,* а некоторые оценены в деньгах 5(*I*) государства *S*(*I*), постольку связи между потоками, оценёнными в разных деньгах, будем выражать посредством перевода этих денег в фиксированную мировую валюту *w*.

Число $s(t)$ из соотношения $q(t)=s(t)q_w(t)$, где $q(t)$ − количество внутренних денег 5 государства *S* и $q_w(t)$ − количество валюты при обмене внутренних денег на валюту, называется *курсом обмена внутренних денег 5 государства S на фиксированную мировую валюту w в момент времени t*. Аналогично, число $s(I)(t)$ из соотношения $q(I)(t)=s(I)(t)q_w(t)$, где $q(I)(t)$ − количество внутренних денег 5(*I*) государства *S*(*I*) и $q_w(t)$ − количество валюты при обмене внутренних денег на валюту, называется *курсом обмена внутренних денег 5*(*I*) *государства S*(*I*) *на фиксированную мировую валюту w в момент времени t*.

СВЯЗИ МЕЖДУ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ПОТОКАМИ

Введём четыре безразмерностные числовые положительные функции от текущего времени *t*, изменяющегося в промежутке $[t_0,T]$ от t_0 до *T*.

Функцию $g^{(1)}$ назовём *показателем действенности* (*эффективности*) *разрушения содержательного достояния 1 системы C посредством военной «силы» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока* $Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)}$.

Соотношение $(1/s)Z^{11}_{C\mapsto} = g^{(1)}(1/s(I))Z^{4(I)4(I)}_{C\mapsto}$ показывает связь между разрушительным потоком $Z^{11}_{C\mapsto}$ в системе *C* и издержным потоком $Z^{4(I)4(I)}_{C\mapsto}$ в этой системе, выраженную через фиксированную мировую валюту *w*.

Функцию $h^{(1)}$ назовём *показателем действенности отнимания содержательного достояния 1 системы C посредством военной «силы» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока* $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C}$. Соотношение $(1/s)Z^{11(I)}_{CC} = h^{(1)}(1/s(I))Z^{4(I)4(I)}_{C\mapsto}$ показывает связь между предотъёмным потоком $Z^{11(I)}_{CC}$ в системе *C* и издержным потоком $Z^{4(I)4(I)}_{C\mapsto}$ в этой системе, выраженную через фиксированную мировую валюту *w*.

Функцию $g^{(4)}$ назовём *показателем действенности разрушения обеспечительного достояния 4 системы D посредством военной «силы» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока* $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D}$. Соотношение $(1/s)Z^{44}_{D\mapsto} = g^{(4)}(1/s(I))Z^{4(I)4(I)}_{D\mapsto}$ показывает связь между разрушительным потоком $Z^{44}_{D\mapsto}$ в системе *D* и издержным потоком $Z^{4(I)4(I)}_{D\mapsto}$ в этой системе, выраженную через фиксированную мировую валюту *w*.

Функцию $h^{(4)}$ назовём *показателем действенности отнимания обеспечительного достояния 4 системы D посредством военной «силы» 4(I), приходящей из системы D(I) в виде нападательного потока* $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D}$. Соотношение $(1/s)Z^{44(I)}_{DD} = h^{(4)}(1/s(I))Z^{4(I)4(I)}_{D\mapsto}$ показывает связь между предотъёмным потоком $Z^{44(I)}_{DD}$ в системе *D* и издержным потоком $Z^{4(I)4(I)}_{D\mapsto}$ в этой системе, выраженную через фиксированную мировую валюту *w*.

ИЗМЕНЁННЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГОСУДАРСТВА *S*

С учётом дополнительных потоков уравнения для государства *S*, написанные выше, изменятся следующим образом:

1)
$$\dot{W}^1_C = L^{55}_{EC} - (p_1 B^{55}_{ED} + p_2 B^{55}_{EE} + p_3 B^{55}_{EF} + p_4 B^{55}_{EG} + p_5 B^{55}_{EH} + p_6 B^{55}_{EP}) - e_0 W^1_C - (g^{(1)} + h^{(1)})(s/s(I))Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C},$$

где

$$L^{55}_{EC} = aW^1_C(K - W^1_C)/(c + dr + (B^{55}_{EC_b} + B^{55}_{ED} + B^{55}_{EE} + B^{55}_{EF} + B^{55}_{EG} + B^{55}_{EH} + B^{55}_{EP})).$$

2)
$$\dot{W}^4_D = B^{55}_{ED} - e_1 W^4_D - (g^{(4)} + h^{(4)})(s/s(I))Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D}$$

3) $\dot{W}_E^5 = B_{EE}^{55} - e_2 W_E^5$

4) $\dot{W}_F^2 = B_{EF}^{55} - e_3 W_F^2$

5) $\dot{W}_G^2 = B_{EG}^{55} - e_4 W_G^2$

6) $\dot{W}_H^2 = B_{EH}^{55} - e_5 W_H^2$

7) $\dot{W}_P^3 = B_{EP}^{55} - e_6 W_P^3$.

Отметим, что последние отрицательные слагаемые в уравнениях 1) и 2) получились из-за нападательного разрушения и отнимания.

Для этой системы рассматривается первичная совокупность σ всех S-*внутренних управлений* $r, B_{EC_b}^{55}, B_{ED}^{55}, B_{EE}^{55}, B_{EF}^{55}, B_{EG}^{55}, B_{EH}^{55}, B_{EP}^{55}$, заданных как функции от момента времени t на промежутке времени $[t_0, T]$.

ИЗМЕНЁННЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГОСУДАРСТВА $S(I)$

Подобным образом для государства $S(I)$ получается следующая система уравнений:

1(I))
$$\dot{W}_{C(I)}^{1(I)} = L_{E(I)C(I)}^{5(I)5(I)} - (p_1(I)B_{E(I)D(I)}^{5(I)5(I)} + p_2(I)B_{E(I)E(I)}^{5(I)5(I)} + p_3(I)B_{E(I)F(I)}^{5(I)5(I)} + p_4(I)B_{E(I)G(I)}^{5(I)5(I)} + p_5(I)B_{E(I)H(I)}^{5(I)5(I)} + p_6(I)B_{E(I)P(I)}^{5(I)5(I)}) - e_0(I)W_{C(I)}^{1(I)} + h^{(1)}Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)},$$

где

$$L_{E(I)C(I)}^{5(I)5(I)} = a(I)W_{C(I)}^{1(I)}(K(I) - W_{C(I)}^{1(I)})/(c(I) + d(I)r(I) + (B_{E(I)C_b(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)D(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)E(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)F(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)G(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)H(I)}^{5(I)5(I)} + B_{E(I)P(I)}^{5(I)5(I)})).$$

2(I)) $\dot{W}_{D(I)}^{4(I)} = B_{E(I)D(I)}^{5(I)5(I)} - e_1(I)W_{D(I)}^{4(I)} - Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)} - Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)} + h^{(4)}Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)}$

3(I)) $\dot{W}_{E(I)}^{5(I)} = B_{E(I)E(I)}^{5(I)5(I)} - e_2(I)W_{E(I)}^{5(I)}$

4(I)) $\dot{W}_{F(I)}^{2(I)} = B_{E(I)F(I)}^{5(I)5(I)} - e_3(I)W_{F(I)}^{2(I)}$

5(I)) $\dot{W}_{G(I)}^{2(I)} = B_{E(I)G(I)}^{5(I)5(I)} - e_4(I)W_{G(I)}^{2(I)}$

6(I)) $\dot{W}_{H(I)}^{2(I)} = B_{E(I)H(I)}^{5(I)5(I)} - e_5(I)W_{H(I)}^{2(I)}$

7(I)) $\dot{W}_{P(I)}^{3(I)} = B_{E(I)P(I)}^{5(I)5(I)} - e_6(I)W_{P(I)}^{3(I)}$.

Отметим, что последние положительные слагаемые в уравнениях 1) и 2) получились из-за прибавления отниманием.

Для этой системы рассмотрим первичную совокупность $\sigma(I)$ всех $S(I)$-*внутренних управлений* $r(I), B^{5(I)5(I)}_{E(I)C_b(I)}, B^{5(I)5(I)}_{E(I)D(I)}, B^{5(I)5(I)}_{E(I)E(I)}, B^{5(I)5(I)}_{E(I)F(I)}, B^{5(I)5(I)}_{E(I)G(I)}, B^{5(I)5(I)}_{E(I)H(I)}, B^{5(I)5(I)}_{E(I)P(I)}$, заданных как функции от момента времени t на промежутке времени $[t_0,T]$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОЕННОГО ПОДЧИНИТЕЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ГОСУДАРСТВ. ОПТИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Для систем уравнений для государств S и $S(I)$ рассмотрим вторичную совокупность $\tau(I)$ всех $S(I)$-*нападательных управлений* $Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C}, Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D}$, состоящую из нападательных потоков, заданных как функции от момента времени t на промежутке времени $[t_0,T]$. Совокупное одностороннее управление $(\sigma(I),\tau(I))$ назовём *нападательным управлением в системе уравнений для государства* $S(I)$ *на промежутке времени* $[t_0,T]$. Совокупное одностороннее управление $(\sigma,\tau(I))$ назовём *оборонительным управлением в системе уравнений для государства S на промежутке времени* $[t_0,T]$. Совокупное двустороннее управление $(\sigma,\sigma(I),\tau(I))$ назовём *военным управлением в системах уравнений для государств S и* $S(I)$ *на промежутке времени* $[t_0,T]$.

Взаимодействие государств S и $S(I)$ при нападательном управлении $(\sigma(I),\tau(I))$ в системах уравнений для государств S и $S(I)$ назовём *нападательным взаимодействием* и обозначим через $A(S,S(I),\sigma(I),\tau(I))$.

Рассмотрим *совокупное достояние* $W_{S(I)}(T,\sigma(I),\tau(I)) = (W^{1(I)}_{C(I)} + W^{4(I)}_{D(I)} + W^{5(I)}_{E(I)} + W^{2(I)}_{F(I)} + W^{2(I)}_{G(I)} + W^{2(I)}_{H(I)} + W^{3(I)}_{P(I)})(T)$ *государства* $S(I)$ *в момент времени* T *при нападательном управлении* $(\sigma(I),\tau(I))$ *на промежутке времени* $[t_0,T]$.

Рассмотрим *совокупное достояние* $W_S(T,\sigma,\sigma(I),\tau(I)) = (W^1_C + W^4_D + W^5_E + W^2_F + W^2_G + W^2_H + W^3_P)(T)$ *государства S в момент времени T при военном управлении* $(\sigma,\sigma(I),\tau(I))$ *на промежутке времени* $[t_0,T]$.

Рассмотрим *начальное совокупное достояние* $W_S(t_0) = (W^1_C + W^4_D + W^5_E + W^2_F + W^2_G + W^2_H + W^3_P)(t_0)$ *государства S в момент времени* t_0 и *начальное совокупное достояние* $W_{S(I)}(t_0) = (W^{1(I)}_{C(I)} + W^{4(I)}_{D(I)} + W^{5(I)}_{E(I)} + W^{2(I)}_{F(I)} + W^{2(I)}_{G(I)} + W^{2(I)}_{H(I)} + W^{3(I)}_{P(I)})(t_0)$ *государства* $S(I)$ *в момент времени* t_0. Рассмотрим начальное число $\Psi(t_0) = W_{S(I)}(t_0) - W_S(t_0)$.

Для двустороннего управления $(\sigma,\sigma(I),\tau(I))$ рассмотрим *целевой функционал* $\Psi(T,\sigma(I),\tau(I)) = W_{S(I)}(T,\sigma(I),\tau(I)) - \sup(W_S(T,\sigma,\sigma(I),\tau(I)) \mid \sigma \in \Sigma_S)$ ***абсолютного расхождения*** *совокупного достояния государства* $S(I)$ *к моменту времени T при нападательном управлении* $(\sigma(I),\tau(I))$ *относительно* *превосходственного* (*супремального*) *совокупного достояния государства S к моменту времени T по всем возможным внутренним управлениям* σ, *входящим в военные управления* $(\sigma, \sigma(I), \tau(I))$. Здесь через Σ_S обозначено множество всех возможных внутренних управлений для государства *S*.

Нападательное взаимодействие $A(S, S(I), \sigma(I), \tau(I))$ назовём ***абсолютно*** $(S(I), \alpha, \beta)$ ***-подчинительным*** (*для государства S с числовыми уровнями подчинения α>0 и β>0*), если выполнены два неравенства:

1) $\Psi(T, \sigma(I), \tau(I)) \geq \alpha\Psi(t_0)$ (*итоговое расхождение*);

2) $W_{S(I)}(T, \sigma(I), \tau(I)) \geq \beta W_{S(I)}(t_0)$ (*итоговое обогащение*).

Функции $g^{(1)}, g^{(4)}, h^{(1)}, h^{(4)}$ от момента времени *t* и числа *α* и *β* считаются входными (наперёд задаваемыми) параметрами этого взаимодействия.

Военное абсолютно $(S(I), \alpha, \beta)$-подчинительное взаимодействие $A(S, S(I), \sigma(I), \tau(I))$ государств *S* и *S*(*I*) обозначим через $A(S, S(I), \sigma(I), \tau(I), \alpha, \beta)$.

Нападательное абсолютно $(S(I), \alpha, \beta)$-подчинительное взаимодействие $A(S, S(I), \sigma^*(I), \tau^*(I), \alpha, \beta)$ называется ***оптимальным*** *на промежутке времени* [t_0, T] *относительно выбранного целевого функционала* $\Psi(T, \sigma(I), \tau(I))$, если для любого другого нападательного абсолютно $(S(I), \alpha, \beta)$-подчинительного взаимодействия $A(S, S(I), \sigma(I), \tau(I), \alpha, \beta)$ выполнено неравенство $\Psi(T, \sigma^*(I), \tau^*(I)) \geq \Psi(T, \sigma(I), \tau(I))$. Задачу на нахождение оптимального нападательного абсолютно $(S(I), \alpha, \beta)$-подчинительного взаимодействия $A(S, S(I), \sigma^*(I), \tau^*(I), \alpha, \beta)$ государств *S* и *S*(*I*) можно записать в виде $\Psi(T, \sigma(I), \tau(I)) \to \max$.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УПРОЩЁННОЙ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Если мы предполагаем все управления в сформулированной выше задаче постоянными функциями на временном промежутке [t_0, T], то мы получаем *упрощённую оптимизационную задачу.* Захаров В.К. и Дывыдов А.В. [16] искали приближённое оптимальное решение этой задачи для двух различных **сценариев**, задаваемых различными исходными данными.

Исходные данные для ***сценария военного взаимодействия при значительном начальном превосходстве***:

1) T=10, K=300, d=20, a=0,0005, c=1, p_1=0,3, p_2=0,6, p_3=p_4=p_5=0,2, p_6=0,7, e_0=0,015, e_1=0,02, e_2=0,005, e_3=e_4=e_5=0,005, e_6=0,01, $W_C^1(0) = 100$, $W_D^4(0) = 20$, $W_E^5(0) = 20$, $W_F^2(0) = 10$, $W_G^2(0) = 10$, $W_H^2(0) = 10$, $W_P^3(0) = 30$, r_0=0,001, r_1=1, $(B_{EC_b}^{55})_0 = 0$, $(B_{EC_b}^{55})_1 = 0{,}5$, $(B_{EM}^{55})_0 = 0{,}1$, $(B_{EM}^{55})_1 = 0{,}2$ для *M*=*D*,*E*,*F*,*G*,*H*,*P*, s_0=5, s_1=7;

2) *K*(*I*)=3000, *d*(*I*)=200, *a*(*I*)=0,0005, *c*(*I*)=10, $p_1(I)$=0,3, $p_2(I)$=0,6, $p_3(I)=p_4(I)=p_5(I)$=0,2, $p_6(I)$=0,7, $e_0(I)$=0,015, $e_1(I)$=0,005, $e_2(I)$=0,02, $e_3(I)=e_4(I)=e_5(I)$=0,005, $e_6(I)$=0,01, $W^{1(I)}_{C(I)}(0)=1000$, $W^{4(I)}_{D(I)}(0)=200$, $W^{5(I)}_{E(I)}(0)=200$, $W^{2(I)}_{F(I)}(0)=100$, $W^{2(I)}_{G(I)}(0)=100$, $W^{2(I)}_{H(I)}(0)=100$, $W^{3(I)}_{P(I}(0)=300$, $r(I)_0$=0,001, $r(I)_1$=1, $(B^{5(I)5(I)}_{E(I)C_b(I)})_0=0$, $(B^{5(I)5(I)}_{E(I)C_b(I)})_1=0{,}5$, $(B^{5(I)5(I)}_{E(I)M(I)})_0=0{,}1$, $(B^{5(I)5(I)}_{E(I)M(I)})_1=0{,}2$ для *M*(*I*)=*D*(*I*),*E*(*I*),*F*(*I*),*G*(*I*),*H*(*I*),*P*(*I*), $s(I)_0$=1, $s(I)_1$=1,4;

3) $(Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C})_0=0{,}1$, $(Y^{4(I)4(I)}_{D(I)C})_1=0{,}5$, $(Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D})_0=0{,}1$, $(Y^{4(I)4(I)}_{D(I)D})_1=0{,}5$;

4) входные функции $g^{(1)},g^{(4)},h^{(1)},h^{(4)}$ постоянны и принимают значения $g^{(1)}(t)=1{,}2$, $g^{(4)}(t)=1{,}3$, $h^{(1)}(t)=0{,}3$, $h^{(4)}(t)=0{,}2$;

5) *α*=1,01 и *β*=1,01.

Полученные приближённые решения представлены на приводимых ниже графиках.

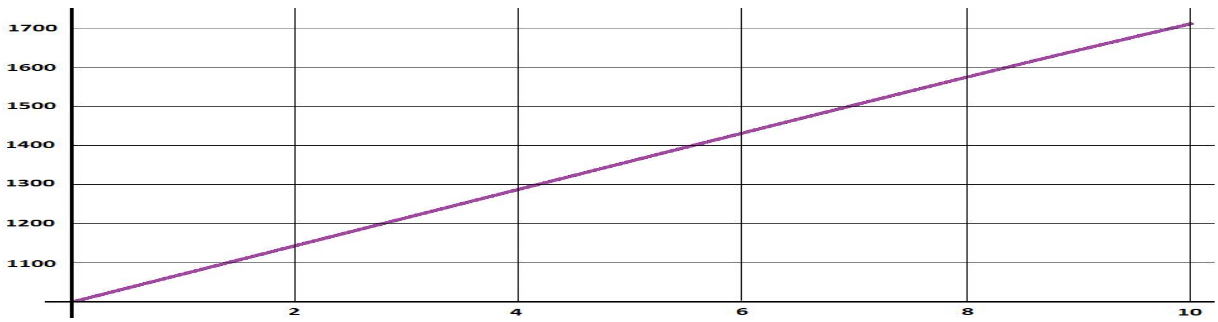

График 7. **Зависимость оптимальной функции** $W^{1(I)}_{C(I)}$ **от времени**

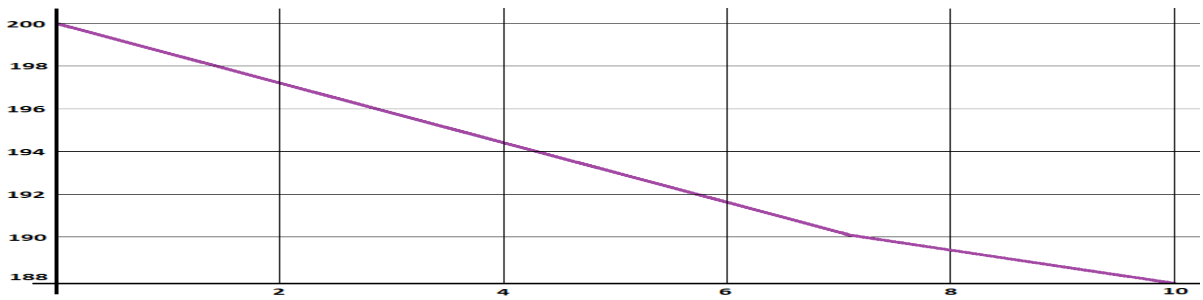

График 8. **Зависимость оптимальной функции** $W^{4(I)}_{D(I)}$ **от времени**

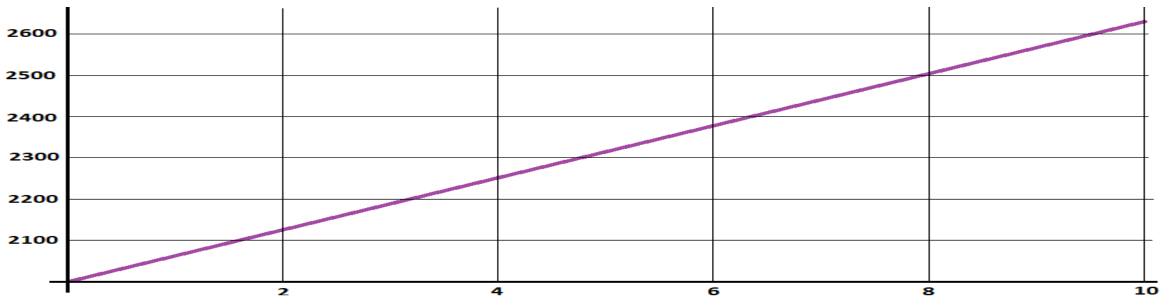

График 9. **Зависимость оптимальной функции** $W_{S(I)}$ **от времени**

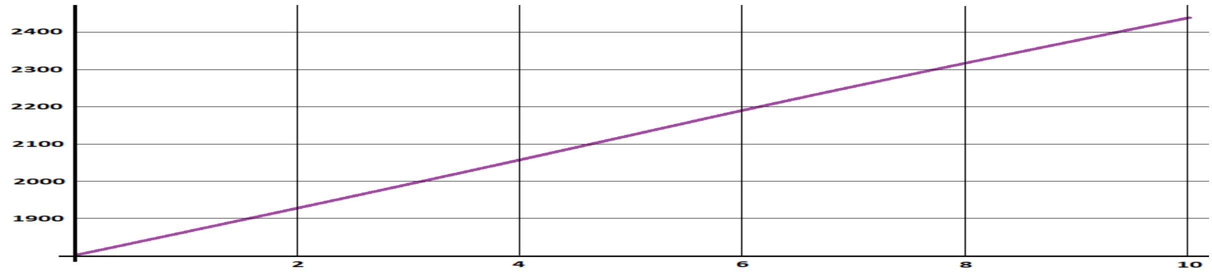

График 10. **Зависимость целевой функции $\Psi(t,\sigma(I),\tau(I))$ от времени**

Исходные данные для ***сценария военного взаимодействия при незначительном начальном превосходстве***:

1) T=20, K=300, d=20, a=0,0005, c=1, p_1=0,3, p_2=0,6, p_3=p_4=p_5=0,2, p_6=0,7, e_0=0,015, e_1=0,02, e_2=0,005, e_3=e_4=e_5=0,005, e_6=0,01, $W_C^1(0)=100$, $W_D^4(0)=20$, $W_E^5(0)=20$, $W_F^2(0)=10$, $W_G^2(0)=10$, $W_H^2(0)=10$, $W_P^3(0)=30$, r_0=0,001, r_1=1, $(B_{EC_b}^{55})_0=0$, $(B_{EC_b}^{55})_1=0{,}5$, $(B_{EM}^{55})_0=0{,}1$, $(B_{EM}^{55})_1=0{,}2$ для M=D,E,F,G,H,P, s_0=5, s_1=7;

2) $K(I)$=600, $d(I)$=40, $a(I)$=0,0005, $c(I)$=2, $p_1(I)$=0,3, $p_2(I)$=0,6, $p_3(I)$=$p_4(I)$=$p_5(I)$=0,2, $p_6(I)$=0,7, $e_0(I)$=0,015, $e_1(I)$=0,005, $e_2(I)$=0,02, $e_3(I)$=$e_4(I)$=$e_5(I)$=0,005, $e_6(I)$=0,01, $W_{C(I)}^{1(I)}(0)=200$, $W_{D(I)}^{4(I)}(0)=40$, $W_{E(I)}^{5(I)}(0)=40$, $W_{F(I)}^{2(I)}(0)=20$, $W_{G(I)}^{2(I)}(0)=20$, $W_{H(I)}^{2(I)}(0)=20$, $W_{P(I}^{3(I)}(0)=60$, $r(I)_0$=0,001, $r(I)_1$=1, $(B_{E(I)C_b(I)}^{5(I)5(I)})_0=0$, $(B_{E(I)C_b(I)}^{5(I)5(I)})_1=0{,}5$, $(B_{E(I)M(I)}^{5(I)5(I)})_0=0{,}1$, $(B_{E(I)M(I)}^{5(I)5(I)})_1=0{,}2$ для $M(I)$=$D(I)$,$E(I)$,$F(I)$,$G(I)$,$H(I)$,$P(I)$, $s(I)_0$=1, $s(I)_1$=1,4;

3) $(Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)})_0=0{,}02$, $(Y_{D(I)C}^{4(I)4(I)})_1=0{,}1$, $(Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)})_0=0{,}02$, $(Y_{D(I)D}^{4(I)4(I)})_1=0{,}1$;

4) входные функции $g^{(1)},g^{(4)},h^{(1)},h^{(4)}$ постоянны и принимают значения $g^{(1)}(t)=1{,}2$, $g^{(4)}(t)=1{,}3$, $h^{(1)}(t)=0{,}3$, $h^{(4)}(t)=0{,}2$;

5) α=1,01 и β=1,01.

Полученные приближённые решения представлены на приводимых ниже графиках.

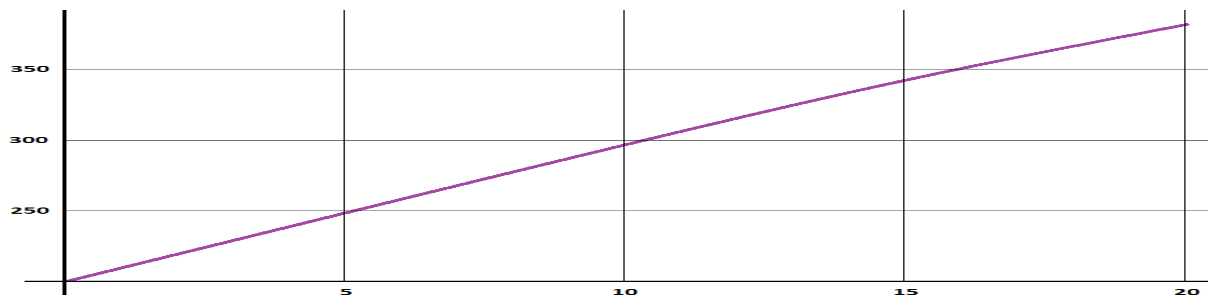

График 11. **Зависимость оптимальной функции $W_{C(I)}^{1(I)}$ от времени**

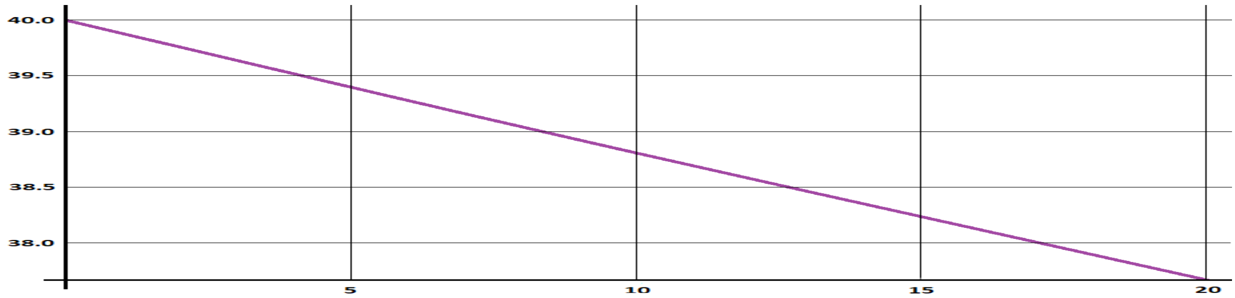

График 12. **Зависимость оптимальной функции** $W^{4(I)}_{D(I)}$ **от времени**

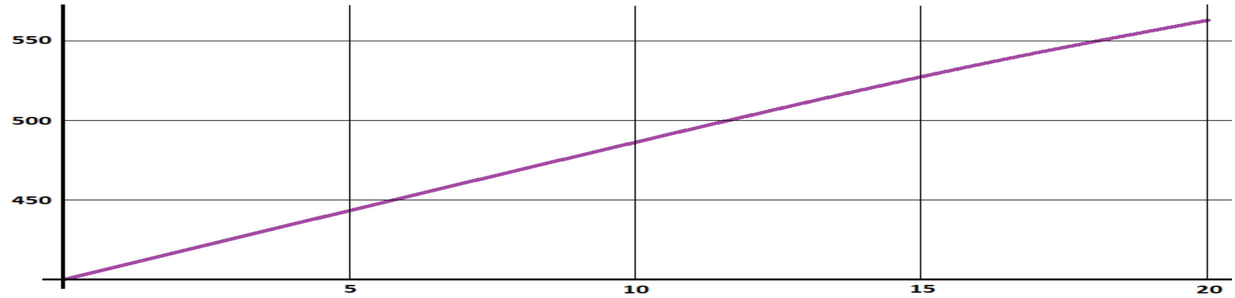

График 13. **Зависимость оптимальной функции** $W_{S(I)}$ **от времени**

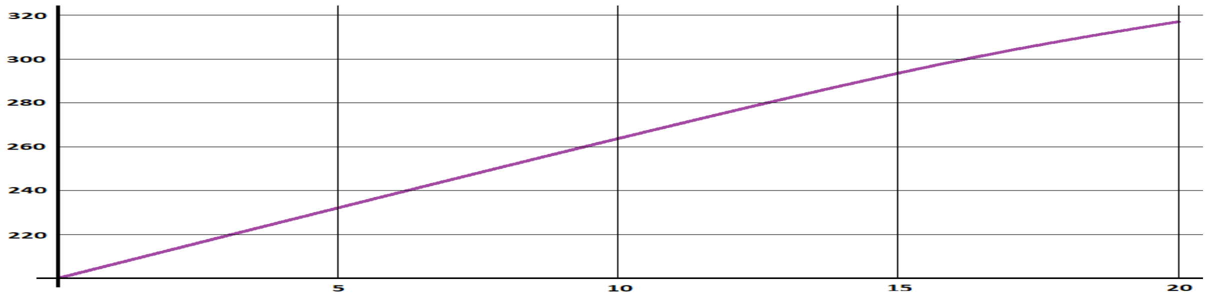

График 14. **Зависимость целевой функции** $\Psi(t,\sigma(I),\tau(I))$ **от времени**

В обоих сценариях совокупное оптимальное управление и супремум вычислялись приближённо методом случайных выборок (Монте-Карло) в многомерных числовых параллелепипедах, задаваемых указанными нижними и верхними границами всех частичных управлений.

Из сравнения приведённых решений для разных сценариев следует, что решение является относительно устойчивым.

Литература

1. Гуссейнова А.С., Павловский Ю.Н., Устинов В.А. Опыт имитационного моделирования исторического процесса. − М.: Наука, 1984. − 157 с.

2. Захаров В.К., Кузенков О.А. Оптимальное управление в модели государства // Моделирование и анализ данных. 2011. № 1. С. 55-75.

3. Захаров В.К. Номология. Устроение и направление человеческой деятельности. − М.: МГППУ, 2011. − 216 с.

4. Захаров В.К., Капитанов Д.В., Кузенков О.А. Оптимальное управление в модели государства II // Моделирование и анализ данных. 2014. № 1. С. 4-31.

5. Захаров В.К., Кузенков О.А. Оптимальное управление в математической модели государства // Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 2. С. 34-38.

6. Захаров В.К. Номология. Воспроизведение и обновление человеческого бытия. − М.: «Onebook.ru», 2016. − 396 с.

7. Захаров В.К. Этот Новый Старый Мир. Будущее из прошлого. − М.: Издательский дом "Кислород", 2017. − 448 с.

8. Захаров В.К. Динамическая оптимизационная математическая модель военного подчинительного взаимодействия двух государств // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем: сборник научных трудов XIII Всероссийской школы-симпозиума АМУР-2019 (14-27 сентября 2019). – Симферополь: ИП Корниенко, 2019. С. 172-179.

9. Захаров В.К. Оптимизационная математическая модель мирного подчинительного взаимодействия двух государств // Современные проблемы анализа динамических систем. Теория и практика: материалы международной открытой конференции (21-23 мая 2019г.). − Воронеж: ВГЛТУ, 2019. С. 189-191.

10. Захаров В.К. Оптимизационные математические модели конкуренции двух государств // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019 (17-29 сентября 2019г.). − Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2019. С. 260-263.

11. Zakharov V.K. Mathematical model of the trade-currency subordinating interaction of two states // Сборник тезисов четвёртой международной конференции «Моделирование нелинейных процессов и систем» (15-17 октября 2019г.). М.: Янус − К, 2019. С. 40-41.

12. Zakharov V.K. Optimization mathematical models of the peaceful subordinating interactions of two States // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1391. Conference 1. 012040. P. 1-7.

13. Захаров В.К. Оптимизационные математические модели мирного и военного подчинительных взаимодействий двух государств // Моделирование и анализ данных. 2019. № 2. С. 4-20.

14. Zakharov Valeriy K. Dynamic optimization mathematical model of the military subordinating interaction of two States // Vibroengineering PROCEDIA. 2019. V. 25. June. P. 143-150.

15. Zakharov V.K. Optimization mathematical models of the peaceful subordinating interactions of two States // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1391. Conference 1. 012040. P. 1-7.

16. Захаров В.К., Давыдов А.В. Оптимальное управление в математической модели военного подчинительного взаимодействия двух государств // Моделирование и анализ данных. 2020. Т. 10, № 2. С. 5-24.

17. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов. – М.: Логос, 2001. – 296 с.