**Лекция 1** (02.09.20)
**Числовые ряды**

Определения. Критерий сходимости Коши

Сумму, содержащую бесконечное число слагаемых, в математике называют **бесконечным рядом** (или просто **рядом** или **бесконечной суммой**). Слагаемые называют *членами ряда*.

Такое общее понятие необходимо сузить и конкретизировать для дальнейшего применения. Напомним уже встречавшееся определение.

**Определение 1.** Пусть $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$ — последовательность, пронумерованная (заиндексированная) целыми числами, начиная с числа $n \in \mathbb{Z}$. **Бесконечным рядом** (или просто **рядом** или **бесконечной суммой**) называется выражение вида

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots,$$

записываемое также более кратко как

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k.$$

Обычно ограничиваются рассмотрением случая $n = 1$ или $n = 0$, так как остальные случаи изменением нумерации можно свести к ним.

**Определение 2**. Если все элементы последовательности $a_k$, $k = n, n+1, \dots,$ — числа (действительные или комплексные), то ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ называют **числовым рядом**.

**Определения 3-4**. Элементы последовательности $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$, рассматриваемые как элементы ряда $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$, называют **членами ряда**; элемент $a_k$ называют $k$-ым **членом ряда** или **членом ряда** с номером $k$.

Сумму $\boldsymbol{S}_N = \sum\limits_{k=n}^{N} a_k$ называют **частичной суммой** ряда или, когда желают указать ее номер, $N$-ой **частичной суммой** ряда.

Принято считать, что сумма $\sum\limits_{k=n}^{N} a_k = 0$ при $n > N$ (т.е. сумма пустого множества слагаемых равна нулю).

Можно рассматривать ряды, члены которых принадлежат пространству (множеству), на котором определены операции сложения и предельного перехода. Например, можно рассматривать ряды элементов нормированного пространства.

Будем рассматривать ряды, члены которых действительные или комплексные числа, с указаниями, сохраняются ли излагаемые результаты для рядов в нормированных пространствах.

**Определения 5-7**. Если последовательность частичных сумм $\{\boldsymbol{S}_N\}$ (от $N = n$ до $\infty$ или от $N = 1$ до $\infty$) сходится к действительному (или комплексному) числу $\boldsymbol{S}$ или (для случая действительных чисел) к $\boldsymbol{S} = \pm\infty$, то $\boldsymbol{S}$ называют **суммой ряда** и пишут $\boldsymbol{S} = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$. Ряд, имеющий конечную сумму, называют **сходящимся**, а если последовательность частичных сумм $\{\boldsymbol{S}_N\}$ не имеет конечного предела, то ряд называют **расходящимся**.

Таким образом, выяснение сходимости ряда и нахождение его суммы сводится к выяснению сходимости последовательности частичных сумм и к нахождению ее предела. А так как зная последовательность частичных сумм ряда можно восстановить его члены, то верно и обратное, можно выяснение сходимости последовательностей и нахождение их пределов сводить к выяснению сходимости рядов и нахождению их сумм. Изучение рядов наряду с изучением последовательностей объясняется их распространением в математике и ее приложениях, а также тем, что целый ряд признаков сходимости естественнее формулируется для рядов, а не для последовательностей.

**Определение 8**. Если ряд сходится, то величину $\boldsymbol{r}_N = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}_N = \sum\limits_{k>N} a_k$ называют $N$-ым **остатком ряда**, это бесконечно малая величина.

Уже отмечалось, что любой ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ можно, сдвинув нумерацию на $n$ или на $n-1$, превратить в ряд, нумерация которого начинается либо с 0, либо с 1. Изменение ряда можно совершить и иначе, при $n > 0$ или $n > 1$, соответственно, добавив в начале ряда необходимое количество членов — нулей, а при $n < 0$ или $n < 1$ заменив $a_0$ на $\sum\limits_{k=n}^{0} a_k$ или $a_1$ на $\sum\limits_{k=n}^{1} a_k$, соответственно. Поэтому для стандартизации будем рассматривать числовые ряды нумерация которых начинается с 1, т.е. ряды вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

В первом семестре был доказан критерий Коши сходимости числового ряда (фактически был переформулирован критерий Коши сходимости последовательности). Напомним его.

**Критерий Коши.** *Ряд действительных (комплексных) чисел* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \quad (n \text{ и } p \text{ — натуральные числа}):$$

$$|\boldsymbol{S}_{n+p} - \boldsymbol{S}_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

*или, что эквивалентно,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall l > N \quad \forall m > N:$$

$$\left| \sum_{k=l}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

**Следствие 1** (необходимое условие сходимости ряда). *Для того, чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы его члены стремились к нулю.*

Это следует как из критерия Коши сходимости ряда, если взять в нем $p = 1$ или $l = m$, так и из того, что $a_k = \boldsymbol{S}_k - \boldsymbol{S}_{k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, если последовательность $\boldsymbol{S}_k$ сходится.

**Следствие 2**. *Сходимость или расходимость ряда не изменится, если изменить, дописать или вычеркнуть любое конечное число членов ряда.*

## Абсолютная и условная сходимости

**Определение 9**. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд из модулей его членов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ (для ряда в нормированном пространстве — ряд из норм его членов).

**Теорема 1**. *Абсолютно сходящийся ряд сходится и его $n$-ый остаток $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ по модулю не больше $n$-ого остатка ряда из модулей $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$ (т.е. $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$).*

▼ Если ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$ сходится, то для него выполняется критерий Коши сходимости ряда: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall m > N:\ \sum\limits_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Но тогда, в силу неравенства $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m} |a_k|$, и для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ выполняется критерий Коши, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. При этом

$$|\boldsymbol{r}_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leqslant \lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|.\blacktriangle$$

**Определение 10**. Сходящийся числовой ряд, который не сходится абсолютно, называют сходящимся **условно**.

**Примечание**. Критерий Коши сходимости ряда и теорема 1 сохраняют верность в банаховых пространствах, если в них модули заменить на нормы.

## Операции над рядами

**Теорема 2**.

*а) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (абсолютно сходится) и $\boldsymbol{S}$ — его сумма, то для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\in \mathbb{C}$) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ также сходится (абсолютно сходится) и $\alpha\boldsymbol{S}$ — его сумма.*

*б) Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся (абсолютно сходятся) и имеют, соответственно, суммы $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}'$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ также сходится (абсолютно сходится) и $\boldsymbol{S} \pm \boldsymbol{S}'$ — его сумма.*

*в) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (абсолютно сходится) и $\boldsymbol{S}$ — его сумма, то сходится (абсолютно сходится) и имеет ту же сумму $\boldsymbol{S}$ ряд*

$$\sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} a_k\right) = \sum_{p=1}^{\infty}\left(\sum_{n_p < k \leqslant n_{p+1}} a_k\right),$$

*где $0 = n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, т.е. можно группировать скобками подряд члены сходящегося (абсолютно сходящегося) ряда. А если $a_k \to 0$ и $(n_{p+1} - n_p)$ — ограниченная последовательность, то из сходимости сгруппированного ряда с суммой $\boldsymbol{S}$ следует сходимость первоначального ряда и его сумма также $\boldsymbol{S}$.*

▼ а) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \boldsymbol{S}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \alpha \boldsymbol{S}$.

б) Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \boldsymbol{S}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \boldsymbol{S}'$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \pm \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \boldsymbol{S} \pm \boldsymbol{S}'$.

Если в а) и б) под знаки сумм поставить знак модуля, то получится доказательство утверждений об абсолютной сходимости.

в) Частичные суммы сгруппированного ряда образуют подпоследовательность последовательности частичных сумм начального ряда и, следовательно, сходятся к тому же пределу $\boldsymbol{S}$. При этом если под знаками сумм поставить модули, то, учитывая неравенство $\left| \sum\limits_{n_r < k \leqslant n_{r+1}} a_k \right| \leqslant \sum\limits_{n_r < k \leqslant n_{r+1}} |a_k|$, получим, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \left| \sum\limits_{n_r < k \leqslant n_{r+1}} a_k \right|$ ограничены (ограничены суммой $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$), а так как они образуют неубывающую последовательность, то эта последовательность сходится. Справедливость утверждения об абсолютной сходимости проверена.

И, наконец, справедливость обратного утверждения о сходимости первоначального ряда при предположениях, что $a_k \to 0$ и $l = \sup\limits_{r \in \mathbb{N}} (n_{r+1} - n_r) < \infty$ устанавливается так. Для любого $n$ найдем такое $n_r$, что $n_r \leqslant n < n_{r+1}$. Тогда $|\boldsymbol{S}_n - \boldsymbol{S}_{n_r}| \leqslant \sum\limits_{n-l \leqslant k \leqslant n} |a_k| = o(1)$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{S}_n = \lim\limits_{r\to\infty} \boldsymbol{S}_{n_r}$. ▲

## **Лекция 2** (04.09.20)
## Числовые ряды

### Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости

**Признак 1**. *Ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена (сверху).*

▼ Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами является неубывающей и сходится тогда и только тогда, когда ограничена (сверху). ▲

**Признак 2** (сравнения). *Если $0 \leqslant u_k \leqslant v_k$ при $k > K$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и при этом $\boldsymbol{r}_n^{(u)} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} v_k = \boldsymbol{r}_n^{(v)}$ при $n \geqslant K$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$.*

▼ В силу следствия 2 из критерия Коши можно считать, что $0 \leqslant u_k \leqslant v_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $0 \leqslant \boldsymbol{U}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \leqslant \boldsymbol{V}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и из ограниченности последовательности $\boldsymbol{V}_n$ следует ограниченность, а значит, и сходимость последовательности $\boldsymbol{U}_n$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве $\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m} v_k$ с

$n \geqslant K$ получим утверждение об остатках рядов. И наконец, если последовательность $\boldsymbol{U}_n$ неограничена, то неограничена и последовательность $\boldsymbol{V}_n$. ▲

**Признак 3** (сравнения). *Если* $0 < \alpha \leqslant \frac{u_k}{v_k} \leqslant \beta < \infty$ *при* $k > K$, *то ряды с неотрицательными членами* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *одновременно сходятся или расходятся; в случае сходимости для их остатков* $\boldsymbol{r}_n^{(u)}$ *и* $\boldsymbol{r}_n^{(v)}$ *соответственно справедливо неравенство* $\alpha \boldsymbol{r}_n^{(v)} \leqslant \boldsymbol{r}_n^{(u)} \leqslant \beta \boldsymbol{r}_n^{(v)}$ *при* $n \geqslant K$.

▼ Так как $u_k \leqslant \beta v_k$ при $k > K$, то из пункта а) теоремы 3 и из признака 2 следует, что сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. Так как $v_k \leqslant \frac{1}{\alpha} u_k$, то аналогично сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$. Неравенство для остатков очевидно следует из условия признака $\alpha v_k \leqslant u_k \leqslant \beta v_k$, $k > K$. ▲

**Замечание**. *Утверждение, что* $0 < \alpha \leqslant \frac{u_k}{v_k} \leqslant \beta < \infty$ *при* $k > K$ *эквивалентно утверждению, что* $0 < \varliminf\limits_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} \leqslant \varlimsup\limits_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} < \infty$ *и выполняется, если* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = \gamma$, $0 < \gamma < \infty$.

**Признак 4** (сравнения). *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *— ряды со строго положительными членами и* $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{v_{k+1}}{v_k}$ *для* $k > K$, *то из сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *и для их остатков* $\boldsymbol{r}_n^{(u)}$ *и* $\boldsymbol{r}_n^{(v)}$ *соответственно справедливо неравенство* $\boldsymbol{r}_n^{(u)} \leqslant \frac{u_k}{v_k} \boldsymbol{r}_n^{(v)}$ *при* $n \geqslant k \geqslant K$, *а из расходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$.

▼ Возьмем $m > k > K$. Тогда $\frac{u_m}{u_k} = \prod\limits_{i=k}^{m-1} \frac{u_{i+1}}{u_i} \leqslant \prod\limits_{i=k}^{m-1} \frac{v_{i+1}}{v_i} = \frac{v_m}{v_k}$ и, значит, $u_m \leqslant \frac{u_k}{v_k} v_m$ при $m \geqslant k > K$. Получаем, что из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, а суммируя по $m > n$ приведенное неравенство получаем, что $\boldsymbol{r}_n^{(u)} \leqslant \frac{u_k}{v_k} \boldsymbol{r}_n^{(v)}$ при $n \geqslant k \geqslant K$. Естественно, что в случае расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится не может. ▲

**Признак 5** (Д'Аламбера). *Ряд со строго положительными членами* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$

*а) при условии* $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q < 1$ *при* $k > K$ *сходится и* $r_n \leqslant u_k \frac{q^{n+1-k}}{1-q}$ *при* $n \geqslant k \geqslant K$, $K \in \mathbb{N}$;

*б) при условии* $\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1$ *при* $k \geqslant K$, $K \in \mathbb{N}$, *члены ряда не стремятся к нулю и ряд расходится.*

▼ Пункт а) следует из признака 4), если взять $v_k = q^k$ — геометрическую прогрессию. Пункт б) очевиден, $u_n = u_K \prod\limits_{k=K}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant u_K$. ▲

**Замечание 1**. (Признак Д'Аламбера в предельной форме) *Условие пункта а)* $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q < 1$ *при* $k \geqslant K$ *(для некоторых* $q$ *и* $K \in \mathbb{N}$*) эквивалентно условию*

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$*; условие пункта б)* $\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1$ *при* $k \geqslant K$ *выполняется (для некоторого* $K \in \mathbb{N}$*), если* $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$.

**Замечание 2**. *При* $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant 1 \leqslant \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{u_{k+1}}{u_k}$*, в частности, при* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1$*, ряд может как сходиться, так и расходиться. Примерами служат ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

**Признак 6** (Коши). *Ряд с неотрицательными членами* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$

*а) при условии* $\sqrt[k]{u_k} \leqslant q < 1$ *при* $k \geqslant K$, $K \in \mathbb{N}$*, сходится и* $r_n \leqslant \frac{q^{n+1}}{1-q}$ *при* $n \geqslant K$*;*

*б) если* $\sqrt[k]{u_k} \geqslant 1$ *для бесконечного множества номеров* $k$*, то члены ряда не стремятся к нулю и ряд расходится.*

▼ Пункт а) следует из признака 2, если взять $v_k = q^k$. Пункт б) очевиден, так как для бесконечного числа номеров $k$ $u_k \geqslant 1$. ▲

**Замечание 1**. (Признак Коши в предельной форме) *Условие пункта а)* $\sqrt[k]{u_k} \leqslant q < 1$ *при* $k \geqslant K$ *(для некоторых* $q$ *и* $K \in \mathbb{N}$*) эквивалентно условию* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} < 1$. *Условие пункта б) выполняется, если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} > 1$.

**Замечание 2**. *При* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} = 1$ *или даже при* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = 1$ *ряд может как сходиться, так и расходиться. Смотри примеры из замечания 2 к предыдущему признаку Д'Аламбера.*

**Замечание 3**. *Если ряд сходится по признаку 5 Д'Аламбера, то он сходится и по признаку 6 Коши. Обратное неверно, поэтому говорят, что признак Коши сильнее признака Д'Аламбера. Если ряд расходится по признаку Д'Аламбера в предельной форме, т.е.* $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$*, то он расходится и по признаку Коши.*

▼ Действительно, если $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q < 1$ при $k \geqslant K$, то $u_k = u_K \prod\limits_{i=K}^{k-1} \frac{u_{i+1}}{u_i} \leqslant u_K q^{k-K}$ и, значит, $\sqrt[k]{u_k} \leqslant \sqrt[k]{u_K} \cdot q^{1-\frac{K}{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \cdot q < 1$, т.е. $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} < 1$.

Аналогично, легко устанавливается, что если $\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant q > 1$ при $k \geqslant K$, то $u_k \geqslant u_K q^{k-K}$ при $k \geqslant K$ и, значит, $\sqrt[k]{u_k} \geqslant \sqrt[k]{u_K} \cdot q^{1-\frac{K}{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \cdot q > 1$, т.е. $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} \geqslant q > 1$. ▲

**Пример**. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{k+(-1)^k}$ *удовлетворяет признаку Коши, но не удовлетворяет признаку Д'Аламбера.*

**Признак 7** (интегральный Коши–Маклорена). *Пусть функция* $f$ *неотрицательна и невозрастает на полупрямой* $[M, +\infty)$, $M \in \mathbb{Z}$. *Тогда для целых* $n \geqslant m \geqslant M$

$$0 \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(m) \qquad (*)$$

*и, значит, ряд* $\sum\limits_{k=M}^{\infty} f(k)$ *и интеграл* $\int\limits_{M}^{\infty} f(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно. В случае сходимости справедливо неравенство* $\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant r_n \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx$.

▼

С одной стороны, имеем $\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n+1} f(x)\,dx = \sum\limits_{k=m}^{n} (f(k) - \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx) = \sum\limits_{k=m}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} (f(k) - f(x)\,dx) \geq 0$, так как $f(k) = f(k) \int\limits_{k}^{k+1} 1\,dx$ и $f(k) \geq f(x)$ при $x \in [k, k+1]$.

С другой стороны, $\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n+1} f(x)\,dx = f(m) + \sum\limits_{k=m+1}^{n} (f(k) - \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx) - - \int\limits_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq f(m)$, так как $f(k) \leq f(x)$ при $x \in [k-1, k]$ и $f(x) \geq 0$.

Из этой формулы следует, что частичные суммы $\sum\limits_{k=m}^{n} f(k)$ и интегралы $\int\limits_{m}^{n+1} f(x)\,dx$ (а значит, в силу неотрицательности функции $f(x)$, и интегралы $\int\limits_{m}^{A} f(x)\,dx$, $A \geqslant m$) одновременно ограничены или неограничены, а значит, одновременно сходятся или расходятся. Оценка остатка сразу следует из того, что $f(x+1) \leq f(k+1) \leq f(x)$ на отрезке $[k, k+1]$. ▲

**Пример**. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int\limits_{1}^{n+1} \frac{1}{x} dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{1}^{\infty} \left[\frac{1}{x}\right] - \frac{1}{x} dx = C = 0{,}577215664901532\ldots$ — постоянная Эйлера–Маклорена.

**Следствие**. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}$, *как и интеграл* $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$, *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$.

**Признак 8** (Куммера). *Пусть даны ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *с* $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, *и последовательность* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с* $b_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, *причем числа* $v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1}$ *одного знака при* $k \geqslant K \in \mathbb{N}$. *Тогда,*

*а) если* $v_k \geqslant l > 0$ *при* $k \geqslant K$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится,*

*б) если* $v_k \leqslant 0$ *при* $k \geqslant K$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

▼ Если $v_k \geqslant l > 0$, то $l a_{k+1} \leqslant v_k a_{k+1} = a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}$ и $l \sum\limits_{K \leqslant k \leqslant n} a_k \leqslant \sum\limits_{K \leqslant k \leqslant n} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = a_K b_K - a_n b_n \leqslant a_K b_K$, значит, последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена, ряд сходится по признаку 1.

Если $v_k \leqslant 0$, то $a_k b_k \leqslant a_{k+1} b_{k+1}$ и, значит, $a_K b_K \leqslant a_{K+1} b_{K+1} \leqslant \cdots \leqslant a_k b_k$ при $k \geqslant K$ и $a_k \geqslant \frac{a_K b_K}{b_k}$. Если ряд $\sum\limits_{k=K}^{\infty} \frac{1}{b_k}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{k=K}^{\infty} \frac{a_K b_K}{b_k} = a_K b_K \sum\limits_{k=K}^{\infty} \frac{1}{b_k}$, а тогда по признаку 2 расходится ряд $\sum\limits_{k=K}^{\infty} a_k$. ▲

**Следствие** (признак Куммера в предельной форме). *Условие пункта а) эквивалентно условию* $\varliminf\limits_{k\to\infty} \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1}\right) > 0$, *а условие пункта б) следует из условия* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1}\right) < 0$ *и расходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$.

## **Лекция 3** (09.09.20)

## Числовые ряды.
## Признаки сходимости

**Признак 9** (Раабе). *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *с* $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, *тогда*

*а) если* $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \geq r > 1$ *при* $k \geqslant K$, $K \in \mathbb{N}$, *то ряд сходится,*

*б) если* $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \leq 1$ *при* $k \geqslant K$, $K \in \mathbb{N}$, *то ряд расходится.*

▼ Воспользуемся признаком Куммера с $b_k = k$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, $v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} k - (k+1) = k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) - 1 = r_k - 1$. Если $r_k - 1 \geq r - 1 > 0$, то ряд сходится, а если $r_k - 1 \leq 0$, то ряд расходится. ▲

**Следствие** (признак Раабе в предельной форме). *Условие п. а) равносильно условию* $\varliminf\limits_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) > 1$, *а условие п. б) следует из условия* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) < 1$.

**Признак 10** (Гаусса). *Пусть* $a_k > 0$ *для* $k \in \mathbb{N}$ *и* $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha + \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\varepsilon}}$, *где* $\alpha$, $\beta$, $\varepsilon$ *— действительные числа,* $\varepsilon > 0$, *а* $\gamma_k$ *— ограниченная числовая последовательность. Тогда при* $\alpha > 1$ *или* $\alpha = 1$, $\beta > 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а при* $\alpha < 1$ *или* $\alpha = 1$, $\beta \leqslant 1$ *расходится.*

▼ По признаку 5 Д'Аламбера (или 9 Раабе) ряд при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha < 1$ расходится. Если $\alpha = 1$, то по признаку 9 Раабе ряд при $\beta > 1$ сходится, а при $\beta < 1$ расходится. Остается рассмотреть случай $\alpha = \beta = 1$, т.е. когда $\frac{a_k}{a_{k+1}} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\varepsilon}}$. Применим признак 8 Куммера в предельной форме с $b_k = k \ln k$, $k \geqslant 2$. Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ расходится по интегральному признаку Коши–Маклорена 7. Тогда имеем $v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\varepsilon}}\right) k \ln k - (k+1)\ln(k+1) = (k+1)\ln k + \frac{1}{k^{\varepsilon}}\gamma_k \ln k - (k+1)\ln(k+1) = \gamma_k \frac{\ln k}{k^{\varepsilon}} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 - \ln e = 0 - 1 = -1$. Ряд расходится по признаку Куммера 8 в предельной форме. ▲

**Замечание**. Утверждение остается верным, если условие ослабить, заменив на $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha + \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma_k}{k \ln k}$, где $\gamma_k$ — бесконечно малая числовая последовательность.

## Ряды с членами произвольных знаков и ряды комплексных чисел.
## Признаки сходимости

Ряды с членами произвольных знаков и ряды комплексных чисел исследуют на сходимость и на абсолютную сходимость (как известно, влекущую сходимость). При исследовании ряда на абсолютную сходимость к ряду из модулей его членов можно применять все признаки сходимости рядов с неотрицательными членами. При исследовании на сходимость бывают полезны признаки сходимости, не связанные с абсолютной сходимостью.

**Признак 1** (Лейбница). *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *— действительный ряд со знакочередующимися членами (т.е. все члены с нечетными номерами одного знака, а с четными — другого), абсолютные величины которых не возрастают и стремятся к нулю (т.е.* $|u_1| \geqslant |u_2| \geqslant |u_3| \geqslant \ldots$ *и* $u_k \to 0$*). Такой ряд называется рядом Лейбница и является сходящимся, причем* $|r_n| \leqslant |u_{n+1}| \leqslant |u_n|$.

▼ Рассмотрим случай, когда все члены с нечетными номерами неотрицательны, а с четными неположительны. Тогда $\boldsymbol{S}_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{2k-1} + a_{2k})$ — неубывающая последовательность, т.к. $a_{2k-1} + a_{2k} \geqslant 0$, а $\boldsymbol{S}_{2n+1} = a_1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{2k} + a_{2k+1})$ — невозрастающая последовательность, т.к. $a_{2k} + a_{2k+1} \leqslant 0$. При этом $\boldsymbol{S}_{2n} \leqslant \boldsymbol{S}_{2n} + a_{2n+1} = \boldsymbol{S}_{2n+1}$. Значит, неубывающая последовательность $\boldsymbol{S}_{2n}$ ограничена сверху $\boldsymbol{S}_1$, а невозрастающая последовательность $\boldsymbol{S}_{2n+1}$ ограничена снизу $\boldsymbol{S}_2$, они имеют предел, общий, т.к. $\boldsymbol{S}_{2n+1} - \boldsymbol{S}_{2n} = a_{2n+1} = o(1)$.

Случай, когда все члены с нечетными номерами неположительны, а с четными неотрицательны, сводится к данному умножением на $-1$. Итак, в любом случае ряд Лейбница сходится. Его остаток $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$; если $u_{n+1} \geqslant 0$, то $r_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_{n+2k-1} + u_{n+2k}) \geqslant 0$ (как ряд с неотрицательными членами) и $r_n = u_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_{n+2k} + u_{n+2k+1}) \leqslant u_{n+1} + 0 = u_{n+1}$, т.е. $0 \leqslant r_n \leqslant u_{n+1} \leqslant |u_n|$. Если $u_{n+1} \leqslant 0$, то умножением на $-1$ можно все свести к предыдущему случаю и получить оценку $0 \leqslant -r_n \leqslant -u_{n+1} = |u_{n+1}|$. Значит, в любом случае $|r_n| \leqslant |u_{n+1}|$. ▲

**Пример** ряда Лейбница: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ с $\alpha > 0$.

Преобразование Абеля

**Теорема 1**. *Для любых чисел (из* $\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$*)* $u_k$ *и* $v_k$, $k = 1, \dots, n$, $1 \leqslant m \leqslant n$, *верны равенства*

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m-1}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_{m-1},$$
$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_m,$$

$v_0 = 0$, $U_k = \sum\limits_{j=1}^{k}$, $U_0 = 0$.

▼ $\sum\limits_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum\limits_{k=m}^{n} (U_k - U_{k-1})\, v_k = \sum\limits_{k=m}^{n} U_k v_k - \sum\limits_{j=m-1}^{n-1} U_j v_{j+1} = \sum\limits_{k=m-1}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_{m-1} = \sum\limits_{k=m}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_m$. ▲

**Определение**. Последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $v_k$ — действительные или комплексные числа, **ограниченной вариации** (с **ограниченным изменением**, VB-последовательностью), если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|$. В случае сходимости величина этого ряда называется **вариацией** последовательности $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ и обозначается $\mathrm{Var}(\{v_k\})$.

Из теоремы I,2 (об операциях над рядами) следует, что если последовательность ограниченной вариации умножить на комплексное число, а также если к ней прибавить или из нее вычесть (почленно) последовательность ограниченной вариации, то получится последовательность ограниченной вариации, при этом $\operatorname{Var}(\{\alpha v_k\}) = |\alpha| \operatorname{Var}(\{v_k\})$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) и $\operatorname{Var}(\{v_k + u_k\}) \leq \operatorname{Var}(\{v_k\}) + \operatorname{Var}(\{u_k\})$.

Некоторое представление о том, какие последовательности имеют ограниченную вариацию, дает следующая теорема.

**Теорема 2**. *Комплексная последовательность имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда ограниченную вариацию имеют последовательности ее действительных и мнимых частей. Действительная последовательность имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда она представима в виде разности двух неубывающих (невозрастающих) сходящихся последовательностей.*

▼ Первое утверждение сразу следует из того, что если $v_k = a_k + ib_k$, где $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, то $|a_{k+1} - a_k| \leqslant |v_{k+1} - v_k|$, $|b_{k+1} - b_k| \leqslant |v_{k+1} - v_k|$ и $|v_{k+1} - v_k| \leqslant |a_{k+1} - a_k| + |b_{k+1} - b_k|$.

Докажем второе утверждение. Достаточность. Если действительная последовательность неубывает и имеет предел, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k| = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) = \lim\limits_{n\to\infty} (v_{n+1} - v_1) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n - v_1$, т.е. $v_k$ — последовательность ограниченной вариации. Разность таких последовательностей также имеет ограниченную вариацию.

Необходимость. Если действительная последовательность $v_k$ ограниченной вариации, то $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k|$ и $S_n - v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k| + v_1 - \sum\limits_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k)$ неубывающие ограниченные, а значит, сходящиеся последовательности, разность которых последовательность $v_n$. ▲

**Теорема 3**. *Любая последовательность ограниченной вариации имеет предел и ряд, последовательностью частичных сумм которого она является, абсолютно сходится.*

▼ Утверждение сразу следует из равенства $v_n = v_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$, где ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (v_{k+1} - v_k)$ сходится абсолютно. ▲

**Теорема 4**. *Если $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — VB-последовательности, то их поточечное произведение $\{v_k u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — тоже VB-последовательность, причем*
$\operatorname{Var}(\{v_k u_k\}) \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{v_k\} \operatorname{Var}(\{u_k\}) + \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{u_k\} \operatorname{Var}(\{v_k\})$

▼ Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} |v_{k+1} u_{k+1} - v_k u_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1} u_{k+1} - v_{k+1} u_k| + \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1} u_k - v_k u_k| \leq$$

$$\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \{v_{k+1}\} \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1} - u_k| + \sup_{k\in\mathbb{N}} \{u_k\} \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k| \leq$$

$$\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \{v_k\} \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1} - u_k| + \sup_{k\in\mathbb{N}} \{u_k\} \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое неравенство и утверждение.

▲

**Признак 2** (Абеля). *Если ряд комплексных чисел* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится, а* $v_k$ *— последовательность ограниченной вариации, то сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$.

**Признак 3** (Дирихле). *Если частичные суммы ряда комплексных чисел* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *ограничены, а* $v_k$ *— стремящаяся к нулю последовательность ограниченной вариации, то сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$.

▼ В обоих случаях $U_k = \sum\limits_{j=1}^{k} u_k$ ограничены, пусть $|U_k| \leqslant C$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\left|\sum\limits_{k=m-1}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1})\right| \leqslant C \sum\limits_{k=m-1}^{n-1} |v_k - v_{k+1}|$ и, значит,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m > N_1 :\ \left|\sum_{k=m-1}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1})\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В признаке Абеля $U_k$ и $v_k$, а значит, и $U_k v_k$ сходятся. В признаке Дирихле $U_k$ — ограниченная последовательность, а $v_k$ — бесконечно малая, значит, $U_k v_k$ сходятся. В обоих случаях $\lim\limits_{k\to\infty} U_k v_k$ существует и, значит,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n, m > N_2 :\ |U_n v_n - U_{m-1} v_{m-1}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При $N = \max\{N_1, N_2\}$ $\ \forall n, m > N$:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k v_k\right| = \left|\sum_{k=m-1}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + (U_n v_n - U_{m-1} v_{m-1})\right| < \varepsilon.$$

По критерию Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сходится. ▲

**Следствие**. *Признак 1 Лейбница, исключая оценку остаточного члена, — следствие признака Дирихле.*

▼ Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — ряд Лейбница. Если положить $v_k = |a_k|$, а $u_k = (-1)^k$ или $u_k = (-1)^{k+1}$, то выполняется условие признака Дирихле и, значит, знакочередующийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ▲

**Замечание**. Признаки Абеля и Дирихле верны и в случае, когда $u_k$ — элементы банахового пространства, а $v_k$ — числовая последовательность.

## **Лекция 4** (11.09.20)

## **О перестановках членов ряда**

### Перестановки абсолютно сходящихся рядов

**Определение**. Если $\varphi$ — взаимно однозначное отображение $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — ряд, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ называется **перестановкой** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ или **переставленным** рядом.

**Теорема 1** (Коши). *Если ряд абсолютно сходится, то при любой перестановке его членов получается ряд, который также абсолютно сходится и его сумма совпадает с суммой начального ряда.*

▼ Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$, являющегося перестановкой абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, следует из того, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant \max\limits_{1 \leqslant r \leqslant n} \varphi(r)} |a_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Остается показать, что сумма переставленного ряда совпадает с суммой начального ряда.

Пусть $F_n = \{\varphi(k) : \ 1 \leqslant k \leqslant n\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем такое $M \in \mathbb{N}$, что $\sum\limits_{k=M+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. Потом найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что $\{1, \ldots, M\} \subset F_N$.

Тогда $\forall n > N$ имеем

$$|\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq |\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{M} a_k| + |\sum_{k=1}^{M} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq |\sum_{k=1, \varphi(k)>M}^{n} a_{\varphi(k)}| + \varepsilon < 2\varepsilon$$

**Замечание**. Теорема верна также для рядов в нормированных пространствах.

Перестановки условно сходящихся рядов

**Теорема 2** (Римана). *Если ряд действительных чисел сходится условно, то для любого $l \in \overline{\mathbb{R}}$ можно так переставить члены этого ряда, что переставленный ряд будет сходиться к $l$. Кроме того, можно переставить члены ряда так, что его частичные суммы будут ограничены, но не будут иметь предела.*

▼ Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, сходится условно. Тогда среди членов ряда бесконечно много строго положительных и бесконечно много строго отрицательных (ведь конечное число членов ряда не влияет на сходимость и может быть изменено, а ряд из членов одного знака если сходится, то сходится абсолютно). Пусть $u_k$ — последовательно занумерованные неотрицательные члены ряда, $u_k \geqslant 0$, а $v_k$ — последовательно занумерованные отрицательные члены ряда, $v_k < 0$. Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ одновременно расходятся (к $+\infty$ и к $-\infty$ соответственно). Действительно, абсолютно сходится оба ряда не могут, т.к. начальный ряд не сходится абсолютно, а если бы один из рядов расходился, а другой сходился, то из равенства $\boldsymbol{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k + \sum\limits_{k=1}^{q} v_k$ для некоторых $p$ и $q$, где $n = p + q$ и $p \to \infty$, $q \to \infty$ при $n \to \infty$, следовала бы расходимость начального ряда.

Теперь докажем теорему для случая $l \in \mathbb{R}$. Выберем из исходного ряда столько неотрицательных членов $u_1, u_2, \ldots, u_{k_1}$, чтобы их сумма превзошла $l$, $\sum\limits_{j=1}^{k_1} u_j > l$. Добавим к выбранным членам минимальное количество отрицательных членов $v_1, v_2, \ldots, u_{r_1}$, чтобы общая сумма стала меньше $l$,

$$\sum_{j=1}^{k_1} u_j + \sum_{j=1}^{r_1} v_j < l, \text{ а } \sum_{j=1}^{k_1} u_j + \sum_{j=1}^{r_1-1} v_j \geqslant l.$$

После этого добавим минимальное количество неотрицательных членов ряда $u_{k_1+1}, u_{k_1+2}, \dots, u_{k_2}$, чтобы общая сумма стала больше $l$,

$$\sum_{j=1}^{k_2} u_j + \sum_{j=1}^{r_1} v_j > l, \text{ а } \sum_{j=1}^{k_2-1} u_j + \sum_{j=1}^{r_1} v_j \leqslant l.$$

Затем снова добавим минимальное количество отрицательных членов ряда $v_{r_1+1}, v_{r_1+2}, \dots, v_{r_2}$, чтобы общая сумма стала меньше $l$,

$$\sum_{j=1}^{k_2} u_j + \sum_{j=1}^{r_2} v_j < l, \text{ а } \sum_{j=1}^{k_2} u_j + \sum_{j=1}^{r_2-1} v_j \geqslant l.$$

После этого добавим минимальное количество неотрицательных членов ряда $u_{k_2+1}, u_{k_2+2}, \dots, u_{k_3}$, чтобы общая сумма стала больше $l$. Затем добавим минимальное количество отрицательных членов $v_{r_2+1}, v_{r_2+2}, \dots, v_{r_3}$, чтобы общая сумма стала меньше $l$. И т.д.

Продолжая аналогичным образом добавлять неотрицательные и отрицательные члены начального ряда и нумеруя их натуральными числами в порядке добавления, получим бесконечный ряд, в который войдут все члены исходного ряда, т.к. на каждом шаге построения добавляется хотя бы один неотрицательный или отрицательный член исходного ряда попеременно, то есть получим переставленный исходный ряд. Остается показать, что он сходится к $l$.

Заметим, что в полученном ряде последовательно чередуются группы неотрицательных и отрицательных членов. Если частичная сумма ряда содержит такие группы целиком, то в силу построения отклонение этой частичной суммы от $l$ не превосходит модуля ее последнего члена (т.к. предыдущая частичная сумма расположена по другую сторону от $l$). В силу сходимости начального ряда его члены стремятся к нулю и, значит, подпоследовательность частичных сумм указанного вида сходится к $l$. Как видно из построения, любая другая частичная сумма лежит между ближайшими к ней (по нумерации) частичными суммами указанного выше вида, а значит, последовательность всех частичных сумм сходится к $l$.

Если $l = +\infty$, то будем последовательно выбирать строго возрастающие $k_m \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{k_m} u_j > m + \sum_{j=1}^{m} |v_j| = m - \sum_{j=1}^{m} v_j.$$

Тогда ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_{k_1} + v_1 + u_{k_1+1} + u_{k_1+2} + \dots + u_{k_2} + v_2 + u_{k_2+1} + u_{k_2+2} + \dots + u_{k_3} + v_3 + \dots + v_n + u_{k_n+1} + u_{k_n+2} + \dots + u_{k_{n+1}} + v_{n+1} + \dots$ сходится к $+\infty$, т.к. для всех частичных сумм с номерами $n \geqslant k_m + m$ будет выполняться неравенство $\boldsymbol{S}_n > m$ (ведь если $k_p + p \leqslant n \leqslant k_{p+1} + p$, то $\boldsymbol{S}_n \geqslant \sum\limits_{j=1}^{k_p} u_j + \sum\limits_{j=1}^{m} v_j > p$).

Случай $l = -\infty$ доказывается аналогично. Он может быть также сведен к предыдущему случаю умножением на $-1$.

Покажем, что можно переставить члены ряда так, что частичные суммы будут ограничены, но не будут иметь предела. Аналогично предыдущему будем последовательно выбирать строго возрастающие $k_m \in \mathbb{N}$ и $r_m \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{k_m} u_j + \sum_{j=1}^{r_{m-1}} v_j > 1, \text{ а } \sum_{j=1}^{k_m - 1} u_j + \sum_{j=1}^{r_{m-1}} v_j \leqslant 1,$$

$$\sum_{j=1}^{k_m} u_j + \sum_{j=1}^{r_m} v_j < -1, \text{ а } \sum_{j=1}^{k_m} u_j + \sum_{j=1}^{r_m - 1} v_j \geqslant -1,$$

т.е. сначала мы добавляем минимальное число положительных слагаемых, чтобы частичная сумма ряда превысила 1, потом добавляем минимальное число отрицательных слагаемых, чтобы частичная сумма стала меньше $-1$, после чего процесс продолжается до бесконечности. В последовательности частичных сумм полученного переставленного ряда бесконечное число членов больше 1, и бесконечное число — меньше $-1$, поэтому ряд не сходится. При этом, так как общий член ряда стремится к нулю, начиная с некоторого номера все частичные суммы будут меньше 2 и больше $-2$, так что последовательность частичных сумм будет ограничена. ▲

**Замечание**. В $\mathbb{R}^n$ (в частности, в $\mathbb{C}$) известна теорема Штайница, утверждающая, что если множество сумм ряда при различных перестановках содержит две точки, то оно содержит и проходящую через них прямую. В бесконечномерных банаховых пространствах аналогичное утверждение неверно, но там начинает наблюдаться следующий эффект: существуют сходящиеся ряды, которые не сходятся абсолютно, но у которых значение суммы не меняется ни при каких перестановках членов ряда. Такие ряды называют безусловно сходящимися.

## Умножение числовых рядов

**Теорема 3** (Коши). *Если два числовых ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *сходятся абсолютно и имеют суммы соответственно равные* $U$ *и* $V$*, то ряд, составленный из произведений* $u_i v_j$*,* $i, j \in \mathbb{N}$*, взятых в любом порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна* $UV$*.*

▼ Обозначим через $w_k$, $k \in \mathbb{N}$, произведения вида $u_i v_j$, $i, j \in \mathbb{N}$, занумерованные в каком угодно порядке. Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |w_k|$ сходится. Рассмотрим его частичную сумму $\bar{\boldsymbol{S}}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |w_k|$, это сумма членов вида $u_i v_j$, среди индексов $i$ и $j$, входящих в сумму $\bar{\boldsymbol{S}}_n$, найдем наибольший и обозначим его $m$. Тогда $\bar{\boldsymbol{S}}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |w_k| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} |u_i v_j| = \sum\limits_{i=1}^{m} |u_i| \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} |v_j| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i| \cdot \sum\limits_{j=1}^{\infty} |v_j| < \infty$, частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |w_k|$ ограничены и, значит, он сходится, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ сходится абсолютно. Тогда его сумма по теореме 1 Коши не зависит от порядка суммирования членов и последовательность или любая подпоследовательность частичных сумм ряда, члены которого $w_k$, расположеные в каком угодно порядке, стремится к сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$.
А $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} u_i v_j = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} v_j \xrightarrow[m \to \infty]{} UV$, значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k = UV$. ▲

**Теорема 4** (Мертенса). *Если два числовых ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *сходятся, причем один из них абсолютно, и имеют суммы* $U$ *и* $V$ *соответственно, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$*, где* $w_k = \sum_{j=1}^{k} u_j v_{k+1-j}$*, сходится и его сумма равна* $UV$.

▼ Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, $U_n$ и $V_n$ — частичные суммы с номерами $n$ рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ соответственно. Тогда

$$\left|U_n V_n - \sum_{k=1}^{n} w_k\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j - \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k} u_r v_{k+1-r}\right| =$$
$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1-i} u_i v_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |V_n - V_{n+1-i}|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для любого $k > N$ выполняются неравенства $|V - V_n| < \varepsilon$ и $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} |u_i| < \varepsilon$. Тогда при $n > 2N$ имеем оценку $\sum\limits_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |V_n - V_{n+1-i}| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} + \sum\limits_{i=N+1}^{n}\right) |u_i| \cdot |V_n - V_{n+1-i}| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} |u_i| \cdot (|V_n - V| + |V - V_{n+1-i}|) + \sum\limits_{i=N+1}^{\infty} |u_i| \cdot 2\sup\limits_n |V_n| \leqslant \left(2\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i| + 2\sup\limits_n |V_n|\right) \cdot \varepsilon$, т.е. $U_n V_n - \sum\limits_{k=1}^{n} w_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, что и доказывает теорему. ▲

## **Лекция 5** (16.09.20) **Умножение числовых рядов. Бесконечные произведения**

### Бесконечные произведения

Произведение, содержащее бесконечное множество сомножителей, обычно называют бесконечным произведением. Но пользоваться мы будем более конкретным (и более узким) определением.

**Определение 1**. Если $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$, $n \in \mathbb{Z}$, — последовательность, то выражение вида $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \dots \cdot a_k \cdot \dots$, записываемое также как $\prod\limits_{k=n}^{\infty} a_k$, называют **бесконечным произведением**.

Элементы последовательности $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$, рассматриваемые как элементы бесконечного произведения, называют **членами** бесконечного произведения.

Бесконечное произведение, члены которого числа (действительные или комплексные), называется бесконечным числовым произведением. Только такие бесконечные произведения будем рассматривать в дальнейшем. Так как нумерацию членов можно изменить, начав ее либо с 0, либо с 1, то в дальнейшем ограничимся случаем $n = 1$, т.е. бесконечным произведением вида $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots = \prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

**Определение 2**. Произведение $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, первых $n$ членов бесконечного произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называют **частичным произведением** (с номером $n$) или **$n$-ым частичным призведением**.

**Определение 3**. Если существует конечный отличный от нуля предел последовательности частичных произведений $P = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, то бесконечное произведение называют **сходящимся**; также говорят, что бесконечное произведение сходится к числу $P$ и называют $P$ **значением** (**величиной**) бесконечного произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Если предел частичных произведений бесконечного произведения не существует или равен 0 или $\pm\infty$ (если члены — действительные числа), то такое бесконечное произведение называют расходящимся. Если $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ равен 0 или $\pm\infty$, то также говорят, что бесконечное произведение расходится к 0 или к $\pm\infty$ (иногда в этих случаях говорят и о сходимости к 0 или к $\pm\infty$).

**Определение 4**. Если бесконечное произведение сходится, то величину $r_n = \frac{P}{P_n} = \prod\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называют **$n$-ым остатком** произведения; очевидно $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Если хотя бы один член бесконечного произведения равен 0, то это произведение расходится к 0. Поэтому в дальнейшем будем считать, что все члены рассматриваемого бесконечного произведения отличны от 0.

**Теорема 1** (необходимое условие сходимости). *Если бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 1$.*

▼ Так как $a_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \frac{\lim\limits_{k\to\infty} P_k}{\lim\limits_{k\to\infty} P_{k-1}} = \frac{P}{P} = 1$. ▲

Из определения сходимости бесконечного произведения следует, что отбрасывание из бесконечного произведения или вписывание в него конечного числа отличных от нуля членов (сомножителей), а также их замена на также отличные от нуля члены не изменяет сходимости или расходимости произведения (в том числе к 0). А из необходимого условия сходимости произведения следует, что начиная с некоторого номера все члены сходящегося бесконечного произведения действительных чисел положительны. Поэтому, неограничивая общности, можно считать все члены произведения действительных чисел положительными.

**Теорема 2** (условие сходимости). *Произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ с $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln a_k$. В случае сходимости $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln a_k\right) = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k}$.*

▼ Так как $\ln P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \ln P_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln a_k$, предел $\ln P_n$ и бесконечная сумма одновременно существуют или несуществуют. В силу непрерывности функций $\ln x$ и $e^x$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} P_n \in (0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} \ln P_n$ и $\ln \lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln P_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln a_k$, откуда следует утверждаемое в теореме равенство. ▲

**Теорема 3** (условие сходимости). *Произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+\alpha_k)$, *где все действительные* $\alpha_k > -1$ *и одного знака, сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$.

▼ Сходимость бесконечного произведения по предыдущей теореме эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)$, что эквивалентно сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ по признаку сравнения 3 из лекции I, ведь $\alpha_k \to 0 \Leftrightarrow \ln(1+\alpha_k) \to 0$ и $\frac{\ln(1+\alpha_k}{\alpha_k} \xrightarrow[\alpha_k\to 0]{} 1$. ▲

Разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение

**Теорема 4** (Эйлера). *Для любого действительного (комплексного)* $x$

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

▼ Для $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, равенство очевидно верно, т.к. произведение расходится к нулю. Поэтому пусть $x \neq k\pi$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, т.е. $\sin x \neq 0$. Доказательство будет состоять из нескольких этапов.

Этап 1. Пусть $m$ — нечетное натуральное число, $m = 2n+1$, тогда для $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right), \tag{*}$$

причем при $m = 1$ и $n = 0$ считаем произведение пустого множества сомножителей равным 1.

Действительно, $\sin m\theta = P_n\left(\sin^2\theta\right)\cdot\sin\theta$, где $P_n$ — многочлен степени $n$. Это верно при $m = 1$ и $m = 3$. И если верно для $m = p \geqslant 3$, то верно и для $m = p+2$. Ведь по обычной формуле сложения синусов $\sin m\theta + \sin(m-4)\theta = 2\sin(m-2)\theta\cdot\cos 2\theta = 2\sin(m-2)\theta\cdot(1-2\sin^2\theta)$, значит, $\sin(p+2)\theta = 2\sin p\theta\cdot(1-2\sin^2\theta) - \sin(p-2)\theta = P_{n-1}\left(\sin^2\theta\right)\cdot\sin\theta(1-2\sin^2\theta) - P_{n-2}\left(\sin^2\theta\right)\cdot\sin\theta = P_n\left(\sin^2\theta\right)\cdot\sin\theta$. Еще проще утверждение про вид $\sim m\theta$ следует из формулы Муавра $\cos m\theta + i\sin m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m$ и бинома Ньютона, т.к. по ним $\sin m\theta = \sum\limits_{k=0}^{n} C_m^{2k}(1-\sin^2\theta)^k\cdot(-1)^k\sin^{m-2k}\theta$.

Из вида $\sim m\theta$ следует, что $\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = Q_n\left(\sin^2\theta\right)$, где $Q_n = \frac{1}{m}P_n$ — многочлен степени $n$, который имеет корни $\sin^2\frac{k\pi}{m}$, $k = 1,\ldots,m$, т.к. в точках $\theta = \frac{k\pi}{m}$ функция $\sin m\theta$ равна 0. Кроме того, $Q_n(0) = \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = 1$. Значит, $Q_n(z) = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right)$ (ведь многочлены с одинаковыми корнями могут отличаться лишь на постоянный множитель, а так как они равны 1 в точке 0, то совпадают). Отсюда следует равенство (*).

Этап 2. Положим в выведенной формуле (*) $\theta = \frac{x}{m}$, тогда

$$\frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right).$$

Пусть $p$ и $n$ такие натуральные числа, что $|x| \leqslant 2p < 2n = m - 1$. Тогда

$$\frac{\sin x}{m \sin \frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}}\right) \cdot R_p^n(x),$$

где $R_p^n(x) = \prod\limits_{k=p+1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}}\right)$. Устремим $m = 2n + 1$ к бесконечности, получим

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) R_p(x), \tag{**}$$

где $R_p(x) = \lim\limits_{n\to\infty} R_p^n(x)$ существует в силу существования всех остальных пределов в формуле. Если докажем, что $\lim\limits_{p\to\infty} R_p(x) = 1$, то, перейдя в формуле (**), получим требуемое утверждение. Оценим величину $R_p^n(x)$, точнее, $|R_p^n(x) - 1|$.

Этап 3. **Лемма.** Если $a_k$ — последовательность комплексных чисел, то для любого натурального $n$ верно неравенство

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k) - 1\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1 + |a_k|) - 1.$$

Действительно, для $n = 1$ это верно, $|(1 + a_1) - 1| = (1 + |a_1|) - 1$. Предположим, что неравенство верно для $n = m$. Так как $\left|\prod\limits_{k=1}^{n+1}(1 + a_k) - 1\right| \leqslant \left|\prod\limits_{k=1}^{n+1}(1 + a_k) - \prod\limits_{k=1}^{n}(1 + a_k)\right| + \left|\prod\limits_{k=1}^{n}(1 + a_k) - 1\right| \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n}(1 + |a_k|) \cdot |a_{n+1}| + \prod\limits_{k=1}^{n}(1 + |a_k|) - 1 = \prod\limits_{k=1}^{n+1}(1 + |a_k|) - 1$, то оно верно и для $n = m + 1$. Значит, неравенство верно для всех натуральных $n$. Лемма доказана.

Следовательно,

$$\left|R_p^n(x) - 1\right| \leqslant \prod_{k=p+1}^{n} \left(1 + \frac{\left|\sin^2 \frac{x}{m}\right|}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}}\right) - 1.$$

Оценим синусы в этом выражении.

Этап 4. Для $|z| \leqslant 1$ имеем неравенство $|\sin z| = \left|z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right| \leqslant |z| \cdot \left(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots\right) \leqslant |z| \cdot \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \dots\right) = \frac{6}{5}|z|$ (для действительного $z$ просто $|\sin z| \leqslant |z|$).

Из выпуклости вверх $\sin t$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$ следует, что $\frac{2}{\pi}t \leqslant \sin t$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Значит, $\frac{|\sin \frac{x}{m}|}{|sin \frac{k\pi}{m}|} \leqslant \frac{\frac{6|x|}{5m}}{\frac{2k}{m}} = \frac{3|x|}{5k}$. Отсюда

$$\left|R_p^n(x) - 1\right| \leqslant \prod_{k=p+1}^{n} \left(1 + \frac{9|x|^2}{25k^2}\right) - 1.$$

Так как нестрогие неравенства сохраняются при предельном переходе, то

$$|R_p(x) - 1| \leqslant \prod_{k=p+1}^{\infty} \left(1 + \frac{9|x|^2}{25k^2}\right) - 1.$$

Так как $\prod\limits_{k=p+1}^{\infty}\left(1+\frac{9|x|^2}{25k^2}\right)\xrightarrow[p\to\infty]{}1$ как остаток сходящегося (по теореме 4 в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$) произведения, то $R_p\xrightarrow[p\to\infty]{}1$ и, переходя к пределу в формуле (**) при $p\to\infty$, получаем, что

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \blacktriangle$$

Формула Эйлера доказана.

Выведем из нее ряд следствий.

**Следствие 1** (формула Валлиса).

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

▼ Полагая в формуле Эйлера разложения синуса в бесконечное произведение аргумент синуса $x=\frac{\pi}{2}$ получаем, что

$$1=\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)=\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2-1}{4k^2}=\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2},$$

откуда и следует формула Валлиса. ▲

**Следствие 2** (Разложение косинуса). *Для любого действительного (комплексного) $x$*

$$\cos x=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2\pi^2}\right).$$

▼ Для $x\neq n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$,

$$\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\lim_{N\to\infty}\frac{2x\prod\limits_{k=1}^{2N}\left(1-\frac{4x^2}{k^2\pi^2}\right)}{2x\prod\limits_{k=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2\pi^2}\right).$$

Если $x=n\pi$, то получаем $\cos n\pi=(-1)^n$ и

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{4n^2\pi^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\frac{(2k-1)^2-4n^2}{(2k-1)^2}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\frac{(2k-2n-1)(2k+2n-1)}{(2k-1)^2}=\lim_{N\to\infty}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-2n-1)\prod\limits_{k=N-n+1}^{N}(2k+2n-1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)\prod\limits_{k=N-n+1}^{N}(2k-1)}=$$

$$=(-1)^n\lim_{N\to\infty}\prod_{k=N-n+1}^{N}\frac{2(k+n)-1}{2k-1}=(-1)^n$$

и, значит, утверждение следствия верно. ▲

**Замечание**. Используя разложения синуса и косинуса в бесконечное произведение легко получить аналогичные разложения для гаперболических синуса и косинуса, ведь $\operatorname{sh} x = -i \sin ix$, $\operatorname{ch} x = \cos ix$, поэтому

$$\operatorname{sh} x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), \ \operatorname{ch} x = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 \pi^2}\right).$$

## **Лекция 6** (18.09.20)
## **Обобщенные методы суммирования расходящихся последовательностей и рядов**

В ряде задач как теоретического, так и практического характера, возникают расходящиеся последовательности или расходящиеся ряды. Возникает и необходимость приписывания им некоторого предела или суммы, т.е. возникает проблема суммирования расходящихся последовательностей и рядов, проблема введения обобщения понятия предела последовательности или суммы ряда. Познакомимся с двумя такими обобщениями.

### Метод средних арифметических
### (Чезаро, Чезаро–Фейера или метод (C,1))

**Определение 1**. Последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ суммируется **методом средних арифметических** (**методом Чезаро**) к числу $S$ (или к $S = \pm\infty$), если средние арифметические последовательности

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k \xrightarrow[n\to\infty]{} S.$$

При этом $S$ называют обобщенным пределом в смысле средних арифметических (Чезаро) последовательности $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$. Иногда пишут $\sigma_n = \sigma_n(\{s_k\})$.

**Определение 2**. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ суммируется **методом средних арифметических** (**Чезаро**) к числу $S$ (или к $S = \pm\infty$), если последовательность частичных сумм ряда $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ суммируется этим методом к $S$, т.е.

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} S.$$

При этом $S$ называют обобщенной суммой в смысле средних арифметических (Чезаро) ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

**Определение 3**. Метод суммирования называют **линейным**, если почленное произведение суммируемой к $S$ последовательности (ряда) на число $\alpha$ также суммируемо к $\alpha S$ и если сумма двух суммируемых соответственно к $S$ и $S'$ последовательностей (рядов) суммируется к $S + S'$.

**Определение 4**. Метод суммирования называют **регулярным**, если всякая сходящаяся к числу $S$ последовательность (всякий ряд с суммой $S$) суммируется этим методом также к $S$. Если это верно еще и для $S=\pm\infty$, то такой метод суммирования называют **вполне регулярным**.

**Теорема 1**. *Метод суммирования средних арифметических (Чезаро) линеен и вполне регулярен.*

▼ Свойство линейности очевидно. Докажем регулярность. Пусть $s_k=o(1)$, тогда $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall k>N:\ \ |s_k|<\varepsilon$. Для $n>N$ имеем $|\sigma_n|<\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N}|s_k|+\frac{1}{n}\sum\limits_{k=N+1}^{n}\varepsilon<\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N}|s_k|+\varepsilon=o(1)+\varepsilon$ (при $n\to\infty$), значит, $\exists N^\sigma\ \forall n>N^\sigma:\ |\sigma_n|<2\varepsilon$, т.е. $\sigma_n=o(1)$. Если $s_k\xrightarrow[k\to\infty]{}S$, то тогда $\sigma_n(\{s_k\})=\sigma_n(\{S\})+\sigma_n(\{s_k-S\})=S+o(1)$, т.е. $\sigma_n\xrightarrow[n\to\infty]{}S$.

Докажем вполне регулярность. Если $s_k\xrightarrow[k\to\infty]{}+\infty$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall k>N:$ $s_k\in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(+\infty)$, т.е. $s_k>\frac{2}{\varepsilon}$. Так как $\sigma_n\geqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{k=N+1}^{n}s_k-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N}|s_k|>\frac{1}{n}\sum\limits_{k=N+1}^{n}\frac{2}{\varepsilon}-o(1)=\frac{2}{\varepsilon}-\frac{2N}{n\varepsilon}-o(1)=\frac{2}{\varepsilon}+o(1)$, то $\exists N^\sigma\ \forall n>N^\sigma:\ \ \sigma_n>\frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\sigma_n\in B_\varepsilon(+\infty)$. Значит, $\sigma_n\xrightarrow[n\to\infty]{}+\infty$. Случай $s_k\xrightarrow[k\to\infty]{}-\infty$ разбирается аналогично или умножением на $-1$ сводится к предыдущему случаю. Теорема доказана. ▲

**Примеры**.

Последовательность $(-1)^{k-1}$ расходится, но суммируется методом средних арифметических к нулю, т.к. $\sigma_n$ равна 0 при четном $n$ и равна $\frac{1}{n}$ при нечетном $n$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ расходится, но суммируется методом средних арифметических к $\frac{1}{2}$, т.к. $\sigma_n$ равна $\frac{1}{2}$ при четном $n$ и равна $\frac{n+1}{2n}$ при нечетном $n$.

**Теорема 2** (необходимое условие суммируемости по Чезаро). *Если последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ (ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$) суммируется методом средних арифметических к конечному числу, то $s_k=o(k)$ $(a_k=o(k))$.*

▼ Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$, то $s_k=k\sigma_k-(k-1)\sigma_{k-1}=k(\sigma_k-\sigma_{k-1})+\sigma_{k-1}=k\cdot o(1)+O(1)=o(k)$; также $a_k=s_k-s_{k-1}=o(k)$. ▲

## Метод суммирования Абеля (Абеля-Пуассона)

**Определение 1**. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ **суммируется методом Абеля** к числу $S$ (или к $S=\pm\infty$), если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^{k-1}$ сходится при $x\in[0,1)$ (сходится или расходится к $\pm\infty$ при $x\in[0,1)$) и $\lim\limits_{x\to1-0}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^{k-1}=S$. Величину $S$ называют **обобщенной суммой** в смысле Абеля ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$.

**Определение 2**. Последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ суммируется методом Абеля к числу $S$ (или к $S=\pm\infty$), если ряд $s_1+\sum\limits_{k=2}^{\infty}(s_k-s_{k-1})$, последовательностью частичных сумм которого является $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, суммируется методом Абеля к $S$. Величину $S$ называют **обобщенным пределом** в смысле Абеля последовательности $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$.

**Теорема 3** (Фробениуса). *Если ряд (последовательность) суммируется методом средних арифметических (Чезаро) к числу $S$, то он суммируется методом Абеля к тому же числу.*

▼ Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ суммируется методом средних арифметических к числу $S$. По преобразованию Абеля

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} s_k (x^{k-1} - x^k) + s_n x^{n-1} =$$
$$= (1-x)\sum_{k=1}^{n-1} s_k x^{k-1} + s_n x^{n-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{n} s_k x^{k-1} + s_n x^n.$$

Так как по теореме 2 $s_n = o(n)$, то $s_n x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для $0 \leqslant x < 1$. Переходя к пределу получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} s_k x^{k-1},$$

где оба ряда одновременно сходятся по признаку Коши для $0 \leqslant x < 1$, т.к. по теореме 2 $a_n = o(n)$ и $s_n = o(n)$, поэтому $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k| x^{k-1}} \leqslant x < 1$ и $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|s_k| x^{k-1}} \leqslant x < 1$. По преобразованию Абеля

$$\sum_{k=1}^{n} s_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k\sigma_k (x^{k-1} - x^k) + n\sigma_n x^{n-1} =$$
$$= (1-x)\sum_{k=1}^{n-1} k\sigma_k x^{k-1} + n\sigma_n x^{n-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{n} k\sigma_k x^{k-1} + n\sigma_n x^n.$$

Так как $n\sigma_n = O(n)$, то $n\sigma_n x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для $0 \leqslant x < 1$. Переходя к пределу получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k x^{k-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k x^{k-1},$$

где оба ряда одновременно сходятся по признаку Коши для $0 \leqslant x < 1$ или в силу уже доказанной сходимости первого ряда. Значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = (1-x)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k x^{k-1}.$$

Применяя равенство к ряду $1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$ получаем, что

$$1 = (1-x)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}.$$

По условию $\sigma_k \xrightarrow[k\to\infty]{} S$, значит $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k > N :\ |\sigma_k - S| < \varepsilon$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} - S = (1-x)^2 \sum\limits_{k=1}^{N} k(\sigma_k - S) x^{k-1} + (1-x)^2 \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} k(\sigma_k - S) x^{k-1}$, где первая сумма — $o(1)$ при $x \to 1$, а вторая по модулю не превосходит $(1-x)^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\varepsilon x^{k-1} = \varepsilon$. Значит, $\exists x_0 \in (0,1)\ \forall x \in (x_0,1):\ \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} - S\right| < 2\varepsilon$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ суммируется методом Абеля к $S$. ▲

**Теорема 3**. *Метод суммирования Абеля линеен и вполне регулярен.*

▼ Линейность очевидна, а регулярность следует из предыдущей теоремы и теоремы 1 о регулярности метода средних арифметических. Поэтому рассмотрим случай, когда последовательность частичных сумм $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ стремится к $+\infty$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k x^{k-1}$ при $x \in [0,1)$ может иметь лишь конечное число отрицательных членов и, значит, он либо сходится, либо расходится к $+\infty$. Если он расходится к $+\infty$ при некотором $x = x_0 \in (0,1)$, то по признаку сравнения 2 он расходится к $+\infty$ при всех $x \in [x_0, 1)$. По преобразованию Абеля $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k(x^{k-1} - x^k) + s_n x^{n-1} = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{n} s_k x^{k-1} + s_n x^n$, значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = +\infty$ при $x \in [x_0,1)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ суммируется методом Абеля к $+\infty$.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k x^{k-1}$ сходится при всех $x \in [0,1)$, то его члены стремятся к нулю и из равенства $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{n} s_k x^{k-1} + s_n x^n$ предельным переходом получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k x^{k-1}$. По предположению $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} S$, значит, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k > N$ верно неравенство $s_k > \frac{2}{\varepsilon}$. Тогда, используя очевидное рвенство $1 = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$, имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = (1-x)\left(\sum\limits_{k=1}^{N} + \sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\right) s_k x^{k-1} > (1-x)\sum\limits_{k=1}^{N} s_k x^{k-1} + (1-x)\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon} x^{k-1} - (1-x)\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{2}{\varepsilon} x^{k-1} = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{N}\left(s_k - \frac{2}{\varepsilon}\right) x^{k-1} + \frac{2}{\varepsilon}$, где первое слагаемое в последней части равенства $o(1)$ при $x \to 1-0$. Значит, $\exists x_0 \in [0,1)\ \forall x \in (x_0,1):$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ суммируется методом Абеля к $+\infty$.

Случай $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} -\infty$ разбирается аналогично или умножением на $-1$ сводится к предыдущему случаю. ▲

**Пример** ряда, суммируемого по Абелю, но не суммируемого по Чезаро.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k$ суммируется методом Абеля к $\frac{1}{4}$, но не суммируется методом средних арифметических.

Действительно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^k = \frac{x-(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$, откуда дифференцированием получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kx^{k-1} = \frac{(1+x)(1-(-1)^n(n+1)x^n-(x-(-1)^n x^{n+1}}{(1+x)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{(1+x)^2}$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}kx^{k-1} = \frac{1}{(1+x)^2} \xrightarrow[x\to 1-0]{} \frac{1}{4}$. Так как $a_k = (-1)^{k-1}k$ не являются $o(k)$, то ряд не суммируется методом средних арифметических.

## **Лекция 7** (24.09.20)

**Теоремы тауберова типа**
**Критерий Маркова-Гордона**
**Равномерная сходимость**
**функциональных последовательностей и рядов**

Тауберовы теоремы

Как показывают примеры предыдущей лекции, из суммируемости последовательности (или ряда) не следует ее сходимость. Однако, при выполнении некоторых дополнительных условий суммируемость к некоторому значению влечет сходимость к тому же значению. Утверждения подобного рода называются теоремами тауберова типа (первая подобная теорема была получена Таубером), имеется ряд таких теорем, мы разберем две из них.

**Теорема 1** (Таубера). *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *суммируется методом Абеля к числу* $S$ *и* $a_n = o(\frac{1}{n})$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и* $S$ *– его сумма.*

▼

В силу неравенства

$$|S - \sum_{n=1}^{N} a_n| \le |S - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n| + |\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{N} a_n|$$

достаточно доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{N} a_n \to 0$$

при $N \to \infty$, где $x = \frac{N-1}{N} \to 1$.

Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем $N$ таким, что $|na_n| < \varepsilon$ при $n > N$.

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{N} a_n| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{N} a_n(1-x^n)| \le |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n| + |\sum_{n=1}^{N} a_n(1-x^n)|$$

Первое выражение оценивается так:

$$|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} na_n \frac{x^n}{n}| \le \frac{\varepsilon}{N+1} |\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n| < \frac{\varepsilon}{(N+1)(1-x)} = \frac{N\varepsilon}{N+1} < \varepsilon$$

Для оценки второго воспользуемся тем, что $1-x^n = (1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) < n(1-x)$:

$$|\sum_{n=1}^{N} a_n(1-x^n)| < (1-x)\sum_{n=1}^{N} n|a_n| = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n|a_n|$$

Это — средние арифметические стремящейся к нулю последовательности $\{n|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$, поэтому эти средние тоже стремятся к нулю. Значит, при достаточно больших $N$

второе выражение также не превосходит $\varepsilon$. Значит, $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{N} a_n| < 2\varepsilon$, что и требовалось доказать.

▲

**Определение 1**. Определим сдвинутые средние арифметические (или средние Валле-Пуссена) последовательности $s_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\sigma_{n,k} = \sigma_{n,k}(\{s_j\}) = \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} s_j, \quad n \in \mathbb{Z}^+,\ k \in \mathbb{N}.$$

**Лемма 1**. *Если средние арифметические $\sigma_k = \sigma_{0,k}$ последовательности $S_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, сходятся к $S$, а $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$ так, что отношение $\frac{n}{k_n}$ ограничено, то $\sigma_{n,k_n}$ сходятся к $S$.*

▼Действительно,

$$\sigma_{n,k_n} = \frac{1}{k_n}\left((k_n+n)\sigma_{k_n+n-1} - n\sigma_{n-1}\right) = \sigma_{k_n+n-1} + \frac{n}{k_n}(\sigma_{k_n+n-1} - \sigma_{n-1}) = S + o(1),$$

где $o(1)$ стремится к 0 при $n \to \infty$, если отношение $\frac{n}{k_n}$ ограничено. ▲

**Лемма 2**. *Для последовательности $S_j = \sum_{r=0}^{j} c_r$, $j = 0, 1, 2, \ldots$,*

$$\sigma_{n,k} = S_n + \sum_{j=n+1}^{n+k-1} \left(1 - \frac{j-n}{k}\right) c_j.$$

▼ Так как $k\sigma_{n,k} = \sum_{j=n}^{n+k-1} S_j = kS_n + \sum_{j=n}^{n+k-1}(S_j - S_n) = kS_n + \sum_{j=n+1}^{n+k-1}(n+k-j)c_j$, то лемма верна. ▲

**Теорема 2**. (тауберова теорема Харди). *Если у ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ члены $c_k = O(\frac{1}{k})$ при $k \to \infty$ и он суммируется методом средних арифметических к числу $S$, то он сходится к $S$.*

▼ Дано, что для некоторого $A > 0$ $|c_k| \leqslant \frac{A}{k}$. Из леммы 2 для $n \geqslant K$ получаем оценку

$$|\sigma_{n,k} - S_n| \leqslant \sum_{j=n+1}^{n+k-1} |c_j| \leqslant A\frac{k-1}{n}. \tag{*}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и для каждого $n > \max\{\frac{2}{\varepsilon}, K\}$ выберем $k_n \in \mathbb{N}$ так, что $\frac{\varepsilon n}{2} \leqslant k_n \leqslant \varepsilon n$. Поскольку $\varepsilon n > 2$, то это возможно. Поскольку отношение $\frac{n}{k_n} \leqslant \frac{2}{\varepsilon}$, то по лемме 1 $\sigma_{n,k_n}$ сходятся к $S$ и, значит, начиная с некоторого номера $N$ имеем оценку $|\sigma_{n,k_n} - S| < \varepsilon$. А из оценки (*) следует, что $|\sigma_{n,k} - S_n| \leqslant A\varepsilon$. Следовательно, начиная с некоторого номера $N$ имеем оценку $|S_n - S| < (A+1)\varepsilon$. Теорема доказана. ▲

Критерий Маркова-Гордона

В анализе часто возникают ситуации, когда переходят к пределу сначала по одной переменной (параметру), потом по другой, а дальше возникает необходимость поменять порядок пределов с сохранением конечного результата. Наиболее общим результатом на эту тему является следующий критерий Маркова–Гордона. Этот критерий был опубликован Р.А. Гордоном в 1995 г. Похожий критерий перестановки пределов функций двух переменных А.А. Марков опубликовал в 1890 г.

**Теорема 3** (Критерий Маркова–Гордона). *Пусть* $\mathfrak{B}$ *— база в множестве* $X$, $\mathfrak{D}$ *— база в множестве* $Y$, *а* $h(x,y)$ *— функция двух переменных* $x \in X$ *и* $y \in Y$, *т.е. отображение из множества* $X \times Y$ *в* $\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$. *Предположим, что* $f(x) = \lim\limits_{\mathfrak{D}} h(x,y)$ *существует для всех* $x \in X$, *а* $g(y) = \lim\limits_{\mathfrak{B}} h(x,y)$ *существует для всех* $y \in Y$. *Тогда оба предела*

$$\lim_{\mathfrak{B}} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{\mathfrak{D}} g(y)$$

*существуют и равны тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B_\varepsilon \in \mathfrak{B}\ \forall x \in B_\varepsilon\ \exists D_x \in \mathfrak{D}\ \forall y \in D_x: \quad |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon.$$

▼ Сначала докажем необходимость условия. Предположим, что оба предела $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f(x)$ и $\lim\limits_{\mathfrak{D}} g(y)$ существуют и равны и пусть $H$ — общая величина этих пределов. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f(x) = H$, то существует элемент $B_\varepsilon$ базы $\mathfrak{B}$, $B_\varepsilon \subset X$, такой что для всех $x \in B_\varepsilon$ верно неравенство $|f(x) - H| < \varepsilon$. Теперь фиксируем любое $x \in B_\varepsilon$. По предположению существует такой элемент $D_1$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_1$ верно неравенство $|h(x,y) - f(x)| < \varepsilon$. Также по предположению существует такой элемент $D_2$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_2$ верно неравенство $|g(y) - H| < \varepsilon$. Выберем такой элемент $D_x$ базы $\mathfrak{D}$, что $D_x \subset D_1 \cap D_2$. Тогда для каждого $y \in D_x$ имеем оценку

$$|h(x,y) - g(y)| \leqslant |h(x,y) - f(x)| + |f(x) - H| + |H - g(y)| < 3\varepsilon.$$

Так как константа 3 несущественна (всегда можно $\varepsilon$ сначала уменьшить в 3 раза), а $x$ — любой элемент $B_\varepsilon$, то необходимость условия доказана.

Теперь докажем достаточность условия. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $B_\varepsilon$ базы $\mathfrak{B}$, что для каждого $x \in B_\varepsilon$ существует элемент $D_x$ базы $\mathfrak{D}$, такой что для всех $y \in D_x$ выполняется неравенство $|h(x,y) - g(y)| < \varepsilon$. Сначала докажем, что для функции $f(x)$ выполняется критерий Коши по базе $\mathfrak{B}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По предположению существует такой элемент $B_\varepsilon$ базы $\mathfrak{B}$, что для каждого $x \in B_\varepsilon$ существует элемент $D_x$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_x$ выполняется неравенство $|h(x,y) - g(y)| < \varepsilon$. Возьмем любые $x_1, x_2 \in B_\varepsilon$. Так как $\lim\limits_{\mathfrak{D}} h(x_1,y) = f(x_1)$, то существует такой элемент $D_1$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_1$ верно неравенство

$$|h(x_1,y) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

По предположению существует такой элемент $D_{x_1}$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_{x_1}$ верно неравенство

$$|h(x_1,y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Аналогично существует такой элемент $D_2$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_2$ верно неравенство

$$|h(x_2,y) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

По предположению существует такой элемент $D_{x_2}$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_{x_2}$ верно неравенство

$$|h(x_2, y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Выберем такой элемент $D_0$ базы $\mathfrak{D}$, что $D_0 \subset D_1 \cap D_{x_1} \cap D_2 \cap D_{x_2}$. Тогда для каждого $y \in D_0$ имеем оценку

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - h(x_1, y)| + |h(x_1, y) - g(y)| +$$
$$+ |g(y) - h(x_2, y)| + |h(x_2, y) - f(x_2)| < 4\varepsilon.$$

Так как константа 4 несущественна (всегда можно $\varepsilon$ сначала уменьшить в 4 раза), то, значит, для функции $f(x)$ выполняется критерий Коши по базе $\mathfrak{B}$, а следовательно существует $H = \lim\limits_{\mathfrak{B}} f(x)$.

Осталось доказать, что $\lim\limits_{\mathfrak{D}} g(x) = H$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По предположению существует такой элемент $B_\varepsilon$ базы $\mathfrak{B}$, что для каждого $x \in B_\varepsilon$ существует элемент $D_x$ базы $\mathfrak{D}$, такой что для каждого $y \in D_x$ выполняется неравенство $|h(x, y) - g(y)| < \varepsilon$. В силу доказанного существует такой элемент $B_1 \subset X$ базы $\mathfrak{B}$, что для всех $x \in B_1$ верно неравенство $|f(x) - H| < \varepsilon$. Возьмем элемент $B_0 \subset B_\varepsilon \cap B_1$ базы $\mathfrak{B}$. Пусть $x_0 \in B_0$. Так как $\lim\limits_{\mathfrak{D}} h(x_0, y) = f(x_0)$, то существует такой элемент $D_0$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_0$ верно неравенство $|h(x_0, y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Возьмем элемент $D_1 \subset D_x \cap D_0$ базы $\mathfrak{D}$. Тогда для всех $y \in D_1$ имеем оценку

$$|g(y) - H| \leqslant |g(y) - h(x_0, y)| + |h(x_0, y) - f(x_0)| + |f(x_0) - H| < 3\varepsilon.$$

Так как константа 3 несущественна (всегда можно $\varepsilon$ сначала уменьшить в 3 раза), то $\lim\limits_{\mathfrak{D}} g(x) = H$, достаточность условия установлена. ▲

**Определение 2.** Пусть $\mathfrak{B}$ — база в множестве $X$, а $h(x, y)$ — функция двух переменных $x \in X$ и $y \in Y$, т.е. отображение из множества $X \times Y$ в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Пусть $g(y)$ — функция на множестве $Y$.

Будем говорить, что $h(x, y)$ **сходится равномерно на множестве $Y$ к функции $g(y)$ по базе $\mathfrak{B}$**, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B_\varepsilon \in \mathfrak{B}\ \forall x \in B_\varepsilon\ \forall y \in Y: \quad |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Отметим, что $h(x, y)$ **сходится поточечно на множестве $Y$ к $g(y)$ по базе $\mathfrak{B}$**, если

$$\forall y \in Y\ \forall \varepsilon > 0\ \exists B_{\varepsilon,y} \in \mathfrak{B}\ \forall x \in B_{\varepsilon,y}: \quad |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что равномерная сходимость влечет поточечную, достаточно взять $B_{\varepsilon,y} = B_\varepsilon$.

**Теорема 4.** [О перестановке пределов]. *Пусть $\mathfrak{B}$ — база в множестве $X$, а $h(x, y)$ — функция двух переменных $x \in X$ и $y \in Y$, т.е. отображение из множества $X \times Y$ в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Предположим, что $h(x, y)$ сходится равномерно на множестве $Y$ к $g(y)$ по базе $\mathfrak{B}$. Тогда для любой $\mathfrak{D}$ — базы в множестве $Y$, такой, что для всех $x \in X$ существует $f(x) = \lim\limits_{\mathfrak{D}} h(x, y)$, оба предела*

$$\lim_{\mathfrak{B}} f(x) \quad \textit{и} \quad \lim_{\mathfrak{D}} g(y)$$

*существуют и равны.*

▼ Дано, что выполнено условие равномерной сходимости:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B_\varepsilon\in\mathfrak{B}\ \forall x\in B_\varepsilon\ \forall y\in Y:\quad |h(x,y)-g(y)|<\varepsilon.$$

Условие критерия Маркова-Гордона

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B_\varepsilon\in\mathfrak{B}\ \forall x\in B_\varepsilon\ \exists D_x\in\mathfrak{D}\ \forall y\in D_x:\quad |h(x,y)-g(y)|<\varepsilon.$$

выполнено для любого элемента базы $\mathfrak{D}$, т.к. оно выполнено для всех $y\in Y$.

▲

## Функциональные последовательности и ряды

**Определения 1-2**. **Функциональной последовательностью** будем называть последовательность определенных на некотором множестве $X$ функций $\{f_k\}_{k=n}^{\infty}$, $n\in\mathbb{N}$.

**Функциональным рядом** будем называть ряд определенных на некотором множестве $X$ функций $\sum\limits_{k=n}^{\infty}f_k$, $n\in\mathbb{N}$.

**Определения 3-4**. Функцию последовательности (ряда), соответствующую целому числу $k\geqslant n$, $f_k$, называют **членом** (**элементом**) последовательности (ряда), множество $X$ — **областью** (или **множеством**) определения функциональной последовательности (ряда).

Далее будем рассматривать только действительнозначные или комплеснозначные функции и последовательности (или ряды) из них. Так как нумерацию членов можно изменить, начав ее, например, с 1, то ограничимся рассмотрением последовательностей и рядов, члены которых занумерованы натуральными числами.

**Определение 5**. Сумму первых $n$ членов функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{n}f_k$ будем называть $n$-ой частичной суммой этого ряда.

Отметим, что изучение функциональных рядов сводится к изучению последовательности его частичных сумм. А всякую функциональную последовательность $s_n$ можно рассматривать как последовательность частичных сумм ряда $s_1+\sum\limits_{k=2}^{\infty}(s_k-s_{k-1})$.

**Определение 6**. Функциональная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется **сходящийся в точке** $x_0$ к числу $s$, если все (или начиная с некоторого номера) функции последовательности определены в точке $x_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x_0)=s$.

**Определение 7**. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k$ называется **сходящимся в точке** $x_0$ к числу $S$, если все функции ряда определены в точке $x_0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}f_k(x_0)$ сходится к $S$.

**Определение 8**. Функциональная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится **на множестве** (точнее, сходится **поточечно на множестве**) $X$, если все (или начиная с некоторого номера) функции последовательности определены на $X$ и последовательность $f_k(x)$ сходится в каждой точке $x\in X$.

Если $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$ для $x\in X$, то последовательность $\{f_k\}$ сходится к $f$ на $X$.

**Определение 9**. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ сходится **на множестве** (точнее, сходится **поточечно на множестве**) $X$, если все функции ряда определены на $X$ и конечная сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ существует в каждой точке $x \in X$.

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x)$ для $x \in X$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ сходится к $S(x)$ на $X$.

Новым важным понятием будет понятие равномерной сходимости.

**Определение 10**. Последовательность функций $f_k(x)$ **равномерно на множестве** $X$ сходится к функции $f(x)$, если все функции $f_k(x)$ и $f(x)$ определены на $X$ и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall k > N,\ k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X:\ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

**Замечание** (супремум-критерий). Последовательность $f_k(x)$ сходится равномерно на множестве $X$ к функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_X |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Равномерную сходимость последовательности функций $f_k$ к функции $f$ на множестве $X$ обозначают так:

$$f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f.$$

**Определение 11**. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на множестве $X$ к функции $S(x)$, если функции $f_k(x)$, $k \geqslant n$, и $f(x)$ определены на $X$ и если последовательность $S_N(x)$ частичных сумм ряда сходится равномерно на $X$ к $S(x)$.

**Определение 12**. Функциональная последовательность (ряд) сходится равномерно на множестве $X$, если существует функция, к которой эта последовательность (ряд) сходится равномерно на $X$.

**Теорема 1**. *Из равномерной сходимости функциональной последовательности $f_k$ (ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$) на множестве $X$ следует ее (его) поточечная сходимость на $X$.*

▼ Если в определении равномерной сходимости зафиксировать точку $x \in X$, то получится определение сходимости числовой последовательности $f_k(x)$ (ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$) на множестве $X$. ▲

**Примеры**. $x^k \underset{k\to\infty}{\overset{[0,1-\varepsilon]}{\rightrightarrows}} 0$, $0 < \varepsilon < 1$, т.к. $\sup\limits_{[0,1-\varepsilon]} x^k = (1-\varepsilon)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но $x^k \underset{k\to\infty}{\overset{[0,1)}{\not\rightrightarrows}} 0$, т.к. $\sup\limits_{[0,1)} x^k = 1$, хотя поточечно $x^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для $x \in [0,1)$.

**Определение 1**. Функциональная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет **условию Коши равномерной сходимости** на множестве $X$, если все $f_k$, $k \in \mathbb{N}$, определены на $X$ и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n, m > N,\ n, m \in \mathbb{N}\ \forall x \in X:\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

**Теорема 1** (Коши). *Функциональная последовательность сходится равномерно на множестве $X$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на множестве $X$.*

▼ Необходимость. Если $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k > N,\ \forall x \in X:\ |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда $\forall n, m > N,\ \forall x \in X:\ |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, последовательность $f_k$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости.

Достаточность. Если функциональная последовательность $\{f_k\}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на множестве $X$, то в каждой точке $x \in X$ последовательность $f_k(x)$ удовлетворяет условию Коши сходимости числовых последовательностей и, значит, сходится. Обозначим ее предел $f(x)$. По условию Коши равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N,\ \forall x \in X:\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Устремляя $m$ к бесконечности получаем в пределе, что

$$\forall n > N,\ \forall x \in X:\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

т.е. $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$. Теорема доказана. ▲

## **Лекция 8** (25.09.20) <br> Простейшие свойства равномерной сходимости последовательностей и рядов <br> Признаки равномерной сходимости

**Определение 1**. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ удовлетворяет **условию Коши равномерной сходимости** на множестве $X$, если все $u_k$, $k \in \mathbb{N}$, определены на $X$ и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n > N\ \forall p > 0, n, p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X:$$
$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

или, что эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n, m > N\ n, m \in \mathbb{N},\ \forall x \in X:\ \left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Это переформулировка для рядов условия Коши равномерной сходимости последовательностей. Переформулируем для рядов и теорему 1 прошлой лекции.

**Теорема 1** (Коши). *Функциональный ряд сходится равномерно на множестве $X$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на этом множестве.*

**Следствие**. *Члены равномерно сходящегося на множестве $X$ функционального ряда равномерно стремятся к нулю на этом множестве.*

Это следует как из условия Коши равномерной сходимости, если взять $p = 1$ или $m = n$, так и из того, что $u_k(x) = S_k(x) - S_{k-1}(x) \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$, если ряд равномерно сходится на $X$.

### Простейшие свойства равномерной сходимости

1. Если функциональная последовательность (ряд) равномерно сходится на множестве $X$, то она (он) равномерно сходится и на любом подмножестве $X$.

2 (линейность). Если $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\in \mathbb{C})$, то $\alpha f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \alpha f$. Если $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$ и $g_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} g$, то $f_k \pm g_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f \pm g$.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на множестве $X$, число $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\in \mathbb{C})$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha u_k(x)$ равномерно сходится к $\alpha S(x)$ на $X$. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ равномерно сходятся к $S(x)$ и $S'(x)$ соответственно на множестве $X$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k(x) \pm v_k(x))$ равномерно сходится к $S(x) \pm S'(x)$ на $X$.

3. Если $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$, а $g$ — ограниченная функция на $X$, то $gf_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} gf$.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на $X$, а $g(x)$ — ограниченная функция на $X$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g(x)u_k(x)$ равномерно сходится к $g(x)S(x)$ на $X$.

Верность свойства 1 непосредственно следует из определения.

Верность свойства 2 для последовательностей следует из того, что если $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ на $X$, то $|\alpha f_k(x) - \alpha f(x)| < |\alpha|\varepsilon$ на $X$; если $|f_k(x) - f(x)|$ и если $|g_k(x) - g(x)| < \varepsilon$ на $X$, то $|(f_k(x) \pm g_k(x)) - (f(x) \pm g(x))| < 2\varepsilon$ на $X$.

Верность свойства 2 для рядов следует из верности свойства 2 для последовательностей.

Верность свойства 3 для последовательностей следует из того, что если $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ на $X$, то $|g(x)f_k(x) - g(x)f(x)| < \sup\limits_X |g(x)| \cdot \varepsilon$ на $X$.

Верность свойства 3 для рядов следует из верности свойства 3 для последовательностей.

### Признаки равномерной сходимости

Каждый признак можно формулировать в двух вариантах — для последовательностей и для рядов. Мы будем приводить или обе формулироваки или только одну более удобную.

**Признак 1** (Вейерштрасса). *Функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на множестве* $X$*, если* $u_k(x)$*,* $k \in \mathbb{N}$*, определены на* $X$ *и удовлетворяют оценкам* $|u_k(x)| \leqslant \alpha_k$ *на* $X$*,* $k \in \mathbb{N}$*, где числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *сходится.*

▼ 1 способ. Из условия Коши сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сразу следует справедливость условия Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на $X$.

2 способ. По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в каждой точке $x \in X$ и

его остаток $|r_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k = r_n \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, т.е. $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$. ▲

**Признак 2** (Дини). *Если последовательность непрерывных на компакте $K$ (в некотором метрическом пространстве) функций $f_k(x)$ сходится в каждой точке $K$ к непрерывной на $K$ функции $f(x)$ и $|f_k(x) - f(x)| \to 0$ монотонно в каждой точке $K$, то $f_k(x) \underset{k\to\infty}{\overset{K}{\rightrightarrows}} f(x)$.*

▼ Пусть $\varphi_k(x) = |f_k(x) - f(x)|$ — последовательность непрерывных на $K$ функций в каждой точке $x \in K$ монотонно стремящаяся к нулю. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и пусть $F_N = \{x \in K : \ |\varphi_N(x)| \geqslant \varepsilon\} = \bigcup\limits_{n\geqslant N} \{x \in K : \ |\varphi_n(x)| \geqslant \varepsilon\}$, это замкнутое подмножество $K$. Из того, что в каждой точке $x \in K$ $\ \varphi_n(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ следует, что $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} F_N = \emptyset$, значит, $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} (M \setminus F_N) = M \setminus \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} F_N = M \supset K$, где $M$ — метрическое пространство. В силу компактности $K$ найдется $m \in \mathbb{N}$, что $\bigcup\limits_{N=1}^{m} (M \setminus F_N) \supset K$, а в силу включений $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots \ \ M \setminus F_m \supset K$, значит, $F_m = \emptyset$, т.е. $\forall n \geqslant m\ \forall x \in K$: $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$. Теорема доказана. ▲

**Замечание**. Если в каждой точке $x \in K$ функции $f_k(x)$ действительны и образуют монотонную последовательность, то $|f_k(x) - f(x)| \to 0$ монотонно в каждой точке $K$.

Часто в признаке Дини вместо условия, что $|f_k(x) - f(x)| \to 0$ монотонно в каждой точке $K$, фигурирует приведенное условие.

Приведем формулировку признака Дини в этом виде для рядов.

**Признак 2** (Дини) для рядов. *Если все члены функционального ряда действительны и непрерывны на компакте $K$, в каждой его точке одного знака и ряд сходится поточечно на $K$ к непрерывной на $K$ функции, то этот ряд сходится равномерно на $K$.*

Это утверждение сразу следует из вышеприведенного признака Дини для функциональных последовательностей и замечания к нему.

**Признак 3** (Лейбница). *Если заданный на множестве $X$ функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ имеет действительные члены, которые равномерно на $X$ стремятся к нулю, в каждой точке $X$ знакопеременны и монотонно убывают по модулю, то он равномерно сходится на $X$.*

▼ По признаку Лейбница для числовых рядов остаток ряда $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)$ оценивается по модулю модулем первого члена остатка $|r_n(x)| \leqslant |a_{n+1}(x)|$, а по условию $a_k(x) \to 0$ равномерно на $X$. ▲

**Признак 4** (Абеля). *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $X$, а $v_k(x)$ такая последовательность на $X$, что $v_1(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_k(x) - v_{k+1}(x)|$ ограничены на $X$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x)$ сходится равномерно на $X$.*

**Определение**. Семейство функций $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in\Lambda}$ (например, в случае функциональной последовательности $\Lambda = \mathbb{N}$) **равномерно ограничена** (**ограничена в со-**

**вокупности**) на множестве $X$, если $f_\alpha(x)$ определены на $X$ и $\sup\limits_{\alpha\in\Lambda,\, x\in X} |f_\alpha(x)| < +\infty$, т.е. множество $\{f_\alpha(x), x\in X, \alpha\in\Lambda\}$ ограничено.

**Замечание.** Из того, что $|v_n(x)| = |\sum\limits_{k=1}^{n-1}(v_{k+1}(x) - v_k(x)) + v_1(x)| \le \sum\limits_{k=1}^{\infty}|v_{k+1}(x) - v_k(x)| + |v_1(x)|$ следует, что в условиях признака Абеля последовательность $\{v_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничена на $X$.

**Признак 5** (Дирихле). *Если частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно ограничены на $X$, а $v_k(x)$ равномерно стремящаяся к нулю на $X$ последовательность с равномерно сходящимся на $X$ рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|v_k(x) - v_{k+1}(x)|$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)v_k(x)$ сходится равномерно на $X$.*

▼

Проведем доказательство одновременно для признаков 4 и 5. Используя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=m}^{n} u_k(x)v_k(x) = \sum_{k=m-1}^{n-1} U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x)) + v_n(x)U_n(x),$$

где $U_r(x) = \sum\limits_{j=m}^{r} u_j(x)$.

Для случая признака Абеля по условию Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеем, что $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\ \ \forall k,m,\ k>m>N\ \ \forall x\in X$: $\left|\sum\limits_{j=m}^{k} u_j(x)\right| = |U_k(x)| < \varepsilon$. Тогда из приведенного равенства получаем следующую оценку

$$|\sum_{k=m}^{n} u_k(x)v_k(x)| \le \varepsilon \sum_{k=m-1}^{n-1}|v_k(x) - v_{k+1}(x)| + |v_n(x)|\varepsilon \le$$

$$\le \varepsilon\left(\sup_{x\in X}\sum_{k=1}^{\infty}|v_k(x) - v_{k+1}(x)| + \sup_{x\in X}\sup_{n\in\mathbb{N}}|v_n(x)|\right),$$

Для случая признака Дирихле по условию Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|v_k(x) - v_{k+1}(x)|$ и по равномерной сходимости к нулю последовательности $\{v_n(x)\}$ имеем, что $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\ \ \forall n,m,\ n>m>N\ \ \forall x\in X$: $\sum\limits_{k=m-1}^{n-1}|v_k(x) - v_{k+1}(x)| < \varepsilon$ и $v_n(x) < \varepsilon$, а из равномерной ограниченности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеем, что $\forall x\in X\ \forall k\in\mathbb{N}\ |U_k(x)| = |\sum\limits_{j=1}^{k} u_j(x) - \sum\limits_{j=1}^{m-1} u_j(x)| \le 2\sup\limits_{x\in X}\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|\sum\limits_{j=1}^{k} u_j(x)|$. Тогда получаем оценку

$$|\sum_{k=m}^{n} u_k(x)v_k(x)| \le 2\sup_{x\in X}\sup_{k\in\mathbb{N}}|\sum_{j=1}^{k} u_j(x)|\cdot\varepsilon + \varepsilon\cdot 2\sup_{x\in X}\sup_{k\in\mathbb{N}}|\sum_{j=1}^{k} u_j(x)| = 4\varepsilon\sup_{x\in X}\sup_{k\in\mathbb{N}}|\sum_{j=1}^{k} u_j(x)|.$$

В обоих случаях выполнен критерий Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$.

**Замечание 1**. В признаке 4 Абеля наложенные на $v_k(x)$ условия выполняются при следующих требованиях: $v_k(x)$ равномерно ограничены на $X$ и при каждом $x \in X$ $v_k(x)$ образуют монотонную последовательность.

**Замечание 2**. Отметим, что условие ограниченности $v_1(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|$ на $X$ можно очевидно заменить условием ограниченности $v_n(x)$ и $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|$ на $X$ при некотором $n$.

**Замечание 3**. В признаке 5 Дирихле наложенные на $v_k(x)$ условия выполняются при следующих требованиях: $v_k(x)$ равномерно на $X$ стремятся к нулю и при каждом $x \in X$ $v_k(x)$ образуют монотонную последовательность.

**Следствие**. Признак 3 Лейбница — следствие признака Дирихле.

Действительно, если взять $v_k(x) = |a_k|$, $u_k(x) = \operatorname{sign} a_k(x)$, где для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ выполняются условия признака 3 Лейбница, то для $u_k$ и $v_k$ выполняются условия признака 5 Дирихле.

## **Лекция 9** (30.09.20) **Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов**

### Об изменении порядка пределов

**Теорема 1** (о перестановке пределов). *Пусть $\mathfrak{D}$ — база в множестве $X$, $D \in \mathfrak{D}$ и $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} f$, для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $\lim\limits_{\mathfrak{D}} f_k = b_k$. Тогда существует $\lim\limits_{\mathfrak{D}} f = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$ (т.е. $\lim\limits_{\mathfrak{D}} \lim\limits_{k\to\infty} f_k = \lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{\mathfrak{D}} f_k$).*

▼ Используя критерий Маркова–Гордона получаем, что достаточно проверить, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > N,\ \exists D_n \in \mathfrak{D}\ \forall x \in D_n : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В силу равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{R}$, что для любого натурального $n > N$ верно неравенство $\sup\limits_{D} |f_n - f| < \varepsilon$. Взяв $D_n = D$ видим, что в рассматриваемом случае критерий Маркова-Гордона существования и равенства двух повторных пределов $\lim\limits_{\mathfrak{D}} f = \lim\limits_{\mathfrak{D}} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{\mathfrak{D}} f_k$ выполнен. ▲

Частным случаем теоремы 1 является следующая теорема.

**Теорема 2** (о перестановке пределов). *Пусть $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f$, где $E$ — подмножество метрического пространства, $a$ — предельная точка $E$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ существует конечный $\lim\limits_{E\ni x\to a} f_k(x) = b_k$. Тогда существует $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$ (т.е. $\lim\limits_{E\ni x\to a} \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{E\ni x\to a} f_k(x)$).*

**Следствие 1** (о непрерывности). *Если* $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f$*, где* $E$ *— подмножество метрического пространства, и все* $f_k$ *непрерывны в точке* $a \in E$ *по множеству* $E$*, то* $f$ *также непрерывна в точке* $a$ *по множеству* $E$*.*

Это также частный случай теоремы 1. Ее также легко вывести из теоремы 2. Если $a$ — изолированная точка $E$, то любая определенная в $a$ функция непрерывна в $a$ по $E$, а если $a$ — предельная точка $E$, то утверждение следствия сразу следует из теоремы 2.

**Следствие 2** (о непрерывности). *Если* $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f$*, где* $E$ *— подмножество метрического пространства, и все* $f_k$ *непрерывны на* $E$*, то* $f$ *также непрерывна на* $E$*.*

Это утверждение сразу вытекает из предыдущего следствия.

**Следствие 3** (о пространстве $C(K)$). *Обозначим через* $C(K)$ *нормированное пространство непрерывных на компакте* $K$ *функций с нормой* $||f|| = \max\limits_{x\in K}|f(x)|$*. Тогда* $C(K)$ *— полное нормированное пространство, сходимость в котором эквивалентна равномерной сходимости на* $K$*.*

Легко убедиться, что $||f||$ обладает всеми свойствами нормы (соответственно, величина $\rho(f,g) = \max\limits_{K}|f-g|$ является метрикой). А так как $\rho(f,g) = \max\limits_{K}|f-g|$, то $\rho(f_k,f) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ тогда и только тогда, когда $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{K}{\rightrightarrows}} f$.

Переформулируем теперь теоремы 1 и 2 и часть следствий для рядов.

**Теорема 3** (о перестановке суммы и предела). *Пусть* $\mathfrak{D}$ *— база в множестве* $X$*,* $D \in \mathfrak{D}$ *и функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на* $D$ *к* $S(x)$*, для каждого* $k \in \mathbb{N}$ *существует конечный* $\lim\limits_{\mathfrak{D}} u_k = \alpha_k$*. Тогда сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *и его сумма* $S = \lim\limits_{\mathfrak{D}} S(x)$ *(т.е.* $\lim\limits_{\mathfrak{D}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{\mathfrak{D}} u_k(x)$*, к пределу можно переходить почленно).*

**Теорема 4** (о перестановке суммы и предела). *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на* $E$ *к* $S(x)$*, где* $E$ *— подмножество метрического пространства,* $a$ *— предельная точка* $E$ *и для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существует конечный* $\lim\limits_{E\ni x\to a} u_k(x) = \alpha_k$*. Тогда сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *и его сумма* $S = \lim\limits_{E\ni x\to a} S(x)$ *(т.е.* $\lim\limits_{E\ni x\to a} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{E\ni x\to a} u_k(x)$*, к пределу можно переходить почленно).*

**Следствие 1** (о непрерывности). *Если ряд из непрерывных в точке* $a \in E$ *по множеству* $E$ *функций сходится равномерно на* $E$*, то его сумма также непрерывна в точке* $a$ *по множеству* $E$*.*

**Следствие 2** (о непрерывности). *Если ряд из непрерывных на* $E$ *функций сходится равномерно на* $E$*, то его сумма непрерывная на* $E$ *функция.*

Почленное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов

**Теорема 4** (о дифференцировании). *Пусть дана последовательность дифференцируемых функций* $f_k$ *на ограниченном промежутке* $I$*, причем последовательность* *производных $f_k'$ сходится равномерно на $I$, а сама последовательность $f_k$ сходится хотя бы в одной точке $I$. Тогда существует дифференцируемая функция $f$ на $I$ такая, что $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f$ и $f_k' \underset{k\to\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f'$ (т.е. $\frac{d}{dx}\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$).*

▼ Покажем сначала, что последовательность $f_k$ сходится равномерно на $I$ к некоторой функции $f$. Пусть $x_0$ такая точка $I$, что последовательность $f_k(x_0)$ сходится. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m,n > N:\ |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$$
$$\text{и } \exists N'\ \forall m,n > N'\ \forall x\in I:\ |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon.$$

Тогда $\forall n,m > \max\{N,N'\}\ \forall x\in I:\ |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |(f_n(x) - f_n(x_0)) - (f_m(x) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$, где первый член в правой части неравенства по формуле Лагранжа равен $|f_n'(c) - f_m'(c)|\cdot|x - x_0| < \varepsilon|I|$, $c$ лежит между $x$ и $x_0$, $|I|$ — длина $I$, а второй член меньше $\varepsilon$, т.е. $|f_n(x) - f_m(x)| < (|I|+1)\varepsilon = C\varepsilon$, для последовательности $f_k$ выполнено условие Коши равномерной сходимости и, значит, существует такая функция $f$ на $I$, что $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f$.

Теперь покажем, что $f$ дифференцируема на $I$ и что $f_k' \underset{k\to\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f'$. Так как последовательность $f_k'$ сходится равномерно на $I$, то достаточно показать, что в каждой точке $x\in I$ $f_k'(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f'(x)$. Для этого зафиксируем $x\in I$ и рассмотрим последовательность функций $\varphi_k(t) = \frac{f_k(t)-f_k(x)}{t-x}$ на $I\setminus\{x\}$. Покажем, что на этом множестве последовательность $\varphi_k(t)$ сходится равномерно. Так как $f_k'$ сходится равномерно на $I$, то

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n,m > N\ \forall x\in I:\ |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon.$$

Тогда $\forall n,m > N\ \ \forall t\in I\setminus\{x_0\}:\ \ |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| = \left|\frac{(f_n(t)-f_m(t))-(f_n(x)-f_m(x))}{t-x}\right| = |f_n'(c) - f_m'(c)| < \varepsilon$, где по формуле Лагранжа $c$ лежит между $t$ и $x$. Значит, $\varphi_k$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на $I\setminus\{x_0\}$, а значит, сходится равномерно на $I\setminus\{x_0\}$.

По условию, $\forall k\in\mathbb{N}$ существует $\lim\limits_{I\ni t\to x}\varphi_k(t) = f_k'(x)$.

Но тогда по теореме 2 существует $\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{I\ni t\to x}\varphi_k(t) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k'(x) = \lim\limits_{I\ni t\to x}\lim\limits_{k\to\infty}\varphi_k(t) = \lim\limits_{I\ni t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(x)$. Теорема доказана. ▲

**Замечание**. *Если дополнительно предположить непрерывную дифференцируемость каждого члена последовательности в теореме 4 на $I$, то и предельная функция $f$ будет непрерывно дифференцируема на $I$.*

**Следствие**. *Если каждая функция $f_k$ имеет точную первообразную на промежутке $I$ и последовательность $f_k$ равномерно на $I$ сходится к функции $f$, то и $f$ имеет точную первообразную. Более того, если фиксировать точку $x_0\in I$ и рассмотреть такие точные первообразные $F_k$ и $F$ этих функций, которые равны нулю в точке $x_0$, то для любого ограниченного промежутка $J\subset I$ имеем $F_k \underset{k\to\infty}{\overset{J}{\rightrightarrows}} F$.*

Переформулируем доказанную теорему и замечание к ней для рядов.

**Теорема 5** (о дифференцировании). *Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ дифференцируемых* *функций на ограниченном промежутке $I$, причем ряд из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на $I$, а сам ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке $I$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на $I$ равномерно, его сумма $S(x)$ дифференцируема на $I$ и ряд из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на $I$ к $S'(x)$.*

**Замечание**. *Если дополнительно предположить непрерывную дифференцируемость каждого члена ряда на $I$, то и его сумма будет непрерывно дифференцируема на $I$.*

Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов

**Теорема 6** (об интегрировании). *Если $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f$ и все $f_k$ интегрируемы по Риману (на $[a.b]$, то и $f$ интегрируема по Риману (на $[a.b]$ и $\int\limits_a^b f\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_a^b f_k\,dx$ (т.е. $\int\limits_a^b \lim\limits_{k\to\infty} f_k\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_a^b f_k\,dx$).*

▼ Если $\sup\limits_{[a,b]}(f_k(x) - f(x)) < \varepsilon$, то для любого отмеченного разбиения $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ верна оценка

$$|\mathfrak{S}(f_k, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f, \mathbb{T})| = |\mathfrak{S}(f - f_k, \mathbb{T})| = \left|\sum_i (f_k(\xi_i) - f(\xi_i)|\Delta_i|\right| < \varepsilon(b-a).$$

Поэтому если $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f$, то $\mathfrak{S}(f_k, \mathbb{T}) \underset{k\to\infty}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} \mathfrak{S}(f, \mathbb{T})$ на множестве $Y$ всех отмеченных разбиений $\mathbb{T}$ отрезка $[a,b]$. Если $\mathfrak{D}$ — база Римана в множестве всех отмеченных разбиений, то по условию $\forall k \in \mathbb{N}\ \lim\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{S}(f_k, \mathbb{T}) = \int\limits_a^b f_k\,dx$ — интегралу Римана. Тогда по теореме 1 существует

$$\lim_{\mathfrak{D}} \mathfrak{S}(f, \mathbb{T}) = \lim_{\mathfrak{D}} \lim_{k\to\infty} \mathfrak{S}(f_k, \mathbb{T}) = \lim_{k\to\infty} \lim_{\mathfrak{D}} \mathfrak{S}(f_k, \mathbb{T}) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_a^b f_k\,dx,$$

т.е. $f$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ по Риману и

$$\int\limits_a^b f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_a^b f_k\,dx. \blacktriangle$$

Переформулируем доказанную теорему для рядов.

**Теорема 7** (об интегрировании). *Если функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a,b]$ и $S(x)$ — его сумма, все члены ряда $u_k$ интегрируемы по Риману* *(по на $[a.b]$, то и $S(x)$ интегрируема по Риману (по на $[a.b]$ и $\int\limits_a^b S\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_k\,dx$ (т.е. $\int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_k\,dx$).*

## **Лекция 10** (02.10.20)
## **Критерий компактности Хаусдорфа**

### Компакты

**Определение 1**. Вспомним, что подмножество $K$ метрического пространства называется компактом (или компактным множеством), если из любого покрытия $K$ открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие (конечную систему множеств, также покрывающую $K$). Подмножество $P$ метрического пространства называется **предкомпактным**, если существует компакт $K \supset P$.

Вспомним, что замыканием подмножества $A$ метрического пространства называется наименьшее содержащее $A$ замкнутое множество $\overline{A} = \bigcap\limits_{F\supset A} F$, где $F$ — замкнутое множество.

**Теорема 1**. *Множество предкомпактно тогда и только тогда, когда его замыкание — компакт.*

▼ Достаточность очевидна из определения. Покажем необходимость. Если $P$ — предкомпактное множество, то существует компакт $K \supset P$. Так как $K$ замкнутое множество, то $K \supset \overline{P}$ и, значит, $\overline{P}$ компакт (как замкнутое подмножество компакта). ▲

### Критерий компактности Хаусдорфа

**Определение 2**. В метрическом пространстве множество $A$ является $\varepsilon$**-сетью** для множества $B$, где $\varepsilon > 0$, если $\forall b \in B\ \ \exists a \in A$: $\rho(a,b) \leqslant \varepsilon$.

**Определение 3**. Множество в метрическом пространстве называется **вполне ограниченным**, если оно для любого $\varepsilon > 0$ имеет конечную $\varepsilon$-сеть.

**Теорема 2**. *Если для некоторого $\varepsilon > 0$ множество имеет конечную $\varepsilon$-сеть, то оно ограничено.*

▼ Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ — конечная $\varepsilon$-сеть множества $B$. Положим $r = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\rho(x_1,x_k)+\varepsilon$, тогда $\overline{B}_r(x_1) \supset B$. ▲

**Следствие**. *Вполне ограниченное множество ограничено.*

**Лемма 1**. *Если конечное множество $A$ является $\varepsilon$-сетью для множества $P$, $\varepsilon > 0$, то $A$ является $\varepsilon$-сетью и для замыкания $\overline{P}$.*

▼ Пусть $y \in \overline{P}$. Если $\min\limits_{x\in A}\rho(x,y) = \alpha > \varepsilon$, то открытый шар $B_{\alpha-\varepsilon}(y)$ не пересекается с $P$, $M \setminus B_{\alpha-\varepsilon}(y) \supset P$, а значит, $M \setminus B_{\alpha-\varepsilon}(y) \supset \overline{P}$, что противоречит тому, что $y \in \overline{P}$. Значит, $\min\limits_{x\in A}\rho(x,y) \leqslant \varepsilon$, $A$ — $\varepsilon$-сеть для $\overline{P}$. ▲

**Лемма 2**. *Если конечное множество $\{x_k\}_{k=1}^n$ является $\varepsilon$-сетью для множества $P$, $\varepsilon > 0$, то существует конечное множество $\{y_k\}_{k=1}^m \subset P$, $m \leqslant n$, которое является $2\varepsilon$-сетью $P$.*

▼ Для тех $k$, для которых $\overline{B}_\varepsilon(x_k)\cap P \neq \varnothing$, выберем по точке $y \in \overline{B}_\varepsilon(x_k)\cap P$. Легко видеть, что выбранные точки составляют искомое множество $\{y_k\}_{k=1}^m \subset P$, $m \leqslant n$, которое является $2\varepsilon$-сетью $P$. ▲

**Теорема 3** (критерий компактности Хаусдорфа). *В полном метрическом пространстве множество предкомпактно тогда и только тогда, когда вполне ограничено, а компактно тогда и только тогда, когда вполне ограничено и замкнуто.*

▼ Сначала покажем, что второе утверждение следует из первого. Действительно, если $P$ — компакт, то это замкнутое множество, которое по первому утверждению вполне ограничено. Если множество $P$ замкнуто и вполне ограничено, то по первому утверждению $P$ предкомпактно, а значит, его замыкание $\overline{P} = P$ компактно.

Итак, доказываем первое утверждение. Необходимость. Пусть $P$ — предкомпакт, тогда $\overline{P}$ — компакт. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда $\{B_\varepsilon(x)\}_{x\in\overline{P}}$ — открытое покрытие $\overline{P}$, из которого в силу компактности можно выбрать конечное подпокрытие $\{B_\varepsilon(x_k)\}_{k=1}^n$. Тогда $\{x_k\}_{k=1}^n$ — $\varepsilon$-сеть для множества $\overline{P}$ и для $P$.

Достаточность.

Предположим, что $P$ обладает конечной $\varepsilon$-сетью для всех $\varepsilon > 0$, но не предкомпакт, т.е. $\overline{P}$ не является компактом. Тогда существует покрывающая $\overline{P}$ система открытых множеств $\{G_\lambda\}$, из которой нельзя выделить конечного подпокрытия. Покажем, что это приводит к противоречию.

Будем $\overline{B}_r(x)$ обозначать замкнутый шар с центром в точке $x$ радиуса $r$, т.е. множество $\{t \in M : \rho(t,x) \leqslant r\}$ (метрическом пространстве $M$). Пусть $\{x_k^1\}$ — конечная $2^{-1}$-сеть для $\overline{P}$. Из множеств $\overline{P} \cap \overline{B}_{2^{-1}}(x_k^1)$, покрытых системой $\{G_\lambda\}$, хотя бы одно не имеет конечного подпокрытия (иначе и $\overline{P}$ имело бы конечное подпокрытие). Обозначим его $P_1 = \overline{P} \cap \overline{B}_{2^{-1}}(x_{k_1}^1)$.

Пусть $\{x_k^2\} \subset P_1$ — конечная $2^{-2}$-сеть для $P_1$ (которая существует в силу существования конечной $2^{-2}$-сети для $\overline{P}$). Из множеств $P_1 \cap \overline{B}_{2^{-2}}(x_k^2)$, покрытых системой $\{G_\lambda\}$, хотя бы одно не имеет конечного подпокрытия (иначе и $P_1$ имело бы конечное подпокрытие). Обозначим его $P_2 = P_1 \cap \overline{B}_{2^{-2}}(x_{k_2}^2)$. Отметим, что $\rho(x_{k_1}^1, x_{k_2}^2) \leqslant 2^{-1}$.

Пусть $\{x_k^3\} \subset P_2$ — конечня $2^{-3}$-сеть для $P_2$ (которая существует в силу существования конечной $2^{-3}$-сети для $\overline{P}$). Из множеств $P_2 \cap \overline{B}_{2^{-3}}(x_k^3)$, покрытых системой $\{G_\lambda\}$, хотя бы одно не имеет конечного подпокрытия (иначе и $P_3$ имело бы конечное подпокрытие). Обозначим его $P_3 = P_1 \cap \overline{B}_{2^{-3}}(x_{k_3}^3)$. Отметим, что $\rho(x_{k_2}^2, x_{k_3}^3) \leqslant 2^{-2}$.

Пусть $\{x_k^4\} \subset P_3$ — конечная $2^{-4}$-сеть для $P_3 \ldots$. И т.д.

Последовательность точек $x_{k_j}^j$ — последовательность Коши (т.к. $\rho(x_{k_j}^j, x_{k_{j+1}}^{j+1}) \leqslant 2^{-j}$). Пусть $x$ — ее предел, который существует в силу полноты пространства. В любую ее $\varepsilon$-окрестность $B_\varepsilon(x)$ множества $P_k$ попадают начиная с некоторого номера. Значит, точка $x$ — точка соприкосновения $\overline{P}$ и, следовательно, $x \in \overline{P}$. Но тогда существует $G_\lambda \ni x$ и существует $B_\varepsilon(x) \subset G_\lambda$, в которую множества $P_k$ попадают начиная с некоторого номера, что противоречит тому, что эти множества не имеют конечного подпокрытия множествами системы $\{G_\lambda\}$. Полученное противоречие доказывает, что если $P$ обладает конечной $\varepsilon$-сетью для всех $\varepsilon > 0$, то $P$ предкомпакт. Теорема доказана. ▲

## Критерий предкомпактности Арцеля–Асколи

Напомним, что семейство функций $\{f_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ **равномерно ограничено** (**ограничено в совокупности**) на множестве $E$, если все функции семейства определены на $E$ и $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda,\, x\in E} |f_\lambda(x)| < +\infty$ (т.е. $\exists C \geqslant 0 \ \ \forall\lambda \in \Lambda \ \ \forall x \in E$: $|f_\lambda(x)| \leqslant C$).

**Определение 4**. Семейство функций $\{f_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ **равностепенно непрерывно** на подмножестве $E$ метрического пространства, если все функции семейства определены на $E$ и

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,x'\in E\ \forall\lambda\in\Lambda:\quad \rho(x,x')<\delta\implies|f_\lambda(x)-f_\lambda(x')|<\varepsilon$$

или, эквивалентно

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in E\ \forall x'\in B_\delta(x)\cap E\ \forall\lambda\in\Lambda:\quad |f_\lambda(x)-f_\lambda(x')|<\varepsilon.$$

**Замечание 1**. Легко видеть, что для семейства из одной функции данное определение совпадает с определением равномерной непрерывности на $E$, а в случае более многочисленного семейства из данного определения следует равномерная непрерывность любой функции семейства на $E$.

**Замечание 2**. В приведенных определениях функции комплекснозначны. Но определения легко модифицировать для функций со значениями в некотором метрическом пространстве.

**Теорема 4** (критерий предкомпактности Арцеля–Асколи). *Пусть $C(K)$ — нормированное пространство непрерывных комплекснозначных функций на компакте $K$ (в некотором метрическом пространстве) с нормой $\|f\|=\max\limits_K|f(x)|$. Семейство функций $\Phi\subset C(K)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

▼ Необходимость. Пусть семейство $\Phi$ предкомпактно. Тогда для любого $\varepsilon>0$ оно имеет конечную $\varepsilon$-сеть $\{f_k\}_{k=1}^n$. Значит семейство $\Phi$ ограничено в $C(K)$, т.е. существует шар $B_r(g)\supset\Phi$. Но тогда для любой $f\in\Phi$ имеем $\|f\|=\max\limits_K|f(x)|\leqslant r+\|g\|$ и, значит, $\Phi$ равномерно ограничено. Каждая из функций $f_k$ $\varepsilon$-сети непрерывна, а значит, и равномерно непрерывна на компакте $K$. Поэтому для того же $\varepsilon>0$ найдутся такие $\delta_k>0$, $1\leqslant k\leqslant n$, что при $\rho(x,x')<\delta_k$ верна оценка $|f_k(x)-f_k(x')|<\varepsilon$. Но тогда, положив $\delta=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\delta_k$, получаем, что $\forall x,x'\in K\ \ \forall f\in\Phi$: $\rho(x,x')<\delta$ $\implies\ |f(x)-f(x')|\leqslant|f(x)-f_k(x)|+|f_k(x)-f_k(x')|+|f_k(x')-f(x')|<3\varepsilon$, где $f_k$ такая функция из $\varepsilon$-сети, что $\rho(f,f_k)=\max\limits_K|f(x)-f_k(x)|\leqslant\varepsilon$. Значит, семейство $\Phi$ равностепенно непрерывно.

Достаточность. Пусть семейство $\Phi\subset C(K)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Возьмем любое $\varepsilon>0$ и будем строить конечную $\varepsilon$-сеть для $\Phi$. Выберем $\delta>0$ так, чтобы $\forall x,x'\in K\ \ \forall f\in\Phi$: $\rho(x,x')<\delta\implies|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. Для компакта $K$ по критерию Хаусдорфа существует конечная $\delta$-сеть $A=\{x_1,\dots,x_n\}\subset K$. Рассмотрим отображение $\Phi$ в $\mathbb{C}^n$ $\ f\to(f(x_1),\dots,f(x_n))$. Метрическое пространство $\mathbb{C}$ то же самое, что $\mathbb{R}^2$, а метрическое пространство $\mathbb{C}^n$ то же самое, что $\mathbb{R}^{2n}$. Рассматриваемое отображение непрерывно покоординатно, а значит, просто непрерывно. В силу равномерной ограниченности $\Phi$ его образ $\tilde\Phi$ ограниченное, а значит, предкомпактное множество в $\mathbb{C}^n$, оно имеет конечную $\varepsilon$-сеть, состоящую из образов функций $f_m\in\Phi$, $m=1,\dots,M$. Покажем, что функции $f_m$, $m=1,\dots,M$, являются $3\varepsilon$-сетью для $\Phi$. Пусть $f\in\Phi$. Тогда $(f(x_1),\dots,f(x_n))\in\tilde\Phi$ и, значит, существует $f_m$, $1\leqslant m\leqslant M$, что $\rho\big((f(x_1),\dots,f(x_n)),(f_m(x_1),\dots,f_m(x_n))\big)=\sqrt{\sum\limits_{j=1}^n|f(x_j)-f_m(x_j)|^2}<\varepsilon$, а значит, $|f(x_j)-f_m(x_j)|<\varepsilon$ для $j=1,\dots,n$. Пусть $x$ — любая точка $K$. Так как $A=\{x_1,\dots,x_n\}\subset K$ — $\delta$-сеть в $K$, то найдется в ней точка $x_j$, $1\leqslant j\leqslant n$, что

$\rho(x, x_j) < \delta$. Тогда в силу равностепенной непрерывности и выбора $\delta > 0$ выполняются неравенства $|f(x) - f(x_j)| < \varepsilon$ и $|f_m(x) - f_m(x_j)| < \varepsilon$. А тогда имеем оценку $|f(x) - f_m(x)| \leqslant |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_m(x)| < 3\varepsilon$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ в $\Phi$ существует конечная $3\varepsilon$-сеть. Значит, по критерию Хаусдорфа, $\Phi$ — предкомпакт. ▼

**Следствие** (Арцеля–Асколи). *Из любого равномерно ограниченного и равностепенно непрерывного семейства функций на компакте $K$ можно выделить равномерно сходящуюся на $K$ последовательность.*

**Следствие** (Арцеля–Асколи). *Из любой равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной последовательности функций на компакте $K$ можно выделить равномерно сходящуюся на $K$ подпоследовательность.*

## Лекция 11 (07.10.20)
## Степенные ряды и их свойства

### Степенные ряды

**Определение 1**. **Степенным рядом** называют функциональный ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, где коэффициенты $c_k$ и $z_0$ — действительные или комплексные числа, а $z$ — действительная или комплексная переменная.

Будем в дальнейшем считать, если не оговорено иное, что $c_k$, $z_0$ и $z$ из $\mathbb{C}$ — множества комплексных чисел.

Обозначая $z - z_0$ за $w$ можно всегда вместо ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ рассматривать ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k w^k$, поэтому в дальнейшем будем изучать именно такие ряды.

**Теорема 1** (Коши–Адамара). *Для любого степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ существует $R$, $0 \leqslant R \leqslant +\infty$, такое что ряд сходится и притом абсолютно в открытом круге комплексной плоскости $\mathbb{C}$ $B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R\}$ и расходится во внешности этого круга $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > R\}$. Величина*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

*(считаем $\frac{1}{+\infty} = 0$ и $\frac{1}{0} = +\infty$).*

▼ По признаку Коши ряд абсолютно сходится в точке $z$, если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} < 1$ и расходится, если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} > 1$, что и доказывает теорему. ▲

**Определение 2**. Величину $R$ называют **радиусом сходимости**, круг $B_R(0)$ — **кругом сходимости**, а его пересечение с действительной прямой — **интервалом сходимости**.

**Теорема 2**. *Радиус сходимости $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$, если этот предел существует.*

▼ По признаку Д'Аламбера ряд сходится, если $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1} z^{k+1}}{c_k z^k}\right| = |z| \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| < 1$, и расходится, если приведенный предел больше 1. Значит, $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$. ▲

**Теорема 3**. *Степенной ряд абсолютно и равномерно сходится на любом замкнутом круге $B_q(0) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant q\}$ с $q < R$ — радиуса сходимости.*

▼ Из теоремы 2 следует, что абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{k=0} c_k q^k$, то есть сходится ряд $\sum\limits_{k=0} |c_k| q^k$, который почленно мажорирует степенной ряд на круге $B_q(0)$. Утверждение теоремы следует из признака Вейерштрасса. ▲

**Следствие**. *Степенной ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из круга сходимости.*

Действительно, если компакт $K \subset B_R(0)$, то $K \subset \bigcup\limits_{q<R} B_q(0)$ и, значит, существует $B_q(0) \supset K$ с $q < R$.

Из теоремы 3 также сразу следуют две следующие теоремы.

**Теорема 4**. *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией внутри его круга сходимости.*

**Теорема 5** (Абеля). *Если степенной ряд сходится в точке $w \in \mathbb{C}$, то он сходится абсолютно в открытом круге $B_{|w|}(0) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < |w|\}$ и равномерно на любом круге $\overline{B}_q(0) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leqslant q\}$ с $q < |w|$.*

**Теорема 6** (о дифференцировании). *Радиусы сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ и ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$, полученного из него почленным дифференцированием, совпадают и второй ряд является производной (в комплексном смысле) первого ряда в круге сходимости.*

▼ Если $R$ — радиус сходимости первого ряда, $R = \left(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}\right)^{-1}$, то такой же радиус сходимости и у ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k c_k z^k$, поскольку $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k|c_k|} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}$, а значит, и у ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1}$.

Используя формулу $a^n - b^n = (a-b)\sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ получаем, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k (z+\Delta z)^k - c_k z^k}{\Delta z} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z+\Delta z)^k - \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k}{\Delta z} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-1} \sum\limits_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right)^j$. Последний ряд сходится равномерно при фиксированном $z$ по $\Delta z \in \{\Delta z : \ 0 < |\Delta z| < \varepsilon\}$, где $|z| + \varepsilon < R$, по признаку Вейерштрасса, т.к. почленно мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot k(|z| + \varepsilon)^{k-1}$ (ведь ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k w^{k-1}$ абсолютно сходится при $|w| < R$). Значит,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right)^j = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-1} \lim_{\Delta z \to 0} \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right)^j = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}.$$

Теорема доказана. ▲

Выведем из теоремы о дифференцировании степенного ряда несколько следствий.

**Следствие 1**. *Сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема в комплексном смысле (когда приращение аргумента $\Delta z$ комплексное) в круге сходимости.*

**Следствие 2**. *Любой степенной ряд имеет в круге сходимости комплексную первообразную.*

Действительно, в круге сходимости степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ является производной ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$.

**Теорема 7** (об интегрировании). *Пусть отрезок $[a,b]$ действительной оси $\mathbb{R}$ принадлежит кругу сходимости $B_R(z_0)$ степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$. Тогда сумма ряда $S(z)$ интегрируема на $[a,b]$ по Риману и $\int\limits_a^b S(x)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b c_k(x-z_0)^k dx$.*

▼ Ряд равномерно сходится на отрезке внутри круга сходимости, поэтому данная теорема следует из теоремы 7 лекции 9 об интегрировании равномерно сходящихся рядов функций. ▲

**Следствие**. *На любом отрезке из интервала сходимости $(-R,R)$ степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ интегрирование ряда сводится к его почленному интегрированию.*

**Теорема 8**. *Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ имеет непустой круг сходимости (радиус сходимости $R > 0$), то этот ряд является рядом Тейлора своей суммы, т.е. если $S(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, то $c_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.*

▼ Теорема 8 сразу следует из теоремы 6, т.к. $S^{(n)}(z) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} c_k z^{k-n}$ и, значит, $S^n(0) = n! \cdot c_k$. ▲

**Теорема 9** (единственности). *Если суммы степенных рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ совпадают в точках $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $z_n \neq 0$ для $n \in \mathbb{N}$, то эти ряды совпадают тождественно, т.е. $a_k = b_k$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$.*

▼ Так как $a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z_n^k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z_n^k = b_0$, то $a_0 = b_0$. Если $a_k = b_k$ для всех $k < K$, то в точках $z_n$ совпадают суммы степенных рядов $\sum\limits_{k=K}^{\infty} a_k z^k$ и $\sum\limits_{k=K}^{\infty} b_k z^k$, а значит, совпадают и суммы рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+K} z^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_{k+K} z^k$, а тогда по уже доказанному $a_K = b_K$. Согласно принципу математической индукции теорема доказана. ▲

**Теорема 10** (Абеля). *Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в точке $z = z_0$, то он сходится равномерно на отрезке $[0, z_0] = \{z \in \mathbb{C} : \ z = \alpha z_0, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$ и его сумма непрерывна на нем.*

▼ По признаку 4 Абеля из лекции 8 ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k \cdot \alpha^k$ равномерно суммируется по $\alpha$ на $[0,1]$ и, значит, его сумма непрерывна на $[0,1]$. ▲

**Следствие**. *Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в точке $R$, где $R$ — радиус сходимости, то его сумма непрерывна в ней слева, а если сходится в точке $-R$, то его сумма непрерывна в ней справа.*

## Применения теории степенных рядов

### Вычисление рядов. Вычисление числа $\pi$

$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots$ при $|t| < 1$, откуда

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \text{ при } -1 < x < 1.$$

При $x = 1$ ряд сходится по признаку Лейбница, тогда по последней теореме Абеля

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Ряд $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots = \frac{\pi}{4}$ — плохой ряд для вычислений, т.к. сходится медленно. Ряд $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^7 + \cdots = \frac{\sqrt{3}}{3}\big(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 9} - \frac{1}{7\cdot 27} + \cdots = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ сходится гораздо быстрее.

Но можно найти еще более быстро сходящиеся ряды. Пусть $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, тогда $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$, откуда $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{1}{7} - \frac{1}{3\cdot 7^3} + \frac{1}{5\cdot 7^5} - \cdots + 2\big(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^2} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \ldots\big)$, эти ряды сходятся еще лучше.

### Аналитические функции комплексного переменного

По теореме единственности, функции $e^x$, $\cos x$ и $\sin x$ можно продолжить с $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$ так, чтобы они разлагались в степенной ряд, единственным образом:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \quad \operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Из сопоставления рядов легко получить формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i\sin z$, а также формулы $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos iz = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z$, $\sin iz = \frac{-e^z+e^{-z}}{2i} = i\operatorname{sh} z$. Переходя кдействительному переменному $x$, получаем $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

Для функции $e^z$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ легко проверяется основное свойство экспоненты $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, ведь

$$e^{z+w} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j z^j w^{k-j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = e^z \cdot e^w$$

(в конце используется теорема Мертенса о произведении рядов). Из этого свойства и равенств $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ легко выводятся основные свойства и формулы тригонометрических функций, верные уже и для комплексного аргумента (а также их аналоги для гиперболических функций).

## Добавления.

а) $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \ldots$ при $|t| < 1$, откуда

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t}dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots \text{ при } -1 < x < 1.$$

При $x = 1$ ряд сходится по признаку Лейбница, тогда по последней теореме Абеля

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots.$$

б) $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \ldots$ при всех $t \in \mathbb{R}$, откуда

$$\int\limits_0^x e^{-t^2}dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \ldots \text{ при всех } x \in \mathbb{R}.$$

в) $\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \ldots$ при всех $t \in \mathbb{R}$, откуда

$$\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots \text{ при всех } x \in \mathbb{R}.$$

## Лекция 12 (09.10.20)
## Функции, зависящие от параметра

Вместо общей ситуации функции $f(x,y)$ на множестве $X \times Y$ и базы $\mathfrak{B}$ в множестве $X$ будем рассматривать более частный случай, когда $X$ — метрическое пространство, $x_0$ — предельная точка $Y$, $\mathfrak{B}$ — "база окрестностей точки $x_0$", т.е. $\lim\limits_{\mathfrak{B}} \varphi(x) = \lim\limits_{X \ni x \to x_0} \varphi(x)$ для функции $\varphi$, определенной на $X$.

**Определение 1**. Пусть функция $f(x,y)$, отображает $X \times Y$ в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$), где $X$ — подмножество некоторого метрического пространства, $x_0$ — предельная точка $X$.

Если при каждом $y \in Y$ существует конечный предел $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x,y) = g(y)$, то говорят, что функция $f(x,y)$ **поточечно стремится** к функции $g(y)$ на множестве $Y$ при $x$ стремящемся к $x_0$ по множеству $X$.

**Определение 2**. Функция $f(x,y)$, отображающая $X \times Y$ в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$), где $X$ — подмножество некоторого метрического пространства, $x_0$ — предельная точка $X$, стремится **равномерно относительно** $y$ **на** $Y$ **при** $X \ni x \to x_0$ к функции $g(y)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists B'_\delta(x_0) \ \forall x \in B'_\delta(x_0) \cap X \ \forall y \in Y : \quad |f(x,y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Пишут: $f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$.

**Определение 3**. Функция $f(x,y)$, отображающая $X \times Y$ в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$), где $X$ — подмножество некоторого метрического пространства, $x_0$ — предельная точка $X$, сходится **равномерно относительно** $y$ **на** $Y$ **при** $X \ni x \to x_0$, если существует такая функция $g(y)$ на $Y$, что $f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$.

**Замечание** (супремум-критерий). Семейство функций $f(x,y)$ сходится равномерно на множестве $Y$ к функции $g(y)$ при $x$ стремящемся к $x_0$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_Y |f(x,y) - g(y)| \xrightarrow[X \ni x \to x_0]{} 0$$

Очевидно, что равномерная сходимость на множестве $Y$ влечет поточечную сходимость на множестве $Y$.

**Замечание**. Если рассмотреть взаимно однозначное отображение расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$ на отрезок $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, задаваемое формулой $x \longrightarrow \operatorname{arc\,tg} x$, или на отрезок $[-1,1]$, задаваемое формулой $x \longrightarrow \frac{x}{1+|x|}$, и ввести метрику на $\overline{\mathbb{R}}$ как $\rho(x,y) = |\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y|$ или как $\rho(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$, $X = \mathbb{N}$, $x_0 = +\infty$, то $f(x,y)$ — функциональная последовательность на множестве $Y$, а $g(y)$ — ее предел (поточечный или равномерный, соответственно). Это показывает, что функциональные последовательности и их пределы — частный случай рассматриваемых понятий.

**Теорема 1**. *Равномерная сходимость* $f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\forall x_n \in X \setminus \{x_0\}$, $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to x_0$: $f(x_n, y) \underset{n \to \infty}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$.

▼ Необходимость. Пусть $f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$ и последовательность $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B'_\delta(x_0) \quad \forall x \in B'_\delta(x_0) \cap X \quad \forall y \in Y$: $|f(x,y) - g(y)| < \varepsilon$. Поскольку $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, то $\exists N \quad \forall n > N$: $x_n \in B'_\delta(x_0) \cap X$ и, значит, $\forall n > N$ $\forall y \in Y$: $|f(x_n, y) - g(y)| < \varepsilon$, т.е. $f(x_n, y) \underset{n \to \infty}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$.

Достаточность. Предположим, что неверно утверждение $f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall B'_\delta(x_0) \quad \exists x \in B'_\delta(x_0) \cap X \quad \exists y \in Y$: $|f(x,y) - g(y)| \geqslant \varepsilon$. Возьмем последовательность $\delta_n \to 0$ (например, $\delta_n = \frac{1}{n}$) и найдем для каждого $n \in \mathbb{N}$ такие $x_n \in B'_{\delta_n}(x_0) \cap X$ и $y_n \in Y$, что $|f(x_n, y_n) - g(y_n)| \geqslant \varepsilon$. Тогда будем иметь последовательность $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, а $|f(x_n, y_n) - g(y_n)| \geqslant \varepsilon$, значит, неверно утверждение, что $f(x_n, y) \underset{n \to \infty}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$. Теорема доказана. ▲

**Определение 4**. Функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости по $x$ на множестве $Y$ при $X \ni x \to x_0$, если она отображает $X \times Y$ в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$), $X$ — подмножество некоторого метрического пространства, $x_0$ — предельная точка $X$ и

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists B'_\delta(x_0) \, \forall x, x' \in B'_\delta(x_0) \cap X \, \forall y \in Y: \quad |f(x,y) - f(x',y)| < \varepsilon.$$

**Теорема 2** (критерий Коши равномерной сходимости). *Функция $f(x,y)$, отображающая $X \times Y$ в $\mathbb{R}$ (или в $\mathbb{C}$), где $X$ — подмножество некоторого метрического пространства, $x_0$ — предельная точка $X$, сходится равномерно относительно $x$ на $Y$ при $X \ni x \to x_0$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на множестве $Y$ при $X \ni x \to x_0$.*

▼ Необходимость. Если $f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B'_\delta(x_0) \quad \forall x \in B'_\delta(x_0) \cap X$ $\forall y \in Y$: $|f(x,y) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда $\forall x, x' \in B'_\delta(x_0) \cap X \quad \forall y \in Y$: $|f(x,y) - f(x',y)| \leqslant$

$|f(x,y)-g(y)|+|g(y)-f(x',y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, значит, $f(x,y)$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на множестве $Y$ при $X\ni x\to x_0$.

Достаточность. Если функция $f(x,y)$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости по $x$ на множестве $Y$ при $X\ni x\to x_0$, то в каждой точке $y\in Y$ для $f(x,y)$ выполняется условие Коши сходимости при $X\ni x\to x_0$ и, значит, для каждого $y\in Y$ существует предел $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x,y)$, обозначим его $g(y)$. По условию Коши равномерной сходимости $\forall\varepsilon>0\quad\exists B'_\delta(x_0)\quad\forall x,x'\in B'_\delta(x_0)\cap X\quad\forall y\in Y$: $|f(x,y)-f(x',y)|<\varepsilon$. Перейдем в этом неравенстве к пределу при $X\ni x'\to x_0$ и получим, что $\forall x\in B'_\delta(x_0)\cap X\quad\forall y\in Y$: $|f(x,y)-g(y)|\leqslant\varepsilon$, т.е. $f(x,y)\underset{X\ni x\to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}}g(y)$. Теорема доказана. ▲

Свойства равномерной сходимости

1. Если $f(x,y)\underset{X\ni x\to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}}g(y)$, то для любого $Y'\subset Y\quad f(x,y)\underset{X\ni x\to x_0}{\overset{Y'}{\rightrightarrows}}g(y)$.

2. Если $f(x,y)\underset{X\ni x\to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}}g(y)$, $\varphi(y)$ — ограниченная на множестве $Y$ функция, то $\varphi(y)f(x,y)\underset{X\ni x\to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}}\varphi(y)g(y)$.

3. Если $f_1(x,y)\underset{X\ni x\to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}}g_1(y)$, $f_2(x,y)\underset{X\ni x\to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}}g_2(y)$, то $f_1(x,y)\pm f_2(x,y)\underset{X\ni x\to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g_1(y)\pm g_2(y)$.

Верность свойства 1 видна непосредственно из определения.

Верность свойства 2 следует из того, что если $|f(x,y)-g(y)|<\varepsilon$ на $Y$, то $|\varphi(y)f(x,y)-\varphi(y)g(y)|<\sup\limits_Y|\varphi(y)|\cdot\varepsilon$ на $Y$.

Верность свойства 3 следует из того, что если $|f_1(x,y)-g_1(y)|<\varepsilon$ на $Y$, $|f_2(x,y)-g_2(y)|<\varepsilon$ на $Y$, то $|(f_1(x,y)\pm f_2(x,y))-(g_1(y)\pm g_2(y))|<2\varepsilon$ на $Y$.

**Теорема 3** (об изменении порядка пределов). *Пусть* $f(x,y)\underset{X\ni x\to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}}g(y)$, $\mathfrak{D}$ — *база в множестве* $Y$ *и для любого* $x\in X$ *существует* $\lim\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)=b(x)$. *Тогда существует* $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} b(x)=b$ *и* $b=\lim\limits_{\mathfrak{D}} g(y)$ *(т.е.* $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\lim\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)=\lim\limits_{\mathfrak{D}}\lim\limits_{X\ni x\to x_0} f(x,y)$*).*

▼ Возьмем любую последовательность $x_n\in X\setminus\{x_0\}$, $x_n\to x_0$. Тогда по теореме 1 $f(x_n,y)\underset{n\to\infty}{\overset{Y}{\rightrightarrows}}g(y)$ и по условию теоремы для любого $n\in\mathbb{N}$ существует $\lim\limits_{\mathfrak{D}} f(x_n,y)=b(x_n)$. Отсюда по теореме об изменении порядка пределов для равномерно сходящихся последовательностей существует $\lim\limits_{n\to\infty} b(x_n)=b$ и $b=\lim\limits_{\mathfrak{D}} g(y)$. Так как это верно для любой последовательности $x_n\in X\setminus\{x_0\}$, $x_n\to x_0$, то по определению предела по Гейне $\lim\limits_{X\ni x\to x_0} b(x)=b=\lim\limits_{\mathfrak{D}} g(y)$. Теорема доказана. ▲

**Замечание**. Разумеется, вместо приведенного доказательства можно было проверить выполнение критерия Маркова-Гордона перестановки двух предельных переходов.

**Теорема 4** (об изменении порядка пределов).*Пусть* $f(x,y)\underset{X\ni x\to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}}g(y)$, *где* $Y$ — *подмножество некоторого метрического пространства,* $y_0$ — *предельная точка* $Y$ *и* *для любого $x \in X$ существует $\lim\limits_{Y \ni y \to y_0} f(x,y) = b(x)$. Тогда существует $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} b(x) = b$ и $b = \lim\limits_{Y \ni y \to y_0} g(y)$ (т.е. $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} \lim\limits_{Y \ni x \to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{Y \ni y \to y_0} \lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x,y)$).*

▼ Следует из предыдущей теоремы. ▲

**Следствие 1**. *Если $f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$, $Y$ — подмножество некоторого метрического пространства, и $f(x,y)$ для каждого $x \in X$ непрерывна в точке $y_0 \in Y$ по множеству $Y$, то $g(y)$ также непрерывна в точке $y_0 \in Y$ по множеству $Y$.*

**Следствие 2**. *Если $f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$, $Y$ — подмножество некоторого метрического пространства, и $f(x,y)$ для каждого $x \in X$ непрерывна на множестве $Y$, то $g(y)$ также непрерывна на множестве $Y$.*

Дифференцирование и интегрирование функций, зависящих от параметра.

**Теорема 5** (о дифференцировании). *Пусть $f(x,y)$ определена на $X \times I$, где $I$ — конечный промежуток, и в каждой точке $(x,y) \in X \times I$ существует частная производная $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$, причем $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ сходятся равномерно на $Y$ при $X \ni x \to x_0$ — предельной точке $X$, а $f(x,y)$ сходятся при $X \ni x \to x_0$ хотя бы в одной точке промежутка $I$. Тогда существует такая дифференцируемая на $I$ функция $g(y)$, что $f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{I}{\rightrightarrows}} g(y)$, и $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{I}{\rightrightarrows}} g'(y)$ $\big($т.е. $\lim\limits_{X \ni x \to x_0} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x,y)\big)$.*

▼ Возьмем любую последовательность $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$. Тогда по теореме 1 $\frac{\partial}{\partial y} f(x_n,y)$ сходятся равномерно на $Y$ при $n \to \infty$, а $f(x_n,y)$ сходятся при $n \to \infty$ хотя бы в одной точке $Y$. Тогда по теореме 9,4 о почленном дифференцировании функциональных последовательностей на $I$ существует такая дифференцируемая функция $g(y)$, что $f(x_n,y) \underset{n \to \infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} g(y)$ и $\frac{\partial}{\partial y} f(x_n,y) \underset{n \to \infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} g'(y)$. Функция $g(y)$ для любой последовательности $x_n$ одна и та же —ведь если последовательности $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$, соответствует функция $g_1(y)$, а последовательности $x'_n \in X \setminus \{x_0\}$, $x'_n \to x_0$, соответствует функция $g_2(y)$, то последовательности $x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, x'_3, \dots$ из $X \setminus \{x_0\}$, стремящейся к $x_0$, должна соответствовать функция, совпадающая и с $g_1(y)$ и с $g_2(y)$. Итак, по теореме 1 прошлой лекции имеем $f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{I}{\rightrightarrows}} g(y)$ и $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{I}{\rightrightarrows}} g'(y)$. Теорема доказана. ▲

**Теорема 6** (об интегрировании). *Если функция $f(x,y)$ определена на $X \times [a,b]$, $f(x,y) \underset{X \ni x \to x_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} g(y)$ и для любого $x \in X$ функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$, то и $g(y)$ интегрируема по Риману на $[a.b]$ и $\int\limits_a^b g(y)\,dy = \lim\limits_{X \ni x \to x_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dy$ $\big($т.е. $\int\limits_a^b \lim\limits_{X \ni x \to x_0} f(x,y)\,dy = \lim\limits_{X \ni x \to x_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dy\big)$.*

▼ Возьмем любую последовательность $x_n \in X \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0$. Тогда по теореме 1 прошлой лекции $f(x_n,y) \underset{n \to \infty}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} g(y)$. Отсюда по по теореме 9,6 о почленном интегрировании функциональных последовательностей $g(y)$ интегрируема по

Риману (на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b g(y)\,dy = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x_n,y)\,dy$. Так как это верно для любой последовательности $x_n \in X\setminus\{x_0\}$, $x_n \to x_0$, то по определению предела по Гейне $\lim\limits_{X\ni x\to x_0}\int\limits_a^b f(x,y)\,dy = \int\limits_a^b g(y)\,dy$. Теорема доказана. ▲

**Лекция 13** (14.10.20)

Не состоялась по эпидемиологическим причинам.

**Лекция 13 - дубль два** (16.10.20)

Собственные интегралы, зависящие от параметра

Будем изучать интегралы вида

$$I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx,$$

где $a(y)$ и $b(y)$ — действительнозначные функции переменной $y$ (в частном случае, константы), а $f(x,y)$ — действительнозначная или комплекснозначная функция переменных $x$ и $y$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in Y$ — подмножеству некоторого метрического пространства, $y_0$ — предельная точка $Y$.

**Теорема 1** (о предельном переходе). *Пусть* $f(x,y) \underset{Y\ni y\to y_0}{\overset{[A,B]}{\rightrightarrows}} g(x)$, $[A,B]\subset\mathbb{R}$, $a(y)$ *и* $b(y)$ *— отображения* $Y$ *в* $[A,B]$ *и существуют* $a = \lim\limits_{Y\ni y\to y_0} a(y)$ *и* $b = \lim\limits_{Y\ni y\to y_0} b(y)$, *для каждого* $y\in Y$ *функция* $f(x,y)$ *интегрируема по Риману (на* $[A,B]$. *Тогда и* $g(x)$ *интегрируема по Риману (на* $[A,B]$ *и* $\lim\limits_{Y\ni y\to y_0}\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

▼ Из последней теоремы прошлой лекции следует, что $g(x)$ интегрируема по Риману на $[A,B]$. Напишем равенство

$$\int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \left(\int\limits_a^b + \int\limits_b^{b(y)} - \int\limits_a^{a(y)}\right) f(x,y)\,dx.$$

По последней теореме прошлой лекции $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \xrightarrow[Y\ni y\to y_0]{} \int\limits_a^b g(x)\,dx$. Покажем, что остальные два интеграла — бесконечно малые при $Y\ni y\to y_0$. Так как $f(x,y) \underset{Y\ni y\to y_0}{\overset{[A,B]}{\rightrightarrows}} g(x)$, то $\exists B'_\delta(y_0)\ \ \forall y\in B'_\delta(y_0)\cap Y\ \ \forall x\in[A,b]$: $|f(x,y)-g(x)|<1$. Но тогда $\forall y\in B'_\delta(y_0)\cap Y$ имеем $\left|\int\limits_b^{b(y)} f(x,y)-g(x)\,dx\right| \leqslant |b-b(y)| = o(1)$ при $Y\ni y\to y_0$, $\int\limits_b^{b(y)} g(x)\,dx = o(1)$ при $Y\ni y\to y_0$ в силу непрерывности интеграла с переменным верхним пределом. Значит, $\int\limits_b^{b(y)} f(x,y)\,dx = o(1)$ при $Y\ni y\to y_0$. Аналогично, $\int\limits_a^{a(y)} f(x,y)\,dx = o(1)$ при $Y\ni y\to y_0$. Теорема доказана. ▲

**Лемма 1**. Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутые множества. Тогда $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ — замкнутое.

▼ Если $(\vec{x}, \vec{y}) \notin X \times Y$, то или $\vec{x} \notin X$, или $\vec{y} \notin Y$ (или вместе). Если, например, $\vec{x} \notin X$, то существует $B_\delta(\vec{x}) \subset \mathbb{R}^m \setminus X$, а значит, $B_\delta\big((\vec{x}, \vec{y})\big) \subset \mathbb{R}^{m+n} \setminus (X \times Y)$.

$\vec{y} \notin Y$ — аналогично.▲

Напомним, что метрику на декартовом произведении $X \times Y$ метрических пространств можно определить, например, так: $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)\}$.

**Лемма 2**. Пусть функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна на произведении метрических пространств $X \times Y$, $y_0$ — предельная точка $Y$. Тогда $f(x, y) \underset{Y \ni y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f(x, y_0)$.

▼ Условие равномерной непрерывности:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in X, \forall x' \in B_\delta(x), \forall y \in Y, \forall y' \in B_\delta(y)$ выполнено $|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$. Взяв $x' = x$, $y' = y_0$, получим условие равномерной сходимости. ▲

**Теорема 2** (о непрерывности). *Пусть $f(x, \vec{y})$ непрерывная функция на $[A, B] \times Y \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, где $Y$ — компакт в $\mathbb{R}^n$, $a(y)$ и $b(y)$ — непрерывные отображения $Y$ в $[A, B]$. Тогда интеграл с параметром $I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, \vec{y})\, dx$ — непрерывная функция на $Y$.*

▼ В силу предыдущей теоремы достаточно доказать, что если $\vec{y}_0 \in Y$ — предельная точка $Y$, то $f(x, \vec{y}) \underset{Y \ni \vec{y} \to \vec{y}_0}{\overset{[A,B]}{\rightrightarrows}} f(x, \vec{y}_0)$. Множество $[A, B] \times Y$ ограничено как произведение ограниченных множеств и замкнуто как произведение замкнутых множеств по лемме 1.

Следовательно, $[A, B] \times Y$ — компакт в $\mathbb{R}^{1+n}$ и любая непрерывная на нем функция равномерно непрерывна. А из равномерной непрерывности $f(x, \vec{y})$ на $[A, B] \times Y$ по лемме 2 следует, что $f(x, \vec{y}) \underset{Y \ni \vec{y} \to \vec{y}_0}{\overset{[A,B]}{\rightrightarrows}} f(x, \vec{y}_0)$. Теорема доказана. ▲

**Теорема 3** (о дифференцируемости). *Пусть $f(x, y)$ и $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ непрерывны на $[A, B] \times [C, D]$, $a(y)$ и $b(y)$ — дифференцируемые функции, отображающие $[C, D]$ в $[A, B]$. Тогда $I(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx$ дифференцируем на $[C, D]$ и выполнено равенство*

$$I'(y) = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\, dx + f(b(y), y) \cdot b'(y) - f(a(y), y) \cdot a'(y).$$

▼ Распишем разностное отношение $\Delta I(y)/\Delta y$.

$$\frac{\Delta I(y)}{\Delta y} = \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx +$$

$$+ \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx - \frac{1}{\Delta y} \int\limits_{a(y_0)}^{a(y_0 + \Delta y)} f(x, y_0 + \Delta y) dx$$

Частная производная $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$ по условию непрерывна на $[A, B] \times [C, D]$ — компакте в $\mathbb{R}^2$, значит, она равномерно непрерывна на $[A, B] \times [C, D]$. Следовательно,

$\frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial}{\partial y}f(x, y_0+\theta\Delta y) \underset{\Delta y\to 0}{\overset{[A,B]}{\rightrightarrows}} \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$, а значит, по теореме 2

$$\int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}dx \xrightarrow[\Delta y\to 0]{} \int\limits_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial}{\partial y}f(x,y_0)\,dx.$$

Рассмотрим второй интеграл; по первой теореме о среднем, найдется такое число $\xi$ между $y_0$ и $y_0+\Delta y$, что

$$\frac{1}{\Delta y}\int\limits_{b(y_0)}^{b(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx = f(\xi,y_0+\Delta y)\cdot\frac{b(y_0+\Delta y)-b(y_0)}{\Delta y} \xrightarrow[\Delta y\to 0]{} f(b(y_0),y_0)\cdot b'(y_0).$$

Аналогично третий интеграл

$$\frac{1}{\Delta y}\int\limits_{a(y_0)}^{a(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)\,dx \xrightarrow[\Delta y\to 0]{} f(a(y_0),y_0)\cdot a'(y_0).$$

Теорема доказана. ▲

**Теорема 4** (об интегрируемости). *Если $f(x,y)$ непрерывна на $[A,B]\times[C,D]$, то функция $I(y)=\int\limits_A^B f(x,y)\,dx$ интегрируема по Риману на $[C,D]$ и*

$$\int\limits_C^D I(y)\,dy = \int\limits_C^D\int\limits_A^B f(x,y)\,dxdy = \int\limits_A^B\int\limits_C^D f(x,y)\,dydx.$$

▼ По теореме 4 предыдущей лекции $I(y)$ непрерывная, а значит, интегрируемая по Риману функция на $[c,d]$.

Функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна на компакте $[A,B]\times[C,D]\subset\mathbb{R}^2$. Следовательно, $F(x,y)=\int\limits_C^y f(x,t)\,dt$ — непрерывная на $[A,B]\times[C,D]$ функция с непрерывной на $[A,B]\times[C,D]$ частной производной $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=f(x,y)$. Тогда по предыдущей теореме

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_A^B F(x,y)\,dx = \int\limits_A^B f(x,y)\,dy$$

и, значит, $\int\limits_A^B F(x,y)\,dx$ — первообразная функции $I(y)=\int\limits_A^B f(x,y)\,dx$, поэтому $\int\limits_A^B F(x,y)\,dx = \int\limits_C^y\int\limits_A^B f(x,y)\,dxdt$ (ведь при $y=C$ равенство верно, обе части обращаются в ноль). Полагая $y=D$, получаем утверждение теоремы. ▲

## **Лекция 14** (19.10.20)
## **Несобственные интегралы с параметром**
## **Признаки равномерной сходимости несобственных инегралов**

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Будем изучать интегралы вида

$$I(y) = \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx,$$

где $a \in \mathbb{R}$, $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(x,y)$ — действительнозначная или комплекснозначная функция переменных $x$ и $y$, $x \in [a,b) \subset \mathbb{R}$, $y \in Y$ — некоторому множеству, и указанный интеграл является несобственным с единственной особой точкой $b$. Считаем, функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на $[a,b']$ для любого $y \in Y$ и любого $b' \in [a,b)$.

**Определение 1**. Несобственный интеграл $\int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ **сходится** на множестве $Y$ (при параметре $y \in Y$), если для любого $y \in Y$ существует несобственный интеграл

$$\int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx = \lim_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx,$$

который часто обозначается просто как

$$\int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

**Определение 2**. Несобственный интеграл $\int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ **сходится равномерно** на множестве $Y$ (при параметре $y \in Y$), если функция $F(s,y) = \int\limits_a^s f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $Y$ при $s \to b-0$ к функции $I(y) = \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$, т.е. если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B'_\delta(b)\ \forall s \in B'_\delta(b) \cap [a,b)\ \forall y \in Y:\quad \left| \int\limits_a^s f(x,y)\,dx - \int\limits_{[a,b)} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

или, эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_0 \in [a,b)\ \forall b' \in (b_0,b)\ \forall y \in Y:\quad \left| \int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx - \int\limits_{[a,b)} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$$

или, эквивалентно (супремум-критерий),

$$\sup_{y \in Y} \left| \left( \int\limits_a^s - \int\limits_{[a,b)} \right) f(x,y)\,dx \right| = \sup_{y \in Y} \left| \int\limits_{[s,b)} f(x,y)\,dx \right| \xrightarrow[s \to b-0]{} 0.$$

Отметим, что если несобственный интеграл сходится равномерно на $Y$, то он сходится при каждом $y \in Y$.

**Определение 3**. Несобственный интеграл $\int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ удовлетворяет **условию Коши равномерной сходимости** на множестве $Y$, если функция $F(s,y) = \int\limits_a^s f(x,y)\,dx$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости по $y$ на множестве $Y$ при $s \to b-0$, т.е. если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B'_\delta(b)\ \forall s, s' \in B'_\delta(b) \cap [a,b)\ \forall y \in Y: \quad \left| \int\limits_s^{s'} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon$$

или, эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists b_0 \in [a,b)\ \forall b', b'' \in (b_0, b)\ \forall y \in Y: \quad \left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x,y)\,dx \right| < \varepsilon.$$

**Теорема 1** (критерий Коши). *Несобственный интеграл $I(y) = \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на множестве $Y$ (при параметре $y \in Y$) тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на множестве $Y$.*

▼ Данная теорема — переформулировка критерия Коши равномерной сходимости функции $F(s,y) = \int\limits_a^s f(x,y)\,dx$ на множестве $Y$ при при $s \to b-0$, поэтому утверждение теоремы 3 верно. ▲

Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов

**1 признак** (Вейерштрасса). *Несобственный интеграл $I(y) = \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $Y$, если для всех $y \in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема на любом $[a,b'] \subset [a,b)$, $|f(x,y)| \leqslant \varphi(x)$ на $[a,b)$ и несобственный интеграл $\int\limits_{[a,b)} \varphi(x)\,dx$ сходится.*

▼ Из условия Коши сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{[a,b)} \varphi(x)\,dx$ и оценки $\left| \int\limits_{b'}^{b''} f(x,y)\,dx \right| \leqslant \int\limits_{b'}^{b''} \varphi(x)\,dx$ для любых $b', b''$, $a \leqslant b' \leqslant b'' < b$, любого $y \in Y$, сразу следует справедливость критерия Коши равномерной сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ на множестве $Y$. ▲

**Утверждение** (признак Дини для семейств функций). Пусть $f(x,y)$ – семейство функций на $[a,b) \times K$, $K$ – компакт в метрическом пространстве. Для любого $y \in K$ $f(x,y) \underset{x \to b-0}{\to} g(y)$ монотонно; функция $g(y)$ непрерывна на $K$ и для любого $x \in [a,b)$ функция $f(x,y)$ непрерывна на $K$. Тогда $f(x,y) \underset{x \to b-0}{\overset{K}{\rightrightarrows}} g(y)$.

▼ Рассмотрим $\varphi(s,y) = |f(s,y) - g(y)|$ — семейство непрерывных (при каждом $s \in [a,b)$) на $K$ функций, невозрастающее (при каждом $y \in K$) по $s$ и $\varphi_s(y) \xrightarrow[s \to b-0]{} 0$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $F_s = \{y \in K: \ |\varphi_s(y)| \geqslant \varepsilon\}$ — замкнутые подмножества $K$ и в силу невозрастания $\varphi_s(y)$ по $s$ при $a \leqslant s \leqslant s' < b$

$F_s \supset F_{s'}$. Из того, что в каждой точке $y \in K$ $\varphi_s(y) \xrightarrow[s\to b-0]{} 0$ следует, что $\bigcap\limits_{a\leqslant s<b} F_s = \varnothing$. Пусть $G_s = M \setminus F_s$, где $M$ — метрическое пространство, — открытые множества, $\bigcup\limits_{a\leqslant s<b} G_s = M \supset K$. Поэтому, в силу компактности $K$, найдутся такие $s_1 < s_2 < \cdots < s_m$, что $\bigcup\limits_{k=1}^{m} G_{s_k} \supset K$, а в силу монотонности $G_{s_1} \subset G_{s_2} \subset \cdots \subset G_{s_m}$, значит, $G_{s_m} \supset K$, а $F_{s_m} = \varnothing$, т.е. для любых $s \in [s_m, b)$ и $y \in K$ верна оценка $\varphi_s(y) = \Big|f(x,y) - g(y)\Big| < \varepsilon$. Теорема доказана.▲

**2 признак** (Дини). *Несобственный интеграл* $I(y) = \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно при* $y \in K$ *— компакту в некотором метрическом пространстве, если при каждом* $y \in K$ *функция* $f(x,y)$ *одного знака на* $[a,b)$ *и интегралы* $\int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ *и* $\int\limits_a^s f(x,y)\,dx$ *при каждом* $s \in [a,b)$ *непрерывные на* $K$ *функции.*

▼ Следует из предыдущей теоремы.

▲

**3 признак** (Абеля). *Если несобственный интеграл Римана* $\int\limits_{[a,b)} u(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $Y$*, а* $v(x,y)$ *такая функция на* $[a,b)\times Y$*, что* $v(a,y)$ *и* $\operatorname*{Var}\limits_{[a,b)} v(x,y)$ *ограничены на* $Y$*, то несобственный интеграл* $\int\limits_{[a,b)} u(x,y)v(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $Y$*.*

**4 признак** (Дирихле). *Если интегралы Римана* $U(s,y) = \int\limits_a^s u(x,y)\,dx$ *равномерно ограничены на* $[a,b)$ *при* $y \in Y$*, а функции* $v(x,y)$ *ограниченной вариации на* $[a,b)$ *и* $v(x,y) \underset{x\to b-0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} 0$, $\operatorname*{Var}\limits_{[s,b)} v(x,y) \underset{s\to b-0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} 0$*, то несобственный интеграл* $\int\limits_{[a,b)} u(x,y)v(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $Y$*.*

▼ Доказательство признаков 3 и 4.

Проверим выполнение условия Коши равномерной сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{[a,b)} u(x,y)v(x,y)\,dx$ на $Y$ для признаков 3 Абеля и 4 Дирихле. Пусть $a \leqslant b' \leqslant b'' < b$. Если функция $u(x,y)$ интегрируема по $x$ на $[b',b'']$ в смысле Римана, то после ее умножения на функцию ограниченной вариации $v(x,y)$ получается функция, интегрируемая в том же смысле, что и раньше, и

$$\int\limits_{b'}^{b''} u(x,y)v(x,y)\,dx = (\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_{b'}^{b''} v(x,y)\,dU(x,y),$$

где $U(x,y) = \int\limits_{b'}^{x} u(t,y)\,dt$ — неопределенный интеграл $u(x,y)$ (см. о сведении интеграла Римана к интегралу Стилтьеса). Интегрируя по частям в последнем интеграле (см. об интегрировании по частям для $\mathcal{R}-\mathcal{S}$-интеграла) получаем, что

$$\int\limits_{b'}^{b''} u(x,y)v(x,y)\,dx = v(b'',y)U(b'',y) - (\mathcal{R}-\mathcal{S})\int\limits_{b'}^{b''} U(x,y)\,dv(x,y)$$

(при фиксированном параметре $y$). Отсюда для случая признака 3 Абеля при фиксированном $y \in Y$ имеем:

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} u(x,y)v(x,y)\,dx\right| \leqslant \sup_{a\leqslant x<b}|v(x,y)|\cdot|U(b'',y)| + \sup_{b'\leqslant x<b''}|U(x,y)|\cdot \operatorname*{Var}_{[b',b'']} v(x,y) \leqslant$$

$$\leqslant \left(|v(a,y)| + 2\operatorname*{Var}_{[a.b)} v(x,y)\right)\cdot \sup_{b'\leqslant x\leqslant b''}\left|\int\limits_{b'}^{x} u(t,y)\,dt\right|.$$

По условию Коши равномерной сходимости несобственного интеграла с параметром $\int\limits_{[a,b)} u(x,y)\,dx$ имеем: $\forall\varepsilon>0\,\exists b_0\in[a,b)\,\forall b',b''\in(b_0,b)\,\forall y\in Y$ : $\left|\int\limits_{b'}^{b''} u(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$. Но тогда $\forall b',b''\in(b_0,b)\,\forall y\in Y$ : $\left|\int\limits_{b'}^{b''} u(x,y)v(x,y)\,dx\right| < C\varepsilon$, где константа $C = \sup\limits_{y\in Y}\bigl(|v(a,y)| + 2\operatorname*{Var}\limits_{[a.b)} v(x,y)\bigr)$. Значит, для интеграла $\int\limits_{[a,b)} u(x,y)v(x,y)\,dx$ выполняется условие Коши равномерной сходимости на $Y$ и этот интеграл равномерно сходится на $Y$.

Для случая признака 4 Дирихле при фиксированном $y\in Y$ имеем:

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} u(x,y)v(x,y)\,dx\right| \leqslant |U(b'',y)|\cdot|v(b'',y)| + \sup_{b'\leqslant x<b}|U(x,y)|\cdot \operatorname*{Var}_{[b',b'']} v(x,y) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_{a\leqslant x<b}\left|\int\limits_{a}^{x} u(t,y)\,dt\right|\cdot\left(|v(b'',y)| + \operatorname*{Var}_{[b',b'']} v(x,y)\right).$$

Так как по условию $v(x,y) \underset{x\to b-0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} 0$ и $\operatorname*{Var}\limits_{[s,b)} v(x,y) \underset{s\to b-0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} 0$, то $\forall\varepsilon>0\,\exists b_0\in[a,b)\,\forall x\in(b_0,b)\,\forall y\in Y$ : $|v(x,y)|<\varepsilon$ и $\operatorname*{Var}\limits_{[b_0,b)} v(x,y) < \varepsilon$. Но тогда $\forall b',b''\in(b_0,b)\,\forall y\in Y$ : $\left|\int\limits_{b'}^{b''} u(x,y)v(x,y)\,dx\right| < C\varepsilon$, где $C = 4\sup\limits_{a\leqslant x<b,\ y\in Y}\left|\int\limits_{a}^{x} u(t,y)\,dt\right|$ — константа. Значит, для интеграла $\int\limits_{[a,b)} u(x,y)v(x,y)\,dx$ выполняется условие Коши равномерной сходимости на $Y$ и этот интеграл равномерно сходится на $Y$. ▲

**Замечание 1**. Обычно в признаке 3 Абеля требуют, чтобы функции $v(x,y)$ (с парметром $y$) былы равномерны ограничены на $[a,b)$ при $y\in Y$ и при каждом $y\in Y$ монотонны по $x$, что обеспечивает выполнение сформулированных в признаке требований к $v(x,y)$.

**Замечание 2**. Обычно в признаке 4 Дирихле требуют, чтобы $v(x,y) \underset{x\to b-0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} 0$ и $v(x,y)$ при каждом $y\in Y$ была монотонна по $x$, что обеспечивает выполнение сформулированных в признаке требований к $v(x,y)$.

## **Лекция 15** (23.10.20)

## Свойства равномерно сходящихся несобственных интегралов

**Теорема 1** (о перестановке предела). *Пусть несобственный интеграл* $I(y) = \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $Y$ *(т.е.* $\int\limits_a^s f(x,y)\,dx = I(s,y) \underset{s\to b-0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} I(y)$*) и для любого* $b' \in [a,b)$ $f(x,y) \underset{Y\ni y\to y_0}{\overset{[a,b']}{\rightrightarrows}} g(x)$*, где* $y_0$ *— предельная точка* $Y$ *(в некотором метрическом пространстве). Тогда функция* $g(x)$ *интегрируема в несобственном смысле на* $[a,b)$ *и*

$$\lim_{Y\ni y\to y_0} I(y) = \lim_{Y\ni y\to y_0} \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{[a,b)} g(x)\,dx$$

*(т.е.* $\lim\limits_{Y\ni y\to y_0} \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{[a,b)} \lim\limits_{Y\ni y\to y_0} f(x,y)\,dx$*).*

▼ Пусть $I(s,y) = \int\limits_a^s f(x,y)\,dx$, $s \in [a,b)$, $y \in Y$. Так как $f(x,y) \underset{Y\ni y\to y_0}{\overset{[a,s]}{\rightrightarrows}} g(x)$, то по теореме 13,2 $\lim\limits_{Y\ni y\to y_0} I(s,y) = I_s = \int\limits_a^s g(x)\,dx$. По условию $I(s,y) \underset{s\to b-0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} I(y)$, то по теореме 13,3 (о перестановке пределов) $\lim\limits_{Y\ni y\to y_0} I(y) = \lim\limits_{s\to b-0} I_s = \int\limits_{[a,b)} g(x)\,dx$. ▲

**Теорема 2** (о непрерывности). *Пусть функция* $f(x,y)$ *непрерывна на* $[a,b) \times Y$*, где* $Y$ *— компакт в* $\mathbb{R}^n$*, несобственный интеграл* $I(y) = \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $Y$*. Тогда* $I(y)$ *непрерывная на* $Y$ *функция.*

▼ Пусть $I(s,y) = \int\limits_a^s f(x,y)\,dx$, $s \in [a,b)$, $y \in Y$. По теореме 14,4 о непрерывности собственных интегралов с параметром для любого $s \in [a,b)$ $I(s,y)$ непрерывная на $Y$ функция. Так как $I(s,y) \underset{s\to b-0}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} I(y)$, то $I(y)$ непрерывная на $Y$ функция. ▲

**Теорема 3** (о дифференцируемости). *Пусть функция* $f(x,y)$ *и ее частная производная* $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ *непрерывны на* $[a,b) \times J$*, где* $J$ *— ограниченный промежуток, несобственный интеграл* $\int\limits_{[a,b)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $J$*, а несобственный интеграл* $I(y) = \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ *сходится хотя бы в одной точке* $J$*. Тогда несобственный интеграл* $I(y)$ *сходится равномерно на* $J$*, дифференцируем на* $J$ *и*

$$I'(y) = \int\limits_{[a,b)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx \qquad \left(\text{т.е. } \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx = \int\limits_{[a,b)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx.\right)$$

▼ Пусть $I(s,y) = \int\limits_a^s f(x,y)\,dx$, $s \in [a,b)$, $y \in Y$. По теореме о дифференцируемости собственных интегралов с параметром $I(s,y)$ при любом фиксированном $s \in [a,b)$ дифференцируем по $y$ и

$$\frac{\partial}{\partial y} I(s,y) = \int\limits_a^s \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\,dx.$$

По условию теоремы $\frac{\partial}{\partial y}I(s,y) = \int\limits_a^s \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx \underset{s\to b-0}{\overset{J}{\rightrightarrows}} \int\limits_{[a,b)} \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx$, а $I(s,y)$ сходится при $s \to b-0$ в какой-то точке $J$. Тогда по теореме о дифференцировании функций с параметром существует такая дифференцируемая на $J$ функция $I(y)$, что $I(s,y) \underset{s\to b-0}{\overset{J}{\rightrightarrows}} I(y)$, а $\frac{\partial}{\partial y}I(s,y) \underset{s\to b-0}{\overset{J}{\rightrightarrows}} I'(y)$, т.е. $\frac{d}{dy}I(y) = \lim\limits_{s\to b-0}\frac{\partial}{\partial y}I(s,y)$.

Значит, снова применяя теорему о дифференцируемости собственных интегралов, $\frac{d}{dy}I(y) = \lim\limits_{s\to b-0}\frac{\partial}{\partial y}I(s,y) = \lim\limits_{s\to b-0}\int\limits_a^s \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx = \int\limits_{[a,b)} \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\,dx$. ▲

**Теорема 4** (об интегрируемости собственной). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b)\times[c,d]$ и несобственный интеграл $I(y) = \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на $[c,d]$. Тогда $I(y)$ интегрируем по Риману на $[c,d]$ и $\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_{[a.b)}\int\limits_c^d f(x,y)\,dydx$ (т.е. $\int\limits_c^d \int\limits_{[a.b)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{[a,b)}\int\limits_c^d f(x,y)\,dydx$).*

▼ Пусть $I(s,y) = \int\limits_a^s f(x,y)\,dx$, $s\in[a,b)$, $y \in Y$. По теореме об интегрируемости собственных интегралов с параметром $(\mathcal{R})\int\limits_c^d I(s,y)\,dy = \int\limits_a^s\int\limits_c^d f(x,y)\,dydx$. При $s \to b-0$ левая часть равенства по теореме об интегрировании равномерно сходящихся функций стремится к $(\mathcal{R})\int\limits_c^d I(y)\,dy$ (ведь $I(s,y) \underset{s\to b-0}{\overset{[c,d]}{\rightrightarrows}} I(y)$), а правая часть стремится к $\int\limits_{[a,b)}\int\limits_c^d f(x,y)\,dydx$. ▲

**Теорема 5** (об интегрируемости несобственной). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b)\times[c,d)$, несобственный интеграл $\int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на любом отрезке $[c,d']\subset[c,d)$, а несобственный интеграл $\int\limits_{[c,d)} f(x,y)\,dy$ сходится равномерно на любом отрезке $[a,b']\subset[a,b)$ и существует хотя бы один из двух повторных несобственных интегралов $\int\limits_{[c,d)}\int\limits_{[a,b)}|f(x,y)|\,dxdy$, $\int\limits_{[a,b)}\int\limits_{[c,d)}|f(x,y)|\,dydx$. Тогда существуют и равны между собой повторные несобственные интегралы $\int\limits_{[c,d)}\int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dxdy$ и $\int\limits_{[a,b)}\int\limits_{[c,d)} f(x,y)\,dydx$.*

▼ Предположим, например, что существует повторный несобственный интеграл $\int\limits_{[a,b)}\int\limits_{[c,d)}|f(x,y)|\,dydx$. Пусть $J(x,t) = \int\limits_c^t f(x,y)dy$. По предыдущей теореме 4, $\int\limits_c^t\int\limits_{[a,b)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{[a,b)}\int\limits_c^t f(x,y)dydx = \int\limits_{[a,b)} J(x,t)dx$ (т.к. интеграл $\int\limits_{[a,b)} f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,t]$ для любого $t\in[c,d)$).

Так как $|J(x,t)| \le \int\limits_c^t |f(x,y)|dy \le \int\limits_{[c,d)} |f(x,y)|dy$, то про признаку Вейерштрасса несобственный интеграл $\int\limits_{[a,b)} J(x,t)$ сходится равномерно при $t\in[c,d)$. Кроме того, по условию, $J(x,t) = \int\limits_c^t f(x,y) \underset{t\to d-0}{\overset{[a,b']}{\rightrightarrows}}$ для любого $[a,b'] \subset [a,b)$. Значит, по теореме 1 данной лекции (о перестановке пределов)

$$\lim_{t\to d-0} \int\limits_{[a,b)} \int\limits_c^t f(x,y)dydx = \int\limits_{[a,b)} \lim_{t\to d-0} \int\limits_c^t f(x,y)dydx = \int\limits_{[a,b)} \int\limits_{[c,d)} f(x,y)\,dydx.$$

С другой стороны, снова по теореме 4 о собственном интегрировании,

$$\lim_{t\to d-0} \int\limits_{[a,b)} \int\limits_c^t f(x,y)dydx = \lim_{t\to d-0} \int\limits_c^t \int\limits_{[a,b)} f(x,y)dxdy = \int\limits_{[c,d)} \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dxdy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{[c,d)} \int\limits_{[a,b)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{[a,b)} \int\limits_{[c,d)} f(x,y)\,dydx.\blacktriangle$$

**Пример** вычисления несобственных интегралов. Из интеграла $\int\limits_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$, $\alpha > -1$, несобственного при $0 > \alpha > -1$ с особенностью в 0, дифференцированием по параметру $\alpha$ $n$ раз (возможность этого легко проверяется с использованием теоремы 3) получаем, что

$$\int\limits_0^1 x^\alpha \ln^n x\,dx = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Интеграл Дирихле

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Формально интеграл с двумя особенностями — в 0 и в $\infty$ и его надо разбивать на два несобственных интеграла, по $(0,1]$ и по $[1,\infty)$. Но поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то, доопределяя подынтегральную функцию как 1 в точке 0, получим собственный интеграл по $[0,1]$ и тогда интеграл Дирихле — интеграл с одной особенностью в $\infty$. Интеграл по $[1,\infty)$ сходится по признаку Дирихле, ведь неопределенный интеграл от $\sin x$ — $-\cos x$, ограниченная функция, а функция $\frac{1}{x}$ ограниченной вариации и стремится к 0. Покажем, как интеграл Дирихле можно вычислить.

Интеграл с параметром $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx$ сходится равномерно на $[0,\infty)$ по признаку Абеля и дифференцируем на $(0,\infty)$, его производная $-\int\limits_0^\infty \sin x\, e^{-\alpha x} dx$ равномерно сходится на любом луче $[\varepsilon,\infty)$ с $\varepsilon > 0$ по признаку Вейерштрасса, ведь

$|\sin x\, e^{-\alpha x}| \leqslant e^{-\varepsilon x}$. Но для $\alpha > 0$ интегрируя по частям получаем $-\int\limits_0^\infty \sin x\, e^{-\alpha x} dx = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} d\cos x = e^{-\alpha x}\cos x\Big|_0^\infty + \alpha\int\limits_0^\infty \cos x e^{-\alpha x} dx = -1 + \alpha\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} d\sin x = -1 + \alpha e^{-\alpha x}\sin x\Big|_0^\infty + \alpha^2\int\limits_0^\infty \sin x e^{\alpha x} dx = -1 + \alpha^2\int\limits_0^\infty \sin x e^{\alpha x} dx$, откуда $-\int\limits_0^\infty \sin x\, e^{-\alpha x} dx = \frac{-1}{1+\alpha^2}$. Отсюда имеем $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx = -\operatorname{arctg}\alpha + C$, $I(\alpha) \xrightarrow[\alpha\to\infty]{} 0$ (т.к. $|I(\alpha)| \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$), значит, $C = \frac{\pi}{2}$. Используя непрерывность $I(\alpha)$ на $[0,\infty)$ получаем: $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = I(0) = \lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}$.

Теперь заменой переменной можно получить, что

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin\gamma x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } \gamma > 0, \\ 0 & \text{при } \gamma = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } \gamma < 0. \end{cases}$$

## **Лекция 16** (26.10.20)<br>**Интегралы Фруллани.**<br>**Гамма-функция Эйлера**

Интегралы Фруллани

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx.$$

**Теорема 1** (об интегралах Фруллани). *Если действительнозначная (или комплекснозначная) функция $f$ определена на $(0, +\infty)$, интегрируема на любом отрезке $I \subset (0, +\infty)$ и существуют пределы $f(+0) = \lim\limits_{x\to+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, который обозначим $f(+\infty)$, то*

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln\frac{b}{a}.$$

▼ Пусть $a < b$, тогда $\int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx = \left(\int\limits_{a\delta}^{a\Delta} - \int\limits_{b\delta}^{b\Delta}\right) \frac{f(t)}{t}\, dt = \left(\int\limits_{a\delta}^{b\delta} - \int\limits_{a\Delta}^{b\Delta}\right) \frac{f(t)}{t}\, dt = \mu\ln\frac{b}{a} - \lambda\ln\frac{b}{a}$, где $\mu \in [\inf\limits_{x\in[a\delta,b\delta]} f(x), \sup\limits_{x\in[a\delta,b\delta]} f(x)]$, $\lambda \in [\inf\limits_{x\in[a\Delta,b\Delta]} f(x), \sup\limits_{x\in[a\Delta,b\Delta]} f(x)]$ по первой теореме о среднем; при этом $\mu \to f(+0)$ при $\delta \to 0$ и $\lambda \to f(+\infty)$ при $\Delta \to +\infty$.

Значит, при $\delta \to 0$, $\Delta \to +\infty$

$$\int\limits_\delta^\Delta \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx \to (f(0) - f(+\infty)) \ln\frac{b}{a}.$$

Случай $a > b$ сводится к данному изменением обозначений. ▲

**Замечание 1**. Условие на функцию $f$ выполнено, если, например, $f$ непрерывна на $[0,+\infty)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$. В этом случае $\left(\int\limits_{a\delta}^{b\delta} - \int\limits_{a\Delta}^{b\Delta}\right) \frac{f(t)}{t}\,dt = f(\zeta)\ln\frac{b}{a} - f(\eta)\ln\frac{b}{a}$, где $\zeta \in [a\delta, b\delta]$, $\eta \in [a\Delta, b\Delta]$.

**Замечание 2**. Если выполнено условие, что функция $\frac{f(x)}{x}$ интегрируема на $[A,+\infty)$ для некоторого $A > 0$ (при этом необязательно, что существует $f(+\infty)$), то член с $f(+\infty)$ исчезает в ответе, т.е. в этом случае $\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}$ (в этом случае по критерию Коши $\int\limits_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t}\,dt \to 0$ при $\Delta \to +\infty$).

Аналогично, если $f(+0)$ не обязательно существует, но существует интеграл $\int\limits_0^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$ (может, как несобственный с особенностью в точке 0), то член с $f(0)$ исчезает в ответе, т.е. в этом случае $\int\limits_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$.

**Пример**. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \ln\frac{b}{a}$.

Интегралы Эйлера. Гамма-функция Эйлера

**Определение**. Интеграл

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$

называется **эйлеровым интегралом второго рода** или **гамма-функцией Эйлера**.

Это несобственный интеграл с особыми точками $+\infty$ и (при $s < 1$) 0. На бесконечности (в некоторой окрестности $+\infty$) подынтегральная функция $x^{s-1}e^{-x}$ всегда интегрируема, т.к. при любом $s$ функция $x^{s-1} = o(e^{\varepsilon x})$ для любого $\varepsilon > 0$ при $x \to +\infty$. В нуле подынтегральная функция $x^{s-1}e^{-x}$ эквивалентна $x^{s-1}$ (предел их отношения при $x \to 0$ равен 1) и, значит, интегрируема (в окрестности 0) при $s > 0$. Таким образом, $\Gamma(s)$ определена для $s > 0$. На любом отрезке $[a,b] \subset (0,+\infty)$ интеграл сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, ведь $0 < x^{s-1}e^{-x} \leqslant x^{a-1}$ на $(0,1]$ и $0 < x^{s-1}e^{-x} \leqslant x^{b-1}e^{-x}$ на $[1,+\infty)$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Значит, $\Gamma(s)$ непрерывна на любом отрезке $[a,b] \subset (0,+\infty)$, т.е. непрерывна на $(0,+\infty)$. Легко видеть, что $\Gamma(s) > 0$ на $(0,+\infty)$. Также легко проверяется (по теореме о дифференцировании несобственных интегралов с параметром), что $\Gamma(s)$ бесконечно дифференцируема на $(0,+\infty)$ и

$$\Gamma^{(n)}(s) = \int\limits_0^\infty \ln^n x \cdot x^{s-1}e^{-x}dx.$$

**Утверждение 1**.

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{s(s+1)\dots(s+n-1)}n^s = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)} \cdot (n+1)^s,\ s > 0.$$

▼ Из выпуклости $e^x$ на $\mathbb{R}$ следует, что $1 + x \leqslant e^x$ на $\mathbb{R}$ ($1 + x$ — уравнение касательной к $e^x$ в точке $x = 1$). Изменяя знак у $x$, получаем оценку $1 - x \leqslant e^{-x}$ на $\mathbb{R}$. Значит, $1+x \leqslant e^x \leqslant (1-x)^{-1}$ для $|x| < 1$. Полагая $x = \frac{t}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$, имеем оценку

$$1 + \frac{t}{n} \leqslant e^{\frac{t}{n}} \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-1},$$

а из нее оценки

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t \leqslant \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-n}, \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} \leqslant \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n}.$$

Тогда $0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}\left(1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) \leqslant e^{-t}\left(1 - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) = e^{-t}\left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right) \leqslant e^{-t}\left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)\right) = e^{-t} \cdot \frac{t^2}{n}$ (по неравенству Бернулли). Следовательно, $0 \leqslant \int\limits_0^n \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right) t^{s-1} dt \leqslant \int\limits_0^n e^{-t} \cdot \frac{t^2}{n} \cdot t^{s-1} dt = \frac{1}{n}\int\limits_0^n e^{-t} \cdot t^{s+1} dt \leqslant \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty e^{-t} \cdot t^{s+1} dt = \frac{1}{n}\Gamma(s+2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Значит, $\Gamma(s) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^n e^{-t} \cdot t^{s-1} dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt$.

Для подсчета интеграла $I_n = \int\limits_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt$ сделаем замену $\frac{t}{n} = u$ и получим, что $I_n = \int\limits_0^1 (1-u)^n n^s u^{s-1} du = n^s \int\limits_0^1 (1-u)^n u^{s-1} du$. Интегрируя по частям, получим $\int\limits_0^1 (1-u)^n u^{s-1} du = \int\limits_0^1 (1-u)^n d\frac{u^s}{s} = (1-u)^n \frac{u^s}{s}\Big|_0^1 + \frac{n}{s}\int\limits_0^1 (1-u)^{n-1} u^s du = \int\limits_0^1 (1-u)^{n-1} u^s du$. Значит, $\int\limits_0^1 (1-u)^n u^{s-1} du = \frac{n}{s}\int\limits_0^1 (1-u)^{n-1} u^s du = \frac{n(n-1)}{s(s+1)}\int\limits_0^1 (1-u)^{n-2} u^{s+1} du = \cdots = \frac{n!}{s(s+1)\ldots(s+n-1)}\int\limits_0^1 u^{s+n-1} du = \frac{n!}{s(s+1)\ldots(s+n-1)(s+n)}$.

Значит, используя тот факт, что $\frac{n}{s+n} \to 1$ при $n \to \infty$,

$$\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{s(s+1)\ldots(s+n)} n^s = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{s(s+1)\ldots(s+n-1)} \cdot n^s =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{s(s+1)\ldots(s+n)} \cdot (n+1)^s.$$

▲

**Теорема 2**. *Верна формула Эйлера*

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{k=1}^\infty \left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)^s \left(1 + \frac{s}{k}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{s}\prod_{k=1}^\infty \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^s}{1 + \frac{s}{k}}, \ s > 0.$$

$$▼\frac{1}{s}\prod_{k=1}^n \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^s}{1 + \frac{s}{k}} = \frac{\prod\limits_{k=1}^n \frac{(k+1)^s}{k^s}}{s\prod\limits_{k=1}^n (k+s)} \prod_{k=1}^n k = \frac{n!}{s(s+1)\ldots(n+s)}(n+1)^s,$$

теперь утверждение теоремы следует из утверждения 1.▲

**Замечание**. Если определить $\Gamma(s)$ по формуле Эйлера, то $\Gamma(s)$ будет определена на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^- = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ (а если рассмотреть комплексные $s$, то на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$).

Действительно, $\ln \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^s}{1+\frac{s}{k}} = s \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln(1 + \frac{s}{k}) = s(\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{s}{k} + O\left(\frac{s^2}{k^2}\right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ при $k \to \infty$. По теореме 3 лекции 5 произведение сходится для всех $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.

**Далее будем считать, что $\Gamma(s)$ доопределена на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$ по формуле Эйлера.**

**Лемма 1**. *Для $s > 0$ верно равенство $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.*

▼ По лемме 1, $\Gamma(s+1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{(s+1)\dots(s+1+n)} \cdot (n+1)^{s+1} = \lim\limits_{n\to\infty} s\frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)} \cdot (n+1)^s = s\Gamma(s)$, $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$. ▲

**Замечание**. Если определить $\Gamma(s)$ с $(0, +\infty)$ на $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ используя формулу $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$, то такое доопределение будет совпадать с доопределением по формуле Эйлера.

**Следствие 1**. *Для $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^+$ верно равенство $\Gamma(1-s) = -s\Gamma(-s)$.*

**Следствие 2**. *Для $n \in \mathbb{N}$ $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(1) = 1$.*

В силу леммы 2 достаточно проверить последнее утверждение, а оно верно по формуле Эйлера из теоремы 2.

Формула дополнения гамма-функции

**Теорема 3**. *Верна формула дополнения гамма-функции*

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

▼ По формуле Эйлера для гамма-функции

$$\Gamma(s)\Gamma(-s) = \frac{1}{s}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^s\left(1+\frac{s}{k}\right)^{-1}\right) \cdot \frac{-1}{s}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-s}\left(1-\frac{s}{k}\right)^{-1}\right) =$$
$$= \frac{-1}{s^2\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)} = -\frac{1}{s^2}\cdot\frac{\pi s}{\sin \pi s} = -\frac{1}{s}\cdot\frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Значит,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \Gamma(s)\cdot(-s)\Gamma(-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

▲

**Следствие 1**. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Действительно, по теореме 3 $\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) = \pi$.

По данному следствию теперь возможно вычислить точное значение гамма-функции не только на натуральных числах, но и на числах вида $n - \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$.

**Следствие 2**. (Интеграл Эйлера-Пуассона). $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Действительно, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}dx = 2\int\limits_0^\infty e^{-x}d\sqrt{x} = 2\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt$.

**Лекция 17** (30.10.20)
**Интегралы Эйлера.**
**Бета-функция Эйлера**

Бета-функция Эйлера

**Определение**. Интеграл

$$B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$

называется **эйлеровым интегралом первого рода** или **бета-функцией Эйлера**.

Это несобственный интеграл при $p<1$ или $q<1$, с особенностями в 0 при $p<1$ и в 1 при $q<1$. В точке 0 рассматриваемая на $[0,1]$ подынтегральная функция эквивалентна $x^{p-1}$ (предел отношения подынтегральной функции к $x^{p-1}$ равен 1 при $x\to+0$) и, значит, интегрируема при $p>0$, в точке 1 подынтегральная функция эквивалентна $(1-x)^{q-1}$ и, значит, интегрируема при $q>0$. Итак, $B(p,q)$ определена на $(0,+\infty)^2$. Несложно проверить, что это бесконечно дифференцируемая функция двух переменных и что

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial q^m\partial p^n}B(p,q)=\int\limits_0^1 \ln^n x\cdot x^{p-1}\cdot(1-x)^{q-1}\ln^m(1-x)\,dx,$$

но будет проще установить свойства бета-функции из ее выражения через гамма-функцию, которое получим чуть позже.

Пока же отметим, что $B(p,q)=B(q,p)$ (достаточно сделать замену $t=1-x$).

**Утверждение 1** (Формула приведения).

▼

$$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q)\quad\text{при}\quad p>0,\ q>0,$$

т.к.

$$B(p+1,q)=\int\limits_0^1 x^p(1-x)^{q-1}dx=-\frac{1}{q}x^p(1-x)^q\Big|_0^1+\frac{p}{q}\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^q dx=$$

$$=\frac{p}{q}\Big(\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx-\int\limits_0^1 x^{p-1}\cdot x(1-x)^{q-1}dx\Big)=\frac{p}{q}B(p,q)-\frac{p}{q}B(p+1,q).$$

Значит,

$$B(p+1,q)=\frac{\frac{p}{q}B(p,q)}{1+\frac{p}{q}}=\frac{p}{p+q}B(p,q).$$

В силу симметрии $B(p,q+1)=\frac{q}{p+q}B(p,q)$ при $p>0,\ q>0$. ▲

**Утверждение 2** (еще одно представление бета-функции).

$$B(p,q)=\int\limits_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt,$$

▼ Получается заменой $x = \frac{t}{1+t}$, т.е. $t = \frac{x}{1-x}$. ▲

**Утверждение 3**

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^a x \sin^b x\ dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right) \quad \text{при} \quad a > -1,\ b > -1,$$

▼ Получается заменой $\cos^2 x = t$ или $\sin^2 x = t$. ▲

Связь между интегралами Эйлера

**Теорема 3**. *При $p > 0$, $q > 0$*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

▼ Пусть $x = (1+v)u$, где $v > 0$ — постоянная, $u$ — переменная, тогда

$$\Gamma(p+q) = \int\limits_0^\infty x^{p+q-1} e^{-x} dx = (1+v)^{p+q} \int\limits_0^\infty u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} du,$$

откуда

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+v)^{p+q}} = \int\limits_0^\infty u^{p+q-1} e^{-(1+v)u} du.$$

Тогда

$$\Gamma(p+q)B(p,q) = \int\limits_0^\infty \frac{\Gamma(p+q)v^{p-1}}{(1+v)^{p+q}} dv = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty u^{p+q-1} v^{p-1} e^{-(1+v)u} du dv.$$

Если в последнем выражении переставить порядок интегрирований, то получим следующее равенство

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty u^{p+q-1} v^{p-1} e^{-(1+v)u} dv du = \int\limits_0^\infty u^{q-1} e^{-u} \int\limits_0^\infty (uv)^{p-1} e^{-uv} u dv du =$$

$$= \int\limits_0^\infty u^{q-1} e^{-u} \int\limits_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt du = \Gamma(p) \int\limits_0^\infty u^{q-1} e^{-u} du = \Gamma(p)\Gamma(q).$$

Для заверешения доказательства формулы остается обосновать законность перестановки порядка интегрирования.

Такое обоснование проще провести в случае $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, т.к. при этом 0 не является особой точкой, особенность есть только в $+\infty$ и этот случай сразу сводится к теореме о несобственном интегрировании несобственного интеграла с параметром. Несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty u^{p+q-1} v^{p-1} e^{-(1+v)u} du$ сходится равномерно для $v \in [a,b] \subset [0,+\infty)$ по признаку Вейерштрасса, так как $|u^{p+q-1} v^{p-1} e^{-(1+v)u}| \leqslant u^{p+q-1} b^{p-1} e^{-u}$;

другой несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty u^{p+q-1}v^{p-1}e^{-(1+v)u}dv = u^{q-1}e^{-u}\int\limits_0^\infty (uv)^{p-1}e^{-uv}udv = u^{q-1}e^{-u}\Gamma(p)$ сходится равномерно для $u \in [c,d] \subset [0,+\infty)$ по признаку Дини, повторные интегралы существуют, а подынтегральная функция неотрицательна. Значит, перестановка порядка интегрирования возможна.

Общий случай $p>0$, $q>0$, можно получить из случая $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$, используя формулы приведения:

$$B(p,q) = \frac{p+q}{p}B(p+1,q) = \frac{p+q}{p}\cdot\frac{q+p+1}{q}B(p+1,q+1) =$$
$$= \frac{(p+q)(p+q+1)}{pq}\cdot\frac{\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)} = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

▲

## Формула Стирлинга

**Теорема 4.**

$$\Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi s}\cdot s^s e^{-s}\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{s}}\right),\ \text{где } -1 \leqslant \omega \leqslant 1, s>0.$$

▼ Гамма-функция $\Gamma(s+1) = \int\limits_0^\infty x^s e^{-x}dx$, производная подынтегральной функции $(x^s e^{-x})' = x^{s-1}e^{-x}(s-x)$ и, значит, подынтегральная функция $x^s e^{-x}$ возрастает на $(0,s]$ и убывает на $[s,\infty)$. Сделаем замену (на каждом из участков монотонности) $x = s(t+1)$, тогда

$$\Gamma(s+1) = \int\limits_{-1}^{\infty} s^s(t+1)^s e^{-s}e^{-st}sdt = s^{s+1}e^{-s}\int\limits_{-1}^{\infty} e^{-st+s\ln(1+t)}dt.$$

Теперь сделаем замену переменной

$$-st + s\ln(1+t) = -\frac{su^2}{2},$$

где $t$ и $u$ всегда одинакового знака. Тогда в формуле для $\Gamma(s+1)$ последний интеграл превратится в $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{su^2}{2}}\frac{dt}{du}du$. Оценим производную $\frac{dt}{du}$. Дифференцируя по $u$ равенство $t - \ln t = \frac{u^2}{2}$ получим $t' - \frac{t'}{1+t} = u$, откуда $t' = u\left(\frac{1+t}{t}\right) = u\left(\frac{1}{t}+1\right)$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа $t - \ln(1+t) = \frac{1}{(1+\theta t)^2}\cdot\frac{t^2}{2} = \frac{u^2}{2}$, где $0<\theta<1$, откуда, учитывая, что $u$ и $t$ одного знака и $t>-1$, получаем, что $\frac{t}{1+\theta t} = u$ или $1 = u\frac{1+\theta t}{t}$. Значит, $\frac{u}{t} = 1-\theta u$ и $t' = 1+(1-\theta)u$ (где $\theta$ — функция от $u$), $0<\theta<1$. Отсюда получаем $\Gamma(s+1) = s^{s+1}e^{-s}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{su^2}{2}}(1+(1-\theta)u)du$, где $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{su^2}{2}}du = \sqrt{\frac{2}{s}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s}}\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{s}}$, а $\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{su^2}{2}}(1-\theta)udu\right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{su^2}{2}}|u|\,du = 2\int\limits_0^\infty e^{-\frac{su^2}{2}}u\,du = \frac{2}{s}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{su^2}{2}}\,d\frac{su^2}{2} = \frac{2}{s}\int\limits_0^\infty e^{-t}dt = \frac{2}{s}$ и, значит,

$$\Gamma(s+1) = s^{s+1}e^{-s}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{s}}+\frac{2v}{s}\right),\ \text{где } -1 \leqslant v \leqslant 1,$$

то есть
$$\Gamma(s+1)=\sqrt{2\pi s}\cdot s^s e^{-s}\left(1+\frac{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}v}{\sqrt{s}}\right),\ -1\leqslant v\leqslant 1.$$
Положим $\omega=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}v$. Формула доказана. ▲

## **Лекция 18** (02.11.20)
## Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства

**Определение 1**. **Пространство со скалярным произведением** (**предгильбертово пространство**) — это пара $(L,(\cdot,\cdot))$, где $L$ — линейное пространство над полем комплексных $\mathbb{C}$ или действительных $\mathbb{R}$ чисел, а $(\cdot,\cdot)$ — **скалярное произведение**, функция пары элементов $L$, отображающая $L\times L$ в $\mathbb{C}$ или в $\mathbb{R}$ соответственно и обладающая следующими свойствами:

1) $\forall x\in L\ \ (x,x)\geqslant 0$ и равенство $(x,x)=0$ эквивалентно равенству $x=0$;
2) $\forall\lambda\in\mathbb{C}\ (\in\mathbb{R})\ (\lambda x,y)=\lambda(x,y)$;
3) $\forall x,x',y\in L\ \ (x+x',y)=(x,y)+(x',y)$;
4) $\forall x,y\in L\ \ (x,y)=\overline{(y,x)}$

где черта — знак комплексного сопряжения.

В действительном случае последнее условие означает, что $(x,y)=(y,x)$.

Из 2) и 4) следует, что всегда $(x,\lambda y)=\overline{\lambda}(x,y)$, а из 3) и 4) следует, что всегда $(x,y+y')=(x,y)+(x,y')$.

**Теорема 1** (неравенство Коши–Буняковского). *Для любых $x,y\in L$*
$$|(x,y)|\leqslant\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)},$$
*причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x$ и $y$ линейно зависимы.*

▼ Если $(x,x)=0$, то по свойству 1) $x=0$ и $(x,y)=(x+x,y)=2(x,y)$, откуда $(x,y)=0$, неравенство превращается в равенство, $x$ и $y$ линейно зависимы, $x=0\cdot y$. Если $(x,x)\neq 0$, то для $\alpha\in\mathbb{R}$ имеем
$$(\alpha x+(x,y)y,\alpha x+(x,y)y)=(x,x)\alpha^2+2(x,y)\overline{(x,y)}\alpha+(x,y)\overline{(x,y)}(y,y)\geqslant 0$$
и, рассматривая это выражение как квадратный трехчлен относительно $\alpha$ с действительными коэффициентами, видим, что он неотрицателен и, значит, его дискриминант $D=4(x,y)^2\overline{(x,y)}^2-4(x,x)(x,y)\overline{(x,y)}(y,y)\leqslant 0$, т.е. $(x,y)^2\overline{(x,y)}^2\leqslant(x,y)\overline{(x,y)}(x,x)(y,y)$. Если $(x,y)=0$, то неравенство выполняется, причем в случае равенства или $x=0$ или $y=0$ и, значит, $x$ и $y$ линейно зависимы. Если $(x,y)\neq 0$, то $|(x,y)|^2=(x,y)\overline{(x,y)}\leqslant(x,x)(y,y)$ или $|(x,y)|\leqslant\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}$, причем если имеет место равенство, то дискриминант $D=0$ и, значит, существует такое действительное $\alpha$, что $(\alpha x+(x,y)y,\alpha x+(x,y)y)=0$, т.е. $\alpha x+(x,y)y=0$, $x$ и $y$ линейно зависимы. Легко проверить последнее, что если $x$ и $y$ линейно зависимы, то неравенство Коши–Буняковского превращается в равенство. ▲

**Следствие**. *Величина $\sqrt{(x,x)}$ является нормой в $L$ и в дальнейшем обозначается $\|x\|$.*

Действительно, непосредственно видно выполнение всех свойств нормы, кроме неравенства треугольника. Убедимся в выполнении и этого неравенства. Неравенство треугольника

$$\|x+y\| = \sqrt{(x+y,x+y)} \leqslant \|x\| + \|y\| = \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}$$

эквивалентно следующему неравенству

$$\|x+y\|^2 = (x,x)+(x,y)+\overline{(x,y)}+(y,y) \leqslant (\|x\|+\|y\|)^2 = (x,x)+2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}+(y,y),$$

которое верно в вилу неравенства Коши–Буняковского $|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)}$.

Пространство $(L, \|\cdot\|)$ с введенной нормой $\|\cdot\|$ — нормированное, а значит, и метрическое пространство с метрикой $\rho(x,y) = \|x-y\|$.

**Определение 2**. Если $(L, \|\cdot\|)$ с введенной нормой $\|\cdot\|$ — банахово пространство (полное нрмированное пространство), то говорят, что пара $(L, (\cdot,\cdot))$ — **полное** пространство со скалярным произведением или **гильбертово** пространство.

Далее будем обычно использовать термины **предгильбертово** и **гильбертово** пространство.

Иногда используя эти термины подразумевают, что $L$ — бесконечномерное пространство, а за конечномерным случаем сохраняют термин "эвклидово", если поле чисел $\mathbb{R}$, и "эрмитово", если поле чисел $\mathbb{C}$. Но мы такую детализацию не используем.

**Определение 3**. Вектора $x$ и $y$ предгильбертова пространства **ортогональны**, если $(x,y) = 0$.

**Определение 4**. Система векторов $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ предгильбертова пространства называется **ортогональной**, если $\forall\lambda \in \Lambda \;\; e_\lambda \neq 0$ и $\forall\alpha,\beta \in \Lambda \;\; (e_\alpha, e_\beta) = 0$.

**Определение 5**. Система векторов $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ предгильбертова пространства называется **нормированной**, если $\forall\lambda \in \Lambda \;\; \|e_\lambda\| = 1$.

**Определение 6**. Система векторов $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ предгильбертова пространства называется **ортонормированной**, если это ортогональная и нормированная система.

**Определение 7**. Пусть $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — ортогональная система в предгильбертовом пространстве. Для любого вектора $x \in L$ назовем числа

$$\widehat{x}(\lambda) = \widehat{x}_\lambda = \frac{(x,e_\lambda)}{(e_\lambda,e_\lambda)} = \frac{(x,e_\lambda)}{\|e_\lambda\|^2}$$

**коэффициентами Фурье** вектора $x$ по (относительно) ортогональной системы $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.

**Теорема 2** (об экстремальном свойстве). *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ — конечная ортогональная система в предгильбертовом пространстве. Тогда для любого $x \in L$ и любых чисел $\alpha_k$ (из поля, над которым $L$ — линейное пространство), $k = 1, \ldots, n$,*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\| \geqslant \left\| x - \sum_{k=1}^n \widehat{x}_k e_k \right\|,$$

*причем равенство достигается только в случае $\alpha_k = \widehat{x}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Это означает, что наилучшее приближение $x$ линейной комбинацией векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ получается, если брать линейную комбинацию с коэффициентами Фурье. При этом имеет место* ***тождество Бесселя***

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \widehat{x}_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\widehat{x}_k|^2 \, \|e^k\|^2.$$

▼ $\left\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|^2 = \left(x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k,\ x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \|x\|^2 - \left(x,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k,\ x\right) + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k,\ \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = \|x\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{\alpha}_k \widehat{x}_k \|e_k\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\widehat{x}}_k \|e_k\|^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha}_k \|e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{x}_k \overline{\widehat{x}}_k \|e_k\|^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k - \widehat{x}_k)(\overline{\alpha}_k - \overline{\widehat{x}}_k) \|e_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} |\widehat{x}_k|^2 \|e_k\|^2 + \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k - \widehat{x}_k|^2 \|e_k\|^2$. Так как $\|e_k\| \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$, то последнее выражение достигает своего минимума только при $\alpha_k = \widehat{x}_k$, $k = 1, \ldots, n$; при этом получаем тождество Бесселя

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} \widehat{x}_k e_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}_k|^2 \, \|e^k\|^2.$$

Теорема доказана. ▲

**Следствие 1** (неравенство Бесселя). *Если $\{e_k\}_{k=1}^n$ — конечная ортогональная система, то выполняется* **неравенство Бесселя**

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{k=1}^{n} |\widehat{x}_k|^2 \|e_k\|^2.$$

Неравенство следует из оценки $0 \leqslant \left\|x - \sum_{k=1}^n \widehat{x}_k e_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |\widehat{x}_k|^2 \|e_k\|^2$.

**Следствие 2**. *Если $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — ортогональная система, то для любого $x \in L$ и любого $\varepsilon > 0$ лишь конечное число коэффициентов Фурье удовлетворяют оценке $|\widehat{x}_\lambda| \cdot \|e_\lambda\| \geqslant \varepsilon$.*

Из неравенства Бесселя следует, что таких коэффициентов Фурье не более $\|x\|^2/\varepsilon^2$.

**Следствие 3**. *Если $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — ортогональная система, то любой вектор $x \in L$ имеет не более чем счетное множество коэффициентов Фурье $\widehat{x}_\lambda \neq 0$.*

Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ лишь конечное число коэффициентов Фурье удовлетворяют оценке $|\widehat{x}_\lambda| \cdot \|e_\lambda\| \geqslant \frac{1}{n}$.

**Следствие 4**. *Если $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — ортогональная система, то для любого вектора $x \in L$ верна оценка*

$$\sum_{\lambda :\, \widehat{x}_\lambda \neq 0} |\widehat{x}_\lambda|^2 \|e_\lambda\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Из следствий 3 и 1 предельным переходом получаем следствие 4.

**Определение 1**. Пусть $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — ортогональная система в предгильбертовом пространстве, а $x$ — элемент этого пространства. Тогда ряд (сумма) $\sum\limits_{\lambda} \widehat{x}_\lambda e_\lambda$ (конечный или бесконечный) называется **рядом Фурье** элемента $x$ по системе $\{e_k\}_{\lambda \in \Lambda}$ (сумма рассматривается по такому счетному набору $\lambda_k$, что $\widehat{x}_{\lambda_k} \neq 0$).

## **Лекция 19** (06.11.20)
## **Ряды Фурье**

Напомним, что если дано пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, то по нему можно построить норму по формуле $||x|| = \sqrt{(x, x)}$. Возникает вопрос: если дано нормированное пространство, то можно ли ввести на пространстве такое скалярное произведение, что будет выполнена та же самая формула? В общем случае ответ нет: не всегда норма может быть задана с помощью скалярного произведения.

Заметим, что есть способ определить, является ли конкретное нормированное пространство на самом деле пространством со скалярным произведением, которое и породило норму. Надо проверить, выполняется ли для всех $x$ и $y$ тождество параллелограмма $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2+2\|y\|^2$. Нетрудно проверить, что в пространстве со скалярным произведением оно выполняется. Чуть сложнее доказать, что если тождество выполняется, то можно задать скалярное произведение в случае поля $\mathbb{R}$ как (в случае поля $\mathbb{C}$ скалярное произведение задаётся более сложной формулой)

$$(x, y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \text{ или как } (x, y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}.$$

(в случае поля $\mathbb{C}$ скалярное произведение задаётся более сложной формулой)

**Теорема 1**. *Если $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — ортогональная система в предгильбертовом пространстве, то для любого вектора $x \in L$ следующие утверждения эквивалентны.*

*1. $\forall\varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N}\ \ \exists\lambda_k \in \Lambda$, $k = 1,\dots,K$, $\exists$ числа $\alpha_k$, $k = 1,\dots,K$, что $\left\|x - \sum\limits_{k=1}^{K} \alpha_k e_{\lambda_k}\right\| < \varepsilon$ (т.е. $x$ — точка соприкосновения линейной оболочки системы $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$.*

*2. Если $\{\lambda_k\}$ — последовательность индексов, содержащая без повторений все индексы $\lambda$ с $\widehat{x}_\lambda \neq 0$, то $x = \sum\limits_k \widehat{x}_{\lambda_k} e_{\lambda_k}$.*

*3. Если $\{\lambda_k\}$ — последовательность индексов, содержащая без повторений все индексы $\lambda$ с $\widehat{x}_\lambda \neq 0$, то выполняется равенство Парсеваля $\|x\|^2 = \sum\limits_k |\widehat{x}_{\lambda_k}|^2\|e_{\lambda_k}\|^2$.*

▼ $1 \Rightarrow 2$ Если $\left\|x - \sum\limits_{k=1}^{K} \alpha_k e_{\gamma_k}\right\| < \varepsilon$, то по теореме 2 и $\left\|x - \sum\limits_{k=1}^{K} \widehat{x}_{\gamma_k} e_{\gamma_k}\right\| < \varepsilon$. Если индексы $\gamma_k$ с $\widehat{x}_{\gamma_k} \neq 0$, $k \leqslant K$, входят в систему $\{\lambda_m\}_{m=1}^{M}$, то согласно той же теореме $\left\|x - \sum\limits_{m=1}^{M} \widehat{x}_{\lambda_m} e_{\lambda_m}\right\| \leqslant \left\|x - \sum\limits_{k=1}^{K} \widehat{x}_{\gamma_k} e_{\gamma_k}\right\| < \varepsilon$, а так как последовательность $\{\lambda_k\}$ содержит без повторений все индексы $\lambda$ с $\widehat{x}_\lambda \neq 0$, то найдется такое $N$, что для $n > N$ верна оценка $\left\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{x}_{\lambda_k} e_{\lambda_k}\right\| < \varepsilon$. Значит, $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widehat{x}_{\lambda_k} e_{\lambda_k}$.

$2 \Rightarrow 3$ По тождеству Бесселя $\|x\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} |\widehat{x}_{\lambda_k}|^2\|e_{\lambda_k}\|^2 = \left\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{x}_{\lambda_k} e_{\lambda_k}\right\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Значит, $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_{\lambda_k}|^2\|e_{\lambda_k}\|^2$.

$3 \Rightarrow 1$ Если $\|x\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_{\lambda_k}|^2\|e_{\lambda_k}\|^2$, то, используя тождество Бесселя, имеем $\left\|x - \sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{x}_{\lambda_k} e_{\lambda_k}\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} |\widehat{x}_{\lambda_k}|^2\|e_{\lambda_k}\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Значит, 1 верно и теорема доказана. ▲

**Лемма 1**. *Пусть $\{e_k\}$ — конечная или счетная ортогональная система в предгильбертовом пространстве, $c_k$ — числовая последовательность. Если ряд $\sum\limits_k c_k e_k$ сходится и $y$ — его сумма, то $c_k = \widehat{y}_k$, а если элемент $z$ ортогонален всем $e_k$, то $(y, z) = 0$.*

▼ В силу ортогональности

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, z\right) = \begin{cases} c_k\|e_k\|^2, & \text{если } z = e_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\\ 0, & \text{если } z \text{ ортогонально всем } e_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

Из равенства $y = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k + o(1)$, где $o(1) \to 0$ при $n \to \infty$ и того, что для любого $z \in L$ $(o(1), z) \to 0$ (ведь в силу неравенства Коши–Буняковского $|(o(1), z)| \leqslant \|z\| \cdot \|o(1)| \to 0$ при $n \to \infty$) следует, что $(y, z) = (S_n, z) + (o(1), z) = (S_n, z) + o(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k, z\right)$.

Отсюда

$$(y, z) = \begin{cases} c_k\|e_k\|^2, & \text{если } z = e_k,\ k \in \mathbb{N},\\ 0, & \text{если } z \text{ ортогонально всем } e_k,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Значит, утверждение теоремы верно. ▲

**Лемма 2**. *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — счетная ортогональная система в гильбертовом пространстве. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2$.*

▼ Так как пространство полно, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N\ \ \forall n, m > N$: $\left\|\sum\limits_{k=m}^{n} c_k e_k\right\| < \varepsilon$ или, эквивалентно, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N : \ \left\|\sum_{k=m}^{n} c_k e_k\right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} |c_k|^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2$ сходится тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N : \ \sum_{k=m}^{n} |c_k|^2 \|e_k\|^2 < \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то формулировки с $\varepsilon^2$ и с $\varepsilon$ эквивалентны. ▲

**Следствие**. *В гильбертовом пространстве ряд Фурье $\sum\limits_{k} \widehat{x}_{\lambda_k} e_{\lambda_k}$ любого элемента $x$ всегда сходится к некоторому элементу, называемому* ***суммой ряда Фурье*** *элемента $x$ (и необязательно равному $x$).*

▼ В силу неравенства Бесселя сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_{\lambda_k}|^2 \|e_{\lambda_k}\|^2$, а в силу леммы 2 — частичные суммы ряда $\sum\limits_{k} \widehat{x}_{\lambda_k} e_{\lambda_k}$ являются фундаментальной последовательностью, которая в силу полноты сходится. ▲

Отметим, что без условия полноты ряд Фурье элемента $x$ может не сходиться к элементу рассматриваемого пространства.

**Теорема 2**. *Пусть $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — ортогональная система в предгильбертовом пространстве. Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны.*

*1. (замкнутость системы). Для любого* $x \in L \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{N} \quad \exists \lambda_k \in \Lambda$, $k = 1, \ldots, K$, $\exists$ *числа* $\alpha_k$, $k = 1, \ldots, K$, *что* $\left\| x - \sum\limits_{k=1}^{K} \alpha_k e_{\lambda_k} \right\| < \varepsilon$ *(т.е. линейная оболочка системы всюду плотна в* $L$*).*

*2. Любой элемент* $x \in L$ *равен сумме своего ряда Фурье, т.е.* $x = \sum\limits_k \widehat{x}_{\lambda_k} e_{\lambda_k}$.

*3. (равенство Парсеваля). Для любого элемента* $x \in L \quad \|x\|^2 = \sum\limits_k |\widehat{x}_{\lambda_k}|^2 \|e_{\lambda_k}\|^2$.

*4. (равенство Парсеваля). Для любых элементов* $x, y \in L \;\; (x, y) = \sum\limits_k \widehat{x}_{\lambda_k} \overline{\widehat{y}_{\lambda_k}} \|e_{\lambda_k}\|^2$.

*Из утверждений 1-4 следует утверждение 5.*

*5. (полнота системы). Если для всех* $\lambda$ *верно равенство* $(x, e_\lambda) = 0$*, то* $x = 0$ *(т.е. единственный вектор, ортогональный всем элементам системы, это 0).*

*В гильбертовом пространстве из утверждения 5 следуют утверждения 1-4.*

▼ Из теоремы 1 следует эквивалентность 1-3. Покажем, что 2 влечет 4. Из 2 $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{x}_{\lambda_k} e_{\lambda_k} + o(1)$, где $o(1) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда имеем $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{x}_{\lambda_k} (e_{\lambda_k}, y) + (o(1), y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \widehat{x}_{\lambda_k} \overline{\widehat{y}_{\lambda_k}} + o(1)$, т.е. $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \widehat{x}_{\lambda_k} \overline{\widehat{y}_{\lambda_k}}$. Поскольку нулевые члены в ряде можно опустить, то 4 верно. Очевидно, что 4 влечет 3, если взять $y = x$.

Теперь покажем, что 2 влечет 5. Если для всех $\lambda$ имеем $(x, e_\lambda) = 0$, то все коэффициенты Фурье $\widehat{x}_\lambda = 0$ и по 2 $x = 0$.

В гильбертовом пространстве 5 влечет 1-4. Возьмем $x \in L$ и покажем, что он равен своему ряду Фурье. Действительно, по лемме 2 существует $y = \sum\limits_k \widehat{x}_{\lambda_k} e_{\lambda_k}$, а по лемме 1 $\widehat{y}_\lambda = \widehat{x}_\lambda$ для всех $\lambda$. Значит, $\widehat{(x - y)}_\lambda = \widehat{x}_\lambda - \widehat{y}_\lambda = 0$ для всех $\lambda$. Согласно п. 5 $x - y = 0$, т.е. $x = y = \sum\limits_k \widehat{x}_{\lambda_k} e_{\lambda_k}$. Доказано 2, а следовательно, 1-4. Теорема доказана. ▲

## Примеры гильбертовых и предгильбертовых пространств.

Примерами конечномерных гильбертовых пространств над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ являются пространства $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$. Аналогично можно построить конечномерные гильбертовы пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ — пространства $\mathbb{C}^n$ со скалярным произведением $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$. Приведём пример бесконечномерного гильбертова пространства.

### Пространство $l^2$

**Определение 2**. **Пространством** $l^2$ (обозначается также $l_2$) называется множество последовательностей действительных (или комплексных) чисел $\boldsymbol{a} = \{a_k\}$ удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ с операциями почленного умножения на действительные (или комплексные) числа, почленного сложения последовательностей и со скалярным произведением

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \quad \left( (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k} \right).$$

Корректность определения следует из того, что если $\boldsymbol{a} \in l^2$, то для любого числа $\alpha$ также $\alpha\boldsymbol{a} \in l^2$; если $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in l^2$, то из неравенства $|a_k + b_k|^2 \leqslant 2(|a_k|^2 + |b_k|^2)$ следует, что $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in l^2$, а из неравенства $|a_k b_k| \leqslant |a_k|^2 + |b_k|^2$ следует, что ряд $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}$ сходится абсолютно. Докажем полноту пространства $l^2$.

Пусть $\boldsymbol{a}^n$ последовательность Коши в $l^2$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N$: $\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}^m\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k^m|^2} < \varepsilon$. Из последнего неравенства следует, что при каждом фиксированном $k$ числовая последовательность $a_k^n$ является последовательностью Коши и, значит, сходится, пусть $a_k = \lim\limits_{n\to\infty} a_k^n$. Покажем, что последовательность $\boldsymbol{a} = \{a_k\}$ принадлежит пространству $l^2$ и является в нем пределом $\boldsymbol{a}^n$. Из последнего неравенства следует, что $\forall n, m > N \;\; \forall K \in \mathbb{N}$: $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{K} |a_k^n - a_k^m|^2} < \varepsilon$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ получаем, что $\forall n > N \;\; \forall K \in \mathbb{N}$: $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{K} |a_k^n - a_k|^2} \leqslant \varepsilon$. Переходя к пределу при $K \to \infty$ получаем, что $\forall n > N$: $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2} \leqslant \varepsilon$. Для $n > N \quad (\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}) \in l^2$, значит, и $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}^n - (\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a})) \in l^2$. При $\forall n > N$: $\|\boldsymbol{a}^n - \boldsymbol{a}\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^2} \leqslant \varepsilon$. Значит, $\boldsymbol{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a}^n$. Полнота пространства $l^2$ доказана.

**Замечание**. В случае счетной ортонормированной системы $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в предгильбертовом пространстве $H$ отображение, сопоставляющее элементу $x \in H$ её последовательность коэффициентов Фурье $\{\widehat{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — это отображение из $H$ в $l^2$ (в силу неравенства Бесселя ряд будет сходиться, в силу него же это будет сжимающее отображение), которое в случае замкнутости системы будет, в силу равенства Парсеваля, изометрией (т.е. отображением, которое сохраняет скалярное произведение (а следовательно, и норму, и метрику)) на подпространство в $l^2$.

## **Лекция 20** (09.11.20)
## Пространства функций. Свёртка и её свойства

### Пространства функций

Примером бесконечномерного предгильбертова пространства является пространство $C[a,b]$ непрерывных на отрезке $[a,b]$ действительнозначных (или комплекснозначных) функций со скалярным произведением

$$(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad \left(\text{или } (f,g) = \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx\right).$$

(существование интеграла следует из критерия интегрируемости Лебега)

Это неполное пространство, нетрудно привести в нём пример последовательности Коши, которая не имеен предела в $C[a,b]$.

Можно в качестве другого примера бесконечномерного предгильбертова пространства рассмотреть $R[a,b]$ — пространство интегрируемых по Риману на отрезке $[a,b]$ действительнозначных (или комплекснозначных) функций с тем же скалярным произведением. Но при этом необходимо считать равными (отождествить) те интегрируемые функции, интеграл от модуля разности которых равен нулю. Это пространство также неполно. Полнота появится при использовании более широкого интеграла Лебега (или Курцвейля-Хенстока). Чтобы подчеркнуть, что в этом пространстве рассматривается скалярное произведение, пишут $R^2[a,b]$.

Свойства 2), 3) скалярного произведения очевидны из свойств интегралов, 1) следует из отождествления функций. Свойство 4) легко проверяется: $(f,g) = \int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = \overline{\int\limits_a^b \overline{f(x)}g(x)dx} = \overline{(g,f)}$.

Ещё одним примером будет следующее пространство:

$R^2(\mathbb{R})$ — пространство таких функций $f$, определенных на $\mathbb{R}$, интегрируемых на каждом отрезке в собственном смысле, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2dx$ сходится, причем у интеграла нет особенностей, кроме $\pm\infty$.

Скалярное произведение задается такой же формулой, что и для случая $R^2[a,b]$:

$$(f,g) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx \quad \left(\text{или } (f,g) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx\right).$$

Но существование интеграла уже не следует из критерия Лебега, для этого используется неравенство $|f(x)\overline{g(x)}| = |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$.

Линейность (свойство 2) ) также приходится проверять: она следует из неравенства $|f(x) \pm g(x)|^2 \leq (2|f(x)|^2 + |g(x)^2|)$. Это пространство также не полно.

Прежде чем перейти к изучению конкретных ортогональных систем, рассмотрим еще одну полезную операцию над функциями.

**Определение 1**. **Сверткой** двух комплекснозначных функций на $\mathbb{R}$ $u(x)$ и $v(x)$ называется функция

$$u * v(x) = (u * v)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x-t)v(t)\,dt,$$

определенная в тех точках, где несобственный (с особенностями в $-\infty$ и в $\infty$) интеграл существует.

**Определение 2**. **Сверткой** двух $T$-периодических комплекснозначных функций на $\mathbb{R}$ (или двух функций на $[0,T)$) $u(x)$ и $v(x)$ называется функция

$$u * v(x) = (u * v)(x) = \int\limits_{0}^{T} u(x-t)v(t)\,dt$$

(где в случае функций на полуотрезке $[0,T)$ вычитание $x-t$ производится по модулю $T$), определенная в тех точках, где интеграл существует.

Условия существования свертки всюду

**Утверждение 1**. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ лежат в $R^2(\mathbb{R})$, то их свертка существует всюду на $\mathbb{R}$.*

**Утверждение 2**. *Если одна из функций $u(x)$ и $v(x)$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, а другая интегрируема по Риману на любом отрезке и ограничена, то их свертка существует всюду на $\mathbb{R}$.*

**Утверждение 3**. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ определены на $\mathbb{R}$ и одна из них финитна (т.е. обращается в ноль вне некоторого отрезка), обе интегрируемы по Риману на любом отрезке, то их свертка существует всюду на $\mathbb{R}$.*

Это очевидные утверждения.

Для периодического случая часто бывает полезна следующая лемма.

**Лемма 1**. *Если функция $f$ на $\mathbb{R}$ $T$-периодична и интегрируема на отрезке $[0, T]$, то интегралы по любым отрезкам длины $T$ от нее одновременно не существуют или существуют и равны.*

▼ Пусть $f$ интегрируема на $[A, A+T]$, покажем, что $f$ интегрируема на любом отрезке $[B, B+T]$ и эти интегралы равны. Найдем такое $n \in \mathbb{Z}$, что $A+nt \in [B, B+T]$. Тогда

$$\int\limits_{A}^{A+T} f\,dt = \int\limits_{A+(n-1)T}^{A+nT} f\,dt = \left(\int\limits_{A+(n-1)T}^{B} + \int\limits_{B}^{A+nT}\right) f\,dt = \left(\int\limits_{B}^{A+nT} + \int\limits_{A+nT}^{B+T}\right) f\,dt = \int\limits_{B}^{B+T} f\,dt.▲$$

Из этой леммы следует следующее утверждение.

**Утверждение 4**. *Если $T$-периодические функции $u(x)$ и $v(x)$ интегрируемы по Риману на периоде (на $[0, T]$), то их свертка существует всюду на $\mathbb{R}$ и $T$-периодична.*

## Свойства свертки

1 (симметричность или коммутативность). Если в точке $x$ существует $u * v(x)$, то существует $v * u(x)$ и они равны.

Действительно, делая замену переменной $s = x - t$ (симметрия и сдвиг), получаем равенство

$$u * v(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x-t)v(t)\,dt = \lim_{A\to-\infty, B\to\infty} \int\limits_{A}^{B} u(x-t)v(t)\,dt =$$

$$\lim_{A\to-\infty, B\to\infty} \int\limits_{x-B}^{x-A} u(s)v(x-s)\,ds = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(s)v(x-s)\,ds = v * u(x).$$

Аналогично для $T$-периодического случая

$$u * v(x) = \int\limits_{0}^{T} u(x-t)v(t)\,dt = \int\limits_{x-T}^{x} u(s)v(x-s)\,ds = \int\limits_{0}^{T} u(s)v(x-s)\,ds = v * u(x).$$

2 (сохранение сдвигов). Если $u_h(x) = u(x-h)$, то $u*v(x-h)$ и $u_h*v(x)$ одновременно не существуют или существуют и равны.

Действительно,

$$u * v(x-h) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x-h-t)v(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_h(x-t)v(t)\,dt = u_h * v(x).$$

Аналогично для $T$-периодического случая

$$u * v(x-h) = \int\limits_{0}^{T} u(x-h-t)v(t)\,dt = \int\limits_{0}^{T} u_h(x-t)v(t)\,dt = u_h * v(x).$$

Аппроксимативная единица

**Определение 4**. Под **аппроксимативной единицей** или **$\delta$-образной последовательностью** понимается в случае на $\mathbb{R}$ такая последовательность $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ абсолютно интегрируемых несобственным интегралом функций на $\mathbb{R}$, что

1) $\sup\limits_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} |K_n(x)|\,dx < \infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(x)\,dx = 1$;

3) $\forall\delta > 0\ \lim\limits_{n\to\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty}\right) |K_n(x)|\,dx = 0$.

В $T$-периодическом случае это такая последовательность $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ интегрируемых на $[0,T]$ (на периоде) функций, что

1) $\sup\limits_n \int\limits_{0}^{T} |K_n(x)|\,dx < \infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{T} K_n(x)\,dx = 1$;

3) $\forall\delta \in (0, \frac{T}{2})\ \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\delta}^{T-\delta} |K_n(x)|\,dx = 0$.

**Теорема 1**. *Пусть $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ — аппроксимативная единица на $\mathbb{R}$ (на $\mathbb{T} = [0,T)$ в $T$-периодическом случае). Тогда для любой интегриримой на всех отрезках ограниченной функции на $\mathbb{R}$ ($T$-периодической) верны утверждения:*

*1. если $x$ — точка непрерывности $f$, то*

$$f * K_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x);$$

*2. если $f$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ (непрерывна на $[0,T]$), то*

$$f * K_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} f(x);$$

*3. если $K_n$ непрерывны всюду, а производные $f^{(k)}$, $k = 1,\dots,m$, существуют, ограничены и непрерывны всюду, то*

$$\left(f * K_n\right)^{(m)}(x) = f^{(m)} * K_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f^{(m)}(x),$$

*причем если $f^{(m)}$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$ (что заведомо выполняется в периодическом случае), то*

$$(f * K_n)^{(m)}(x) = f^{(m)} * K_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} f^{(m)}(x).$$

▼ Начнем с пункта 1, непериодический случай. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta > 0$, что если $|x - t| < \delta$, то $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$. Так как

$$f * K_n(x) - f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)K_n(t)\,dt - f(x) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - f(x))\,K_n(t)\,dt +$$

$$+\left(\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty}\right)(f(x-t) - f(x))\,K_n(t)\,dt + f(x)\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\,dt - 1\right),$$

где

$$\left|\int\limits_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - f(x))\,K_n(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon\cdot\sup_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} |K_n(t)|\,dt,$$

$$\left|\left(\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty}\right)(f(x-t) - f(x))\,K_n(t)\,dt\right| \leqslant 2\sup_{\mathbb{R}}|f|\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty}\right)|K_n(t)|\,dt \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} 0,$$

$$\left|f(x)\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\,dt - 1\right)\right| \leqslant \sup_{\mathbb{R}}|f|\cdot\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_n(t)\,dt - 1\right| \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} 0,$$

то $f * K_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Заметим, что если $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$: $|x - t| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon$, то оценка интеграла $\int\limits_{-\delta}^{\delta}(f(x-t) - f(x))\,K_n(t)\,dt$ не зависит от $x$. Так как два других интеграла равномерно (по $x$) стремятся к нулю, то, значит, в этом случае то $f * K_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} f(x)$. Тем самым доказан пункт 2, непериодический случай.

Перейдем к периодическому случаю. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое $\delta \in (0, \frac{T}{2})$, что если $|x - t| < \delta$, то $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$. Так как

$$f * K_n(x) - f(x) = \int\limits_{0}^{T} f(x-t)K_n(t)\,dt - f(x) = \int\limits_{-\delta}^{\delta} (f(x-t) - f(x))\,K_n(t)\,dt +$$

$$\int\limits_{\delta}^{T-\delta} (f(x-t) - f(x))\,K_n(t)\,dt + f(x)\cdot\left(\int\limits_{0}^{T} K_n(t)\,dt - 1\right),$$

где

$$\left|\int\limits_{-\delta}^{\delta}(f(x-t)-f(x))\,K_n(t)\,dt\right|\leqslant\varepsilon\cdot\sup_n\int\limits_0^T|K_n(t)|\;dt,$$

$$\left|\int\limits_{\delta}^{T-\delta}(f(x-t)-f(x))\,K_n(t)\,dt\right|\leqslant 2\sup_{\mathbb{R}}|f|\cdot\int\limits_{\delta}^{T-\delta}|K_n(t)|\;dt\underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}}0,$$

$$\left|f(x)\cdot\left(\int\limits_0^T K_n(t)\,dt-1\right)\right|\leqslant\sup_{\mathbb{R}}|f|\cdot\left|\int\limits_0^T K_n(t)\,dt-1\right|\underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}}0,$$

то $f*K_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)$.

Заметим, что если $f$ непрерывна на $[0,T]$, то $f$ равномерно непрерывна на $[0,T]$, а в силу $T$-периодичности и на $\mathbb{R}$. Поэтому $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$: $|x-t|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(t)|<\varepsilon$, значит, оценка интеграла $\int\limits_{-\delta}^{\delta}(f(x-t)-f(x))\,K_n(t)\,dt$ не зависит от $x$. Так как два других интеграла равномерно стремятся к нулю, то, значит, в этом случае то $f*K_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}}f(x)$. Тем самым доказан пункт 2, периодический случай.

## **Лекция 21** (13.11.20) **Аппроксимативные единицы. Примеры. Теоремы Вейерштрасса.**

Перейдем к пункту 3. Рассматривая

$$f*K_n(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x-t)K_n(t)\,dt\quad\left(=\int\limits_0^T f(x-t)K_n(t)\,dt\right)\qquad(*)$$

(последнее — в периодическом случае) как интеграл с параметром $x$, видим, что подынтегральная функция двух переменных непрерывна и имеет непрерывную частную производную по $x$ вида $f'(x-t)K_n(t)$. Для периодического случая отсюда следует, что собственный интеграл с параметром (*) можно дифференцировать по параметру и производная будет равна интегралу $\int\limits_0^T f'(x-t)K_n(t)\,dt$. В непереодическом случае интеграл (*) сходится, а интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f'(x-t)K_n(t)\,dt$ сходится равномерно по $x$ на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса в силу оценки $|f'(x-t)K_n(t)|\leqslant\sup\limits_{\mathbb{R}}|f'|\cdot|K_n(t)|$. Значит,

$$(f*K_n)'(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f'(x-t)K_n(t)\,dt=f'*K_n(x)$$

$$\left((f*K_n)'(x)=\int\limits_0^T f'(x-t)K_n(t)\,dt=f'*K_n(x)\right).$$

Повторяя это рассуждение необходимое число раз получим, что

$$(f * K_n)^{(m)}(x) = f^{(m)} * K_n(x).$$

После этого равенства утверждения пункта 3 сразу следуют из доказанных утверждений пунктов 1 и 2. Теорема доказана. ▲

Примеры аппроксимативных единиц на $\mathbb{R}$

$$1.\ K_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{при } |t| \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

$$2.\ K_n(t) = \begin{cases} n - n^2|t| & \text{при } |t| \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

$$3.\ K_n(t) = \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt} & \text{при } |t| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |t| > 1. \end{cases}$$

Тут в проверке нуждается только пункт 3) из определения аппроксимативной единицы.

$$\int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt = 2\int\limits_{0}^{1} (1-t^2)^n dt \geqslant 2\int\limits_{0}^{1} (1-t)^n dt = \frac{2}{(n+1)};$$

$$\text{при } 0 < \delta \leqslant 1 \quad \left( \int\limits_{-1}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{1} \right) (1-t^2)^n dt \leqslant 2(1-\delta^2)^n = 2q^n,$$

где $0 \leqslant q = 1-\delta^2 < 1$. Так как $\frac{2q^n}{\frac{2}{n+1}} = q^n(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\left( \int\limits_{-\infty}^{-\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty} \right) |K_n(t)|\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, пункт 3) верен.

4. $K_n(t) = n\varphi(nt)$ или $K_n(t) = \alpha_n \varphi(\alpha_n t)$, где $\varphi$ — абсолютно интегрируемая в несобственном смысле по функция на $\mathbb{R}$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi\, dt = 1$, а $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, образуют аппроксимативную единицу. Можно заметить, что примеры 1 и 2 именно такого вида.

Примеры аппроксимативных единиц в периодическом случае

5-6. Аппроксимативные единицы примеров 1 и 2 продолженные $T$-периодически с $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ являются аппроксимативными единицами в $T$-периодическом случае.

7. Функции

$$K_n(t) = \frac{(1+\cos t)^n}{\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos t)^n dt} = \frac{2^n \cos^{2n}\frac{t}{2}}{2^n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\frac{t}{2} dt}$$

для $T = 2\pi$ образуют аппроксимативную единицу. В проверке нуждается только пункт 3) из определения аппроксимативной единицы.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\frac{t}{2}dt = 2\int\limits_{0}^{\pi} \cos^{2n}\frac{t}{2}dt \geq 2\int\limits_{0}^{\pi}(1-\frac{t}{\pi})^{2n}dt =$$

$$= 2\pi\int\limits_{0}^{\pi}(1-\frac{t}{\pi})^{2n}d\frac{t}{\pi} = 2\pi\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{2n}dt = \frac{2\pi}{2n+1}$$

при $0 < \delta \leqslant \pi$

$$\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} \cos^{2n}\frac{t}{2}dt \leqslant 2\pi\cos^{2n}\frac{\delta}{2} = 2\pi q^{2n},$$

где $0 \leqslant q = \cos\frac{\delta}{2} < 1$. Тогда, раз $\frac{2\pi q^{2N}}{\frac{2\pi}{2n+1}} = (2n+1)q^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $\int\limits_{-\delta}^{2\pi-\delta}|K_n(t)|\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, пункт 3) верен.

**Теорема 1** (Вейерштрасса).

*1. Если комплекснозначная функция $f \in C[a,b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $P$, что*

$$\|f-P\|_{C[a,b]} = \max_{[a,b]}|f-P| < \varepsilon,$$

*причем если $f$ действительнозначна, то и многочлен можно брать действительным (иначе говоря, непрерывные функции на отрезке можно равномерно приближать многочленами).*

*2. Если комплекснозначная функция $f \in C^m[a,b]$ ($m$ раз непрерывно дифференцируема на $[a,b]$ как функция со значениями в нормированном пространстве $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой многочлен $P$, что*

$$\|f-P\|_{C^m[a,b]} = \max_{a\leqslant x\leqslant b,\, 0\leqslant k\leqslant m}|f^{(k)}(x) - P^{(k)}(x)| < \varepsilon,$$

*причем если $f$ действительнозначна, то и многочлен можно брать действительным (иначе говоря, $m$ раз непрерывно дифференцируемые функции на отрезке можно вместе с производными равномерно приближать многочленами).*

▼ Рассмотрим линейные замены аргумента функции. Если $t \in [0,1]$, то $x = a + (b-a)t \in [a,b]$ и наоборот, если $x \in [a,b]$, то $t = \frac{x-a}{b-a} \in [0,1]$, при этом значения рассматриваемой функции в соответствующих точках $x$ и $t$ одинаковы, а значения $k$-ой производной при такой замене аргумента отличаются постоянным множителем $(b-a)^k$. Поэтому утверждения теоремы не меняются при линейных заменах аргумента и, значит, можно ограничиться доказательством для случая отрезка $[0,1]$.

Существует такой многочлен $Q(x)$, действительный, если $f$ действительнозначна, что

$$f^{(k)}(0) = Q^{(k)}(0) \text{ и } f^{(k)}(1) = Q^{(k)}(1)\ k = 0,\dots,m.$$

В случае 1, когда $m = 0$, можно взять $Q(t) = f(0) + (f(1) - f(0))t$. В общем случае можно, считая коэффициенты многочлена неизвестными, найти их, решая возникающую из написанных равенств систему линейных уравнений (в которой, если степень многочлена больше $2m+1$, число неизвестных больше числа уравнений).

Рассмотрим функцию $g(t) = f(t) - Q(t)$;

$$g^{(k)}(0) = 0 \text{ и } g^{(k)}(1) = 0 \ k = 0, \ldots, m.$$

Продолжим функцию $g$ с $[0, 1]$ на всю прямую нулем. Из равенств выше следует, что она $m$ раз непрерывно дифференцируема на всей прямой, в силу финитности она и все $m$ производных будут равномерно непрерывны и ограничены на всей прямой.

Взяв ядра $K_n$ из примера 3, получим, по теореме об аппроксимативной единице, что

$$(G * K_n)^{(k)}(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} G^{(k)}(x), \ k = 0, \ldots, m.$$

Но при $x \in [0, 1]$ $\ G * K_n(x) = \frac{1}{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt} \int\limits_0^1 g(t)(1 - (x-t)^2)^n dt = \sum\limits_{k=0}^{2n} c_k x^k = P_{2n}(x)$ — многочлен, коэффициенты которого действительны, если $f$, а значит, и $g$, действительнозначна. При достаточно большом $n$

$$\|g - P_{2n}(x)\|_{C^m[a,b]} = \max_{a\leqslant x\leqslant b,\, 0\leqslant k\leqslant m} |g^{(k)}(x) - P_{2n}^{(k)}(x)| < \varepsilon.$$

Так как $g(t) = f(t) - Q(t)$, где $Q(t)$ — многочлен, то теорема доказана. ▲

Тригонометрическая система

**Определение 1**. **Тригонометрической системой** называется система функций

$$\left\{\frac{1}{2}, \ \cos nx, \ \sin nx\right\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{или} \quad \left\{e^{inx}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Приведенные системы связаны простыми соотношениями

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \ \cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Отсюда, при каждом $n \in \mathbb{N}$ линейные оболочки систем $\{\cos nx, \ \sin nx\}$ и $\{e^{inx}, e^{-inx}\}$ совпадают (над $\mathbb{C}$).

**Определение 2**. **Тригонометрическим многочленом** называется произвольная линейная комбинация любого конечного числа элементов тригонометрической системы, т.е. выражение вида

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Считают, что обе формы записи изображают один и тот же тригонометрический многочлен, и коэффициенты $a_k$, $b_k$ и $c_k$ связаны следующими соотношениями $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$, $k \in \mathbb{N}$, или $a_0 = 2c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$, $k \in \mathbb{N}$.

**Теорема 2** (Вейерштрасса).

*1. Если комплекснозначная функция $f$ $2\pi$-периодична и непрерывна, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический многочлен $T$, что*

$$\|f - T\|_{C[0,2\pi]} = \max_{[0,2\pi]} |f - T| = \max_{\mathbb{R}} |f - T| < \varepsilon,$$

*причем если $f$ действительнозначна, то и многочлен можно брать действительнозначным (иначе говоря, $2\pi$-периодические непрерывные функции можно равномерно приближать тригонометрическими многочленами).*

*2. Если комплекснозначная функция $f$ $2\pi$-периодична и $m$ раз непрерывно дифференцируема (как функция со значениями в нормированном пространстве $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$), то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический многочлен $T$, что*

$$\|f - T\|_{C^m[0,2\pi]} = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\, 0 \leqslant k \leqslant m} |f^{(k)}(x) - T^{(k)}(x)| = \max_{x \in \mathbb{R},\, 0 \leqslant k \leqslant m} |f^{(k)}(x) - T^{(k)}(x)| < \varepsilon,$$

*причем если $f$ действительнозначна, то и тригонометрический многочлен можно брать действительнозначным (иначе говоря, $m$ раз непрерывно дифференцируемые $2\pi$-периодические функции можно вместе с производными равномерно приближать тригонометрическими многочленами).*

▼ Взяв ядра $K_n$ из примера 7 предыдущей лекции, получим, по теореме об аппроксимационной единице, что

$$(f * K_n)^{(k)}(x) \underset{n \to \infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} f^{(k)}(x),\ k = 0, \ldots, m.$$

Но $f * K_n(x) = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos t)^n dt} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)(1+\cos(x-t))^n dt = T(x)$ — тригонометрический многочлен, действительнозначный, если $f$ действительнозначна (используется формула $\cos(x-t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t$ и возведение в степень $n$ получившегося выражения). При достаточно большом $n$

$$\|f - T(x)\|_{C^m[0,2\pi]} = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi,\, 0 \leqslant k \leqslant m} |f^{(k)}(x) - T^{(k)}(x)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана. ▲

## **Лекция 22** (16.11.20)
## Теорема Римана-Лебега
## Тригонометрическая система, ее замкнутость
## Тригонометрические ряды Фурье

Напомним, что если $f \in R[a,b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $\mathbb{T} = \{\Delta_i\}$ отрезка $[a,b]$, что $\sum\limits_i \operatorname*{osc}\limits_{\Delta_i} f \cdot |\Delta_i| < \varepsilon$, где $\operatorname*{osc}\limits_{\Delta_i} f = \sup\limits_{\Delta_i} f - \inf\limits_{\Delta_i} = M_i - m_i$. В частности, отсюда следует, что

$$\sum_i \int\limits_{\Delta_i} (f(x) - m_i)dx = \int\limits_a^b (f(x) - \sum_i m_i \cdot \chi_{\Delta_i}(x))dx =$$

$$= \int\limits_a^b |f(x) - \sum_i m_i \cdot \chi_{\Delta_i}(x)|dx = \int\limits_a^b |f(x) - s(x)|dx = ||f - s||_1$$

где $s(x) = s(f, \mathbb{T}, x) = \sum\limits_i m_i \cdot \chi_{\Delta_i}(x)$ — так называемая нижняя функция Дарбу, функция ступенчатого вида (т.е. линейная комбинация характеристических функций отрезков). Можно заменить на характеристические функции полуинтервалов $[a_i, a_{i+1})$, интегралы от этого не поменяются, так как это изменение в конечном числе точек.

**Определение**. Функция $g(x)$, определенная на $\mathbb{R}$, называется осциллирующей, если для некоторого $T > 0$ она $T$-периодична, интегрируема на $[0, T]$ и $\int\limits_0^T g(x)dx = 0$ (значит, и по любому отрезку длины $T$ интеграл тоже нулевой).

**Лемма 1**. Пусть $g(x)$ — осциллирующая функция. Тогда для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ справедливо неравенство $|\int\limits_\alpha^\beta g(x)dx| \leq \int\limits_0^T |g(x)|dx$.

▼

Если $\beta - \alpha \leq T$, то утверждение очевидно. Иначе найдется такое максимальное $n \in \mathbb{N}$, что $\alpha + nT \leq \beta$ (максимальность означает, что $\beta - \alpha - nT \leq T$). Тогда

$$|\int\limits_\alpha^\beta g(x)dx| = |\int\limits_\alpha^{\alpha+T} g(x)dx + \int\limits_{\alpha+T}^{\alpha+2T} g(x)dx + \int\limits_{\alpha+2T}^{\alpha+3T} g(x)dx + \dots + \int\limits_{\alpha+(n-1)T}^{\alpha+nT} g(x)dx + \int\limits_{\alpha+nT}^{\beta} g(x)dx| =$$

$$= |\int\limits_{\alpha+nT}^{\beta} g(x)dx| \leq \int\limits_0^T |g(x)|dx$$

▲

**Лемма 2**. Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — произвольный отрезок. Тогда, если $g(x)$ — осциллирующая функция, то

$$\int\limits_a^b g(\lambda x)dx = o(1) \text{ при } \lambda \to \pm\infty.$$

▼

$$|\int\limits_a^b g(\lambda x)dx| = |\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)dt| \leq \frac{1}{|\lambda|}\int\limits_0^T |g(t)|dt = o(1)$$

Если $\lambda < 0$, то при замене переменных в интеграле необходимо менять пределы интегрирования и знак, но в силу того, что интеграл стоит под модулем, результат не меняется. ▲

**Следствие**. Если $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — произвольный отрезок, $s(x)$ — функция ступенчатого вида на отрезке $[a, b]$, $g(x)$ — осциллирующая функция,то

$$\int\limits_a^b s(x)g(\lambda x)dx = o(1) \text{ при } \lambda \to \pm\infty.$$

**Теорема 1** (Риман-Лебег). Пусть $f \in R[a, b]$, $g(x)$ — осциллирующая функция. Тогда $\int\limits_a^b f(x)g(\lambda x)dx = o(1)$ при $\lambda \to \pm\infty$.

▼ Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По отмеченному выше, найдется такая функция ступенчатого вида $s(x)$ (а именно, нижняя функция Дарбу), что $\int\limits_a^b |f(x) - s(x)|dx = \int\limits_a^b (f(x) - s(x))dx < \varepsilon$. Тогда

$$|\int\limits_a^b f(x)g(\lambda x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)-s(x)|\cdot|g(\lambda x)|dx + |\int\limits_a^b s(x)g(\lambda x)dx| \leq$$

$$\leq \varepsilon\cdot\sup_{[0,T]}|g(x)| + |\int\limits_a^b s(x)g(\lambda x)dx|.$$

По уже доказанному, второй интеграл стремится к нулю при $\lambda\to\pm\infty$, следовательно, при достаточно больших по модулю $\lambda$ он меньше $\varepsilon$, значит, исходный интеграл по модулю будет меньше $\varepsilon(C+1)$, где постоянная $C=\sup\limits_{[0,T]}|g(x)|$. ▲

Заметим, что в силу периодичности $\sup\limits_{[0,T]}|g(x)| = \sup\limits_{\mathbb{R}}|g(x)|$

**Теорема 2** (Риман-Лебег). Пусть $|f|\in R(\mathbb{R})$ (т.е. функция $f$ абсолютно интегрируема в несобственном смысле на $(-\infty,+\infty)$), $g(x)$ — осциллирующая функция. Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(\lambda x)dx = o(1)$ при $\lambda\to\pm\infty$.

▼ Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$. В силу абсолютной интегрируемости несобственного интеграла, найдется такое $A>0$, что $\int\limits_A^{+\infty}|f(x)|dx<\varepsilon$ и $\int\limits_{-\infty}^{A}|f(x)|dx<\varepsilon$. Тогда

$$|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(\lambda x)dx| \leq \sup_{\mathbb{R}}|g(x)|\int\limits_{-\infty}^{A}|f(x)|dx + |\int\limits_{-A}^{+A} f(x)g(\lambda x)dx| + \sup_{\mathbb{R}}|g(x)|\int\limits_{A}^{+\infty}|f(x)|dx \leq$$

$$2\varepsilon\sup_{\mathbb{R}}|g(x)| + |\int\limits_{-A}^{+A} f(x)g(\lambda x)dx|$$

По предыдущей теореме, второе слагаемое стремится к нулю, следовательно, при достаточно больших по модулю $\lambda$ оно меньше $\varepsilon$, значит, исходный интеграл по модулю будет меньше $\varepsilon(2C+1)$, где постоянная $C=\sup\limits_{\mathbb{R}}|g(x)|$. ▲

**Замечание.** Вместо семейства сжатий одной функции $\varphi(\lambda,x)=g(\lambda x)$ в теоремах 1-2 можно рассматривать произвольное равномерно ограниченное семейство функций с условием, что для любого отрезка $[a,b]\subset\mathbb{R}$ выполнено $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty}\int\limits_a^b\varphi(\lambda,x)dx=0$ (для осциллирующих функций это условие гарантируется леммой 2).

**Следствие** (Риман-Лебег). 1) Пусть $f(x)\in R[0,2\pi]$. Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

1) Пусть $|f(x)| \in R(\mathbb{R})$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx \xrightarrow[\lambda \to \pm\infty]{} 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx \xrightarrow[\lambda \to \pm\infty]{} 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx \xrightarrow[\lambda \to \pm\infty]{} 0.$$

Тригонометрические ряды Фурье. Последовательность Фурье

Напомним определение тригонометрической системы.

**Определение 1**. **Тригонометрической системой** называется система функций

$$\left\{\frac{1}{2},\ \cos nx,\ \sin nx\right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{или} \quad \left\{e^{inx}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

**Теорема 1**. *Тригонометрическая система*

$$\left\{\frac{1}{2},\ \cos nx,\ \sin nx\right\}_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{\textit{или}} \quad \left\{e^{inx}\right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

*— замкнутая ортогональная система в пространстве непрерывных $2\pi$-периодических функций со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)} dx$.*

▼ Сначала проверим ортогональность. Имеем $\int\limits_0^{2\pi} \cos nx\, dx = \frac{1}{n} \sin nx\Big|_0^{2\pi} = 0$, $\int\limits_0^{2\pi} \sin nx\, dx = -\frac{1}{n} \cos nx\Big|_0^{2\pi} = 0$, $\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 n(x - \frac{\pi}{2})\, dx = \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 nx\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} (\cos^2 nx + \sin^2 nx)\, dx = \pi$. Используя формулы приведения произведения тригонометрических функций к сумме, получаем для $n, m \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \pi & \text{при } n = m, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \pi & \text{при } n = m, \end{cases}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos nx \sin mx\, dx = 0 \text{ для всех } n, m \in \mathbb{N}.$$

Аналогично для $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}} dx = \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ 2\pi & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Замкнутость системы в пространстве непрерывных функций легко следует из теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных $2\pi$-периодических функций тригонометрическими многочленами. Для $2\pi$-периодической непрерывной функции $f$ и любого $\varepsilon > 0$ пользуясь теоремой Вейерштрасса найдем такой тригонометрический многочлен $T$, что $\max\limits_{[0,2\pi]} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$. Тогда

$$\|f - T\|_2 = \left( \int\limits_0^{2\pi} |f(x) - T(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{2\pi}\varepsilon.$$

Замкнутость тригонометрической системы доказана. ▲

**Теорема 2**. *Тригонометрическая система — замкнутая ортогональная система в пространстве интегрируемых на отрезке* $[0, 2\pi]$ *функций со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.

▼ Пусть $f$ — интегрируемая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По отмеченному выше найдется такая ступенчатая функция $s(x)$, что

$$||f - s||_1 = \int\limits_0^{2\pi} |f(x) - s(x)|dx < \varepsilon^2$$

Пусть $M = \sup\limits_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|$ (существует, так как функция интегрируема). Отметим, что $|s(x)| \leq M$. Тогда

$$||f - s||_2 = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} |f(x) - s(x)|^2 dx} \leq \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} 2M|f(x) - s(x)|dx} \leq \sqrt{2M}\varepsilon$$

Построим непрерывную $2\pi$-периодическую функцию $h$ такую, что $||s - h||_2 \leq \varepsilon$.

Продолжим $s(x)$ по $2\pi$-периодичности на всю прямую. Функция $s(x)$ ступенчатая, т.е. кусочно-постоянная, т.е. она разрывна только в точках $\{x_j\}_{j=1}^m \subset [0, 2\pi]$. Возьмем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы $\delta$-окрестности точек $x_j$ не пересекались. Дополнительно потребуем, чтобы $\delta < \frac{\varepsilon^2}{m}$

На интервале $(x_j - \delta, x_j + \delta)$ заменим $s$ на линейную функцию, совпадающую с $s$ в концах интервала (и, соответственно, она совпадает с $s$ вне этих интервалов). Полученную непрерывную (т.к. она кусочно-линейна) функцию и возьмем в качестве $h$.

Оценим разность $||s - h||_2$:

$$||s - h||_2 = \sqrt{\int\limits_0^{2\pi} |s(x) - h(x)|^2 dx} \leq \sqrt{m \cdot (2M)^2 \cdot (2\delta)} < 2M\sqrt{2}\varepsilon$$

(концы отрезка, возможно, были учтены дважды, но на оценку это не влияет).

Так как $h$ — непрерывная $2\pi$-периодическая функция, то по предыдущей теореме найдется такой тригонометрический многочлен $T$, что $||h - t||_2 < \varepsilon$.

Покажем, используя неравенство треугольника, что $T$ приближает функцию $f$ по норме $||\cdot||_2$:

$$||f-T||_2 \le ||f-s||_2 + ||s-h||_2 + ||h-T||_2 \le \varepsilon \cdot (\sqrt{2M} + 2M\sqrt{2} + 1)$$

Константа предопределена только выданной функцией $f$, поэтому в силу произвольности $\varepsilon$ функцию $f$ можно сколь угодно близко приблизить тригонометрическим многочленом $T$.

Очевидно, вместо $[0, 2\pi]$ можно брать любой отрезок длины $2\pi$.

▲

**Определение 3**. **Тригонометрическим рядом** называют ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad \text{или} \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

(причем в первом ряде по традиции не ставят скобки). Тригонометрический ряд будем обозначать $\sigma(x)$.

Считают, что обе формы записи изображают один и тот же тригонометрический ряд, если коэффициенты $a_k$, $b_k$ и $c_k$ связаны следующими соотношениями $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$, $k \in \mathbb{N}$, или $a_0 = 2c_0$, $a_k = c_k + c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$, $k \in \mathbb{N}$.

**Определение 4**. **Тригонометрическими коэффициентами Фурье** $2\pi$-периодической функции $f$ называют

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos kt\, dt,\ k = 0, 1, \ldots,$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin kt\, dt,\ k = 1, 2, \ldots,$$

или

$$F_{2\pi}[f](k) = F_{2\pi}[f]_k = c_k = c_k(f) = \widehat{f}(k) = \widehat{f}_k =$$

$$= (f(x), \frac{1}{2\pi}e^{ikx}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{e^{ikx}}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где $f$ интегрируема на периоде (т.е. на $[0, 2\pi]$) по Риману.

Тригонометрический ряд Фурье (или просто ряд Фурье) функции $f$ — это ряд Фурье функции $f$ по тригонометрической системе. Его коэффициенты — это тригонометрические коэффициенты Фурье. Будем обозначать ряд Фурье функции $f$ как $\sigma(f)$ или $\sigma(f, x)$.

Легко проверить, что обе формы записи ряда Фурье изображают один и тот же тригонометрический ряд, так как для коэффициентов Фурье выполнены соотношения, написанные выше.

**Определение**. $c_0(\mathbb{Z})$ — это пространство занумерованных целыми числами действительных (или комплекснозначных) последовательностей $\{x_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, сходящихся к нулю на бесконечностях (т.е. $\lim\limits_{n\to\pm\infty} x_n = 0$), с нормой $||x_n||_\infty = \max\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.

**Определение**. Последовательностью Фурье (или преобразованием Фурье $2\pi$-периодической функции) называется отображение (точнее, оператор) $F_{2\pi}$, сопоставляющее функции $f \in R[0, 2\pi]$ последовательность ее коэффициентов Фурье $\{\hat{f}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ по системе комплексных экспонент $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx$.

### Свойства последовательности Фурье.

Всюду здесь $f$ (как и $g$) — $2\pi$-периодическая интегрируемая на периоде функция, если не оговорено противное.

1. Пусть тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ сходится по норме в $R^2[0, 2\pi]$ к своей сумме $S(x)$ (это выполнено, например, если ряд сходится равномерно). Тогда $c_k(S) = c_k$, $a_k(S) = a_k$, $b_k(S) = b_k$ (т.е. такой ряд является рядом Фурье своей суммы).

▼

Следует из общей теории рядов Фурье (лемма 1 лекции 19).

▲

Отметим, что не всякий всюду сходящийся (т.е. поточечно) тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы, как будет показано после свойства 11.

2. (Об образе). Последовательность Фурье интегрируемой функции стремится к нулю на $\pm\infty$. Иными словами, $F_{2\pi} : R[0, 2\pi] \to c_0(\mathbb{Z})$. Как следствие, последовательности $\{a_n(f)\}$ и $\{a_n(f)\}$ тоже стремятся к нулю.

▼

Следует непосредственно из теоремы Римана-Лебега.

▲

3. (Линейность). Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$c_k(\alpha f + \beta g) = \alpha c_k(f) + \beta c_k(g)$$

▼

Следует из свойства линейности интегралов.

▲

4. (Непрерывность). Справделиво неравенство

$$||c_k(f)||_\infty \le \frac{1}{2\pi}||f||_1$$

.

Как следствие, если $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ в $R^1[0, 2\pi]$, то $c_k(f_n) \overset{k\in\mathbb{Z}}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} c_k(f)$. Кроме того,

$$\sup_{f\in R[0,2\pi], ||f||_1\le 1} ||c_k(f)||_\infty = \frac{1}{2\pi} \quad (*)$$

▼

$||c_k(f)||_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}|\int\limits_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx| \le \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)e^{-ikx}|dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|dx = \frac{1}{2\pi}||f||_1$.

Отсюда следует, что в $(*)$ справедливо неравенство "$\leq$". Нетрудно проверить, что равенство достигается на любой функции вида $\frac{1}{2\pi}e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$.

▲

**Лекция 23** (20.11.20)
**Свойства последовательности Фурье.**
**Свойства рядов Фурье.**

5. (Последовательность Фурье сдвига). Если $f_h(x) = f(x-h)$, то для любого $h \in [0, 2\pi)$

$$c_k(f_h) = c_k(f)e^{-ikh}$$

▼ $c_k(f_h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t-h)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ik(t+h)}dt = c_k(f)e^{-ikh}$ ▲

6. (Последовательность Фурье "сдвига"). Если ${}_nf(x) = e^{inx}f(x)$, то для любого $n \in \mathbb{N}$

$$c_k({}_nf) = c_{k-n}(f)$$

▼

$c_k({}_nf) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}f(t)e^{-ikt}dt = c_{k-n}(f)$

▲

Рассматривая $c(f)$ как функцию на $\mathbb{Z}$, $c(f)(k) = c(f)_k$, свойства 5-6 можно переписать следующими равенствами: $c(f_h) = {}_{-h}c(f)$, $c({}_nf) = c(f)_{h},$.

7. (Симметричность). Если $f_-(x) = f(-x)$, то

$$c_k(f_-) = c_{-k}(f)$$

▼

$c_k(f_-) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt}dt = c_{-k}(f)$

▲

8. (Инволютивность). Для комплексного сопряжения выполнено следующее:

$$c_k\left(\overline{f}\right) = \overline{c_{-k}(f)}$$

▼

$c_k(\overline{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f}(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\overline{\int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt}dt} = \overline{c_{-k}(f)}$

▲

9. (Последовательность Фурье сжатия). Пусть $g(x) = f(nx)$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$c_k(g) = \begin{cases} 0, \text{если } k \text{ не делится на } n \\ c_m(f), \text{если } k = mn,\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

▼ Если $k$ не делится на $n$, то

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t - \frac{2\pi}{n})e^{-ik(t-\frac{2\pi}{n})}dt =$$
$$= e^{\frac{2\pi ik}{n}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt}dt = e^{\frac{2\pi ik}{n}}\widehat{g}(k),$$

в этом случае $e^{\frac{2\pi ik}{n}}$ не равно единице, поэтому $\widehat{g}(k) = 0$

При $k = mn$, $m \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(nt)e^{-imnt}dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}dt = \widehat{f}(m).$$

▲

10. (Последовательность Фурье производной). Если $f$ — $2\pi$-периодическая непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$$

как следствие, $\widehat{f}(k) = o(\frac{1}{k})$ при $k \to \pm\infty$.

▼

$$\widehat{f'}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int_0^{2\pi} e^{-ikt}df(t) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}(\mathcal{R}-\mathcal{S})\int_0^{2\pi} f(t)\,de^{-ikt} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cdot(-ik)e^{-ikt}dt = ik\widehat{f}(k),$$

▲

Отметим, что для $m$ раз непрерывно дифференцируемых функций это утверждение можно применять последовательно для всех производных.

11. (Равенство Парсеваля ).

$$(f,g) = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} =$$
$$= \frac{\pi a_0(f)\overline{a_0(g)}}{2} + \pi\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k(f)\overline{a_k(g)} + b_k(f)\overline{b_k(g)}\Big),$$

причем оба написанных ряда сходятся абсолютно. В частности,

$$||f||_2^2 = \int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(k)|^2 = \frac{\pi|a_0(f)|^2}{2} + \pi\sum_{k=1}^{\infty}\big(|a_k(f)|^2 + |b_k(f)|^2\big)$$

(Как следствие, получаем альтернативное доказательство, что для функций, интегрируемых в квадрате, коэффициенты Фурье стремятся к нулю)

▼

Следует из общей теории рядов Фурье.

▲

**Пример**. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ сходится всюду по признаку Дирихле, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ расходится, поэтому данный тригонометрический ряд не является рядом Фурье никакой интегрируемой по Риману функции (в противном случае было бы выполнено равенство Парсеваля). Аналогичное верно для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$.

Однако такие тригонометрические ряды могут быть рядами Фурье, если рассматривать более общие интегралы.

12. (Последовательность Фурье свертки).

$$c_k(f * g) = 2\pi \cdot c_k(f)c_k(g)$$

▼

Для непрерывных функций достаточно было бы просто переставить порядок интегралов. Докажем для интегрируемых функций.

Функция $h(t) = f(x - t)$ представима как $(f_x)_-(t)$, поэтому её коэффициенты Фурье по свойствам 5 и 7

$$c_k((f_x)_-) = c_{-k}(f)e^{-ikx}$$

Коэффициенты Фурье функции $\overline{g}$:

$$c_k(\overline{g}) = \overline{c_{-k}(g)}$$

Тогда для свертки выполнено, по равенству Парсеваля:

$$f * g(x) = \int\limits_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt = (h, \overline{g}) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{-k}(f)e^{-ikx}c_{-k}(g) = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx}c_k(g),$$

причем этот ряд сходится абсолютно, а значит, сходится равномерно (по $x$) на $[0, 2\pi]$. Это влечет его сходимость в $R^2[0, 2\pi]$ (см. свойство 1), а значит, он является рядом Фурье своей суммы, т.е. $f * g(x)$, значит, $c_k(f * g) = 2\pi c_k(f)c_k(g)$

▲

### Свойства рядов Фурье по тригонометрической системе

1 (линейность). Для любой $2\pi$-периодической интегрируемой на периоде функции $f$ и любого числа $\alpha$

$$S(\alpha f; x) = \alpha S(f; x).$$

Для любых $2\pi$-периодических интегрируемых функций $f$ и $g$

$$S(f \pm g; x) = S(f; x) \pm S(g; x).$$

▼

Следует из свойств линейности коэффициентов Фурье и рядов.

▲

2 (инвариантность относительно сдвигов). Если $f$ — $2\pi$-периодическая интегрируемая на периоде (в любом из смыслов) функция и $f_h(x) = f(x - h)$, то

$$S(f_h; x) = S(f; x - h) = S_h(f; x).$$

▼

По свойству коэффициентов Фурье,

$$\widehat{f_h}(k) = \widehat{f}(k)e^{-ikh},$$

поэтому

$$S(f_h; x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{-ikh}e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ik(x-h)} = S(f; x-h).$$

▲

3 (инвариантность относительно симметрии). Если $f$ — $2\pi$-периодическая интегрируемая на периоде (в любом из смыслов) функция и $f_-(x) = f(-x)$, то

$$S(f_-; x) = S(f; -x) = S_-(f; x).$$

▼

По свойству коэффициентов Фурье,

$$\widehat{f_-}(k) = \widehat{f}(-k),$$

поэтому

$$S(f_-; x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(-k)e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{-ikx} = S(f; -x).$$

▲

4 (инвариантность относительно сопряжения). Если $f$ — $2\pi$-периодическая интегрируемая на периоде (в любом из смыслов) функция и $\overline{f}$ — сопряженная к (в комплексном смысле) функция, то

$$S(\overline{f}; x) = \overline{S(f; x)}.$$

▼

По свойству коэффициентов Фурье,

$$\widehat{\overline{f}}(k) = \overline{\widehat{f}(-k)},$$

поэтому

$$S(\overline{f}; x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}(-k)}e^{ikt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}(k)}e^{-ikt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}(k)e^{ikt}} = \overline{S(f; x)}.$$

▲

5 (инвариантность относительно сжатий). Если $f$ — $2\pi$-периодическая интегрируемая на периоде (в любом из смыслов) функция и $g(x) = f(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$S(g; x) = S(f; nx).$$

▼

Следует из свойства 9 коэффициентов Фурье:

$$S(g; x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}, k \,\vdots\, n} \widehat{g}(k)e^{ikx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(mn)e^{imnx} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m)e^{imnx} = S(f; nx)$$

▲

6 (инвариантность относительно дифференцирования). Если $f$ — $2\pi$-периодическая непрерывно дифференцируемая функция, то

$$S(f';x) = S'(f;x).$$

▼

По свойству коэффициентов Фурье,

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k),$$

поэтому

$$S(f';x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik\widehat{f}(k)e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\left(e^{ikx}\right)' = S'(f;x).$$

▲

**Лекция 24** (23.11.20)

**Свойства рядов Фурье. Частичные суммы ряда Фурье. Признак сходимости Дини. Принцип локализации Римана**

7 (об интегрировании ряда Фурье). Если $f \in R^2[0,2\pi]$, то для любого отрезка $[A,B]$

$$\int\limits_A^B f(x)\,dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\int\limits_A^B e^{ikx}dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_A^B dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int\limits_A^B \cos kx\,dx + b_k\int\limits_A^B \sin kx\,dx\right),$$

где $a_k$ и $b_k$ — коэффициенты Фурье функции $f$, причем написанные ряды сходятся абсолютно (т.е. ряд Фурье $f$ можно интегрировать почленно).

▼

Если $B - A \leqslant 2\pi$, то написанное равенство — равенство Парсеваля с $g(x) = \chi_{[A,B]}(x)$, где последняя функция — продолженная $2\pi$-периодически характеристическая функция отрезке $[A,B]$.

$$(f,g) = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} = 2\pi\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\overline{\frac{1}{2\pi}\int\limits_A^B e^{-ikx}dx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\int\limits_A^B e^{ikx}dx$$

Так как любой отрезок можно разбить на конечное число отрезков длины не больше $2\pi$, то свойство верно.

▲

В частности, если для любого $x \in [0,2\pi]$ взять $[A,B] = [0,x]$, получим

$$\int\limits_0^x (f(x)-\frac{a_0}{2})\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int\limits_0^x \cos kx\,dx + b_k\int\limits_0^x \sin kx\,dx\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\sin kx + \frac{b_k}{k}(1-\cos kx)\right)$$

(вычли коэффициент $\frac{a_0}{2}$, чтобы неопределенный интеграл Римана функции $f(x) - \frac{a_0}{2}$ стала тоже $2\pi$-периодичной). Покажем, что ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ сходятся абсолютно. Действительно, по неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\frac{a_k}{k}| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}(|a_k|^2 + \frac{1}{k^2}) \leq \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Первый ряд сходится в силу равенства Парсеваля. Аналогично, абсолютно сходится ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k}$. Поэтому, обозначив $F(x) = \int\limits_0^x (f(x) - \frac{a_0}{2})\, dx$, получаем, что

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{k} \sin kx - \frac{b_k}{k} \cos kx \right),$$

причем ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, поэтому он является рядом Фурье своей суммы. Следовательно, справедливо

**Утверждение** (Ряд и коэффициенты Фурье неопределенного интеграла Римана). Неопределенный интеграл Римана $F$ интегрируемой функции $f$ (с нулевым интегралом по периоду) раскладывается в равномерно сходящийся ряд Фурье, и для её коэффициентов Фурье выполняются соотношения:

$$a_0(F) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k(f)}{k},\ a_k(F) = -\frac{b_k(f)}{k},\ b_k(F) = \frac{a_k(f)}{k}.$$

**Следствие**. Ряд Фурье непрерывно дифференцируемой функции $f$ сходится к $f$ равномерно.

**Замечание**. Ряд утверждений, наоборот, справедлив только при рассмотрении интеграла Римана, так как именно для интеграла Римана справедливо, что если функция интегрируема, то она интегрируема в квадрате (для более общих интегралов и даже для несобственного интеграла Римана это, вообще говоря, неверно).

## Частичные суммы ряда Фурье

**Определение 3**. **Частичной суммой** с номером $n$ или $n$-ой частичной суммой тригонометрического ряда

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

называют

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

где $n \in \mathbb{Z}^+$.

Выведем формулу представления частичных сумм ряда Фурье функции $f$.

$$S_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \cdot e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} f(t) e^{ik(x-t)} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{i(n+1)(x-t)} - e^{-in(x-t)}}{e^{i(x-t)} - 1} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-t)}}{e^{\frac{i}{2}(x-t)} - e^{-\frac{i}{2}(x-t)}} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{2i \sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2i \sin \frac{x-t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2 \sin \frac{x-t}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt = \frac{1}{\pi} f * D_n(x),$$

где

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \begin{cases} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} & \text{при } t \neq 2m\pi, \\ n + \frac{1}{2} & \text{при } t = 2m\pi, \end{cases}$$

— ядро Дирихле.

К сожалению, ядра $\frac{1}{\pi} D_n(t)$ не образуют аппроксимативную единицу, не выполняется условие 1). Существуют непрерывные функции ряды Фурье которых расходятся в некоторых точках и таких точек может быть бесконечное множество, даже мощности континуум. Поэтому представляют интерес различные достаточные признаки сходимости рядов Фурье.

## Признак Дини сходимости ряда Фурье

**Теорема 1** (признак Дини). *Пусть $f$ — $2\pi$-периодическая интегрируемая по Риману (на периоде) функция и для точки $x$ и числа $S$ существует такое $\delta > 0$, что интеграл*

$$\int_{0}^{\delta} \left| \frac{f(x+t) - 2S + f(x-t)}{t} \right| dt < +\infty$$

*существует и конечен. Тогда ряд Фурье функции $f$ сходится в точке $x$ к числу $S$.*

▼ Написанный интеграл надо понимать как несобственный интеграл Римана с особенностью в точке 0. Рассмотрим разность $S_n(x) - S$. Учитывая полученную формулу для частичных сумм ряда Фурье и то, что ядро Дирихле $D_n(t)$ четная функция и $\int\limits_0^{\pi} D_n(t)\, dy = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{2} dt = \frac{\pi}{2}$, получаем

$$S_n(f;x) - S = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x-t) - S\right) D_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{f(x+t) - 2S + f(x-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, dt.$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и уменьшим $\delta$, $0 < \delta < \pi$, настолько, что

$$\int\limits_0^\delta \left| \frac{f(x+t) - 2S + f(x-t)}{t} \right| dt < \varepsilon.$$

Функция $\sin x$ выпукла вверх на $[0, \frac{\pi}{2}]$, ее график лежит не ниже хорды, соединяющей значения $\sin x$ на концах отрезка, поэтому $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$ и

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\delta \left| \frac{f(x+t) - 2S + f(x-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\delta \left| \frac{f(x+t) - 2S + f(x-t)}{\frac{2}{\pi} t} \right| dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\chi(t)$ — характеристическая функция отрезка $[\delta, \pi]$. Тогда

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_\delta^\pi \frac{f(x+t) - 2S + f(x-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t \, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(x+t) - 2S + f(x-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \chi(t) \left( \sin \frac{t}{2} \cos nt + \cos \frac{t}{2} \sin nt \right) dt =$$

$$= a_n \left( \frac{f(x+t) - 2S + f(x-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \chi(t) \sin \frac{t}{2} \right) + b_n \left( \frac{f(x+t) - 2S + f(x-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \chi(t) \cos \frac{t}{2} \right),$$

где $a_n(\cdot)$ и $b_n(\cdot)$ — коэффициенты Фурье от написанных в скобках интегрируемыхм по Риману на $[0, 2\pi]$ функций (ведь $\chi(t)$ равна нулю на $[0, \delta) \cup (\pi, 2\pi]$). Они стремятся к нулю при $n \to \infty$, поэтому найдется такое $N$, что при $n > N$ для их суммы верна оценка $|a_n(\cdot) + b_n(\cdot)| < \frac{\varepsilon}{2}$, а тогда при $n > N$ имеем $|S_n(f; x) - S| < \varepsilon$. Теорема доказана. ▲

**Следствие 1**. *Ряд Фурье $2\pi$-периодической интегрируемой по Риману (на периоде) функции $f$ сходится к ней в каждой точке, где $f$ дифференцируема или имеет конечные левую и правую производные.*

Действительно, в таких точках $f(x \pm t) - f(x) = O(t)$ и фигурирующее в признаке Дини подынтегральное выражение — ограниченная интегрируемая по Риману функция

**Следствие 2**. *Ряд Фурье $2\pi$-периодической всюду дифференцируемой функции $f$ сходится к ней в каждой точке.*

**Теорема 2** (принцип локализации Римана). *Если $2\pi$-периодические интегрируемые по Риману функции $f$ и $g$ совпадают в некоторой окрестности точки $x$, то их ряды Фурье в этой точке одновременно расходятся или сходятся и если сходятся, то к одной и той же величине (т.е. сходимость ряда Фурье в точке зависит только от поведения интегрируемой по Риману функции в окрестности этой точки).*

Утверждение сразу следует из признака Дини, примененного к разности функций $f - g$ в точке $x$.

## Лекция 25 (30.11.20)
## Суммирование рядов Фурье. Тауберова теорема Харди и признак Дирихле–Жордана

Представление средних арифметических рядов Фурье

**Определение 1**. Для тригонометрического ряда

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

**средними Фейера** (**средними Чезаро-Фейера**) называются средние арифметические частичных сумм ряда:

$$\sigma_N(x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} =$$
$$= \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right).$$

Если $S(f,x)$ — ряд Фурье функции $f$, то его средние арифметические обозначают $\sigma_N(f)$ или $\sigma_N(f;x)$.

Выведем формулу для выражения средних арифметических ряда Фурье функции $f$.

$$\sigma_N(f;x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(f;x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{\pi} f * D_n(x) =$$
$$= \frac{1}{\pi} f * \left(\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n\right)(x) = \frac{1}{\pi} f * F_N(x),$$

где $F_N(t) = \frac{1}{N+1}\sum\limits_{n=0}^{N} D_n(t) = \frac{\sum_{n=0}^{N}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{(N+1)2\sin\frac{t}{2}}$ — ядро Фейера.

Так как $\sum\limits_{n=0}^{N}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\cdot\sin\frac{t}{2} = \sum\limits_{n=0}^{N}\frac{1}{2}(\cos nt - \cos(n+1)t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(N+1)t$, то ядро Фейера

$$F_N(t) = \frac{1-\cos(N+1)t}{4(N+1)\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\sin^2\frac{N+1}{2}t}{2(N+1)\sin^2\frac{t}{2}}$$

при $t \neq 2k\pi$, в точках $t = 2k\pi$ $F_N(t) = \frac{N+1}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

**Лемма 1**. *Последовательность* $\left\{\frac{1}{\pi}F_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ *является аппроксимативной единицей (в $2\pi$-периодическом случае).*

▼ Ядра Фейера неотрицательны и $\int\limits_0^{2\pi} F_N(t)\,dt = \frac{1}{N+1}\sum\limits_{n=0}^{N}\int\limits_0^{2\pi} D_n(t)\,dt = \pi$ по свойствам ядер Дирихле, поэтому свойства 1) и 2) аппроксимативной единицы выполняются. Остается проверить свойство 3). Для любого $\delta\in(0,\pi)$ $\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} F_N(t)\,dt =$

$\left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta}+\int\limits_{\delta}^{\pi}\right)F_N(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2(N+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}(2\pi-2\delta) \leqslant \frac{\pi}{(N+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. Значит, свойство 3) также выполняется. ▲

Суммирование методом средних арифметических

**Теорема 1 (Фейера)**. *Если $f$ — $2\pi$-периодическая интегрируемая по Риману функция, то в каждой точке ее непрерывности $x$*

$$\sigma_N(f;x) = f * \frac{1}{\pi}F_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} f(x),$$

*в каждой точке $x$ устранимого разрыва или разрыва I рода*

$$\sigma_N(f;x) = f * \frac{1}{\pi}F_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

*а если $f$ непрерывна всюду, то*

$$\sigma_N(f;x) = f * \frac{1}{\pi}F_N(x) \underset{N\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} f(x).$$

▼ Первое и третье утверждения теоремы непосредственно следуют из теоремы лекции 20 об аппроксимативной единице. Докажем второе утверждение используя четность ядра Фейера. Пусть $2\pi$-периодическая функция

$$h(t) = \begin{cases} f(x+0) & \text{на } (x, x+\pi), \\ f(x-0) & \text{на } (x-\pi, x), \\ f(x) & \text{в точках } x,\ x\pm\pi. \end{cases}$$

Тогда для всех $N \in \mathbb{Z}^+$ $\sigma_N(h;x) = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}+\int\limits_{0}^{\pi}\right)h(x-t)F_N(t)\,dt = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Функция $f(t)-h(t)$ непрерывна и равна нулю в точке $x$, значит, $\sigma_N(f-h;x) = \sigma_N(f;x)-\sigma_N(h;x) = \sigma_N(f;x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$. ▲

Тауберова теорема Харди и признак Дирихле–Жордана

Из суммируемости каким-либо методом можно при дополнительных условиях получать результаты о сходимости, которые называют тауберовыми. Таким способом можно доказать признак Дирихле–Жордана.

**Определение 1**. Определим сдвинутые средние арифметические последовательности $s_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\sigma_{n,k} = \frac{1}{k}\sum_{j=n}^{n+k-1} s_j, \quad n \in \mathbb{Z}^+,\ k \in \mathbb{N}.$$

**Лемма 1**. *Если средние арифметические $\sigma_k(x) = \sigma_{0,k}(x)$ функциональной последовательности $S_j(x)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $x \in X$, равномерно на $X$ сходятся к $S(x)$, а*

*$k_n \to \infty$ при $n \to \infty$ так, что отношение $\frac{n}{k_n}$ ограничено, то $\sigma_{n,k_n}$ равномерно на $X$ сходятся к $S(x)$.*

▼Действительно,

$$\sigma_{n,k_n} = \frac{1}{k_n}\left((k_n+n)\sigma_{k_n+n-1} - n\sigma_{n-1}\right) = \sigma_{k_n+n-1} + \frac{n}{k_n}(\sigma_{k_n+n-1} - \sigma_{n-1}) = S + o(1),$$

где $o(1)$ равномерно на $X$ стремится к 0 при $n \to \infty$, если отношение $\frac{n}{k_n}$ ограничено. ▲

Напомним (лекция 7, лемма 2), что

$$\sigma_{n,k} = S_n + \sum_{j=n+1}^{n+k-1}\left(1 - \frac{j-n}{k}\right)c_j.$$

**Теорема 1** (тауберова теорема Харди, равномерный вариант). *Если у функционального ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(x)$, $x \in X$, члены имеют оценку $|c_k(x)| \leqslant \frac{A}{k}$ для $k > K$ и $x \in X$, а средние арифметические $\sigma_n(x)$ равномерно на $X$ стремятся к $S(x)$, то суммы ряда $S_n(x)$ равномерно на $X$ стремятся к $S(x)$ при $n \to \infty$.*

▼ Для $n \geqslant K$ и $x \in X$ получаем оценку

$$|\sigma_{n,k}(x) - S_n(x)| \leqslant \sum_{j=n+1}^{n+k-1}|c_j(x)| \leqslant A\frac{k-1}{n}. \qquad (*)$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и для каждого $n > \max\{\frac{2}{\varepsilon}, K\}$ выберем $k_n \in \mathbb{N}$ так, что $\frac{\varepsilon n}{2} \leqslant k_n \leqslant \varepsilon n$. Поскольку $\varepsilon n > 2$, то это возможно. Поскольку отношение $\frac{n}{k_n} \leqslant \frac{2}{\varepsilon}$, то по лемме 1 $\sigma_{n,k_n}$ равномерно на $X$ сходятся к $S(x)$ и, значит, начиная с некоторого номера $N$ для всех $x \in X$ имеем оценку $|\sigma_{n,k_n}(x) - S(x)| < \varepsilon$. А из оценки (*) следует, что $|\sigma_{n,k}(x) - S_n(x)| \leqslant A\varepsilon$. Следовательно, начиная с некоторого номера $N$ для всех $x \in X$ имеем оценку $|S_n(x) - S(x)| < (A+1)\varepsilon$. Теорема доказана. ▲

**Теорема 3** (признак Дирихле-Жордана). *Если $2\pi$-периодическая функция $f$ ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке $x$ к $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, а если $f$ непрерывна на $[0, 2\pi]$, то ряд Фурье сходится к ней равномерно.*

▼ Оценим коэффициенты Фурье функции $f$

$$c_k(f) = \widehat{f}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \frac{-1}{2\pi ik}(\mathcal{R} - \mathcal{S})\int\limits_0^{2\pi} f(t)de^{-ikt} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi ik}\left(f(2\pi) - f(0) - (\mathcal{R} - \mathcal{S})\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}df(t)\right),$$

где

$$\left|(\mathcal{R} - \mathcal{S})\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikt}df(t)\right| \leqslant \operatorname*{Var}_{[0,2\pi]} f.$$

Следовательно, $c_k(f) = O(\frac{1}{k})$.

Средние арифметические ряда Фурье $f$ сходятся в каждой точке $x$ к $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$, а если $f$ непрерывна, то сходятся к ней равномерно. Отсюда и из теоремы 1 следует утверждение теоремы 3. ▲

## **Лекция 26** (04.12.20)
## Суммирование рядов Фурье методом Абеля
## Пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится
## Пример всюду непрерывной, нигде не дифференцируемой функции

### Суммирование методом Абеля

Теперь рассмотрим суммирование тригонометрических рядов методом Абеля или, как часто говорят, методом Абеля-Пуассона.

**Определение 2**. Для тригонометрического ряда

$$S=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_ke^{ikx}$$

**средними Пуассона** или (**средними Абеля–Пуассона**) называются ряды

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)r^k=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_ke^{ikx}r^{|k|},$$

где $0\leqslant r<1$.

Если $\sigma$ — ряд Фурье функции $f$, то вышенаписанные средние Абеля–Пуассона обозначают $f(r;x)$. Найдем выражение для средних Абеля–Пуассона рядов Фурье.

$$f(r;x)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(c_ke^{ikx}+c_{-k}e^{-ikx}\right)r^k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(e^{ik(x-t)}+e^{-ik(x-t)}\right)r^k\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}e^{ik(x-t)}r^k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-ik(x-t)}r^k\right)dt,$$

так как порядок суммирования и интегрирования можно поменять в силу равномерной сходимости ряда по признаку Вейерштрасса, ведь

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left|e^{ik(x-t)}r^k+e^{-ik(x-t)}r^k\right|r^k\leqslant\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k=\frac{1}{2}+\frac{r}{1-r}.$$

Значит,

$$f(r;x)=f*\frac{1}{\pi}P_r(x),$$

где $P_r(t) = P(r;t) = \frac{1}{2}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikt}r^{|k|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(e^{ikt}+e^{-ikt}\right)r^k = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} r^k\cos kt$ — ядро Пуассона. По формуле суммы геометрической прогрессии $P_r(t) = P(r;t) = \frac{1}{2}(1+\frac{e^{it}r}{1-e^{it}r}+\frac{e^{-it}r}{1-e^{-it}r}) = \frac{1-r^2}{(1-re^{it})(1-re^{-it})} = \frac{1-r^2}{2[1-2r\cos t+r^2]} = \frac{1-r^2}{2[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}]}$, т.е.

$$P_r(t) = P(r;t) = \frac{1-r^2}{2[1-2r\cos t+r^2]} = \frac{1-r^2}{2[(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}]}.$$

Иногда множитель $\frac{1}{2}$ не вносят в ядро Пуассона.

**Лемма 2**. *Семейство $\{\frac{1}{\pi}P(r,t)\}_{r\in[0,1)}$ является аппроксимативной единицей (дельтаобразным семейством) (в $2\pi$-периодическом случае).*

*В частности, любая последовательность $\frac{1}{\pi}P(r_n,t)$ с $r_n\in[0,1)$, $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-0$, является дельтаобразной последовательностью.*

▼ Ядра Пуассона неотрицательны и

$$\int\limits_0^{2\pi} P_r(t)\,dt = \int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{ikt}+e^{-ikt}\right)r^k\,dt = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{2\pi} 2\cos nt\cdot r^n\,dt = \pi,$$

поэтому свойства 1) и 2) аппроксимативной единицы выполняются. Остается проверить свойство 3). Для любого $\delta\in(0,\pi)$

$$\int\limits_{\delta}^{2\pi-\delta} P_r(t)\,dt = \left(\int\limits_{-\pi}^{-\delta}+\int\limits_{\delta}^{\pi}\right)P_r(t)\,dt \leqslant \frac{1-r^2}{4r\sin^2\frac{\delta}{2}}(2\pi-2\delta) \leqslant \frac{\pi(1-r^2)}{2r\sin^2\frac{\delta}{2}} \xrightarrow[r\to 1-0]{} 0.$$

Значит, свойство 3) также выполняется. ▲

**Теорема 2 (Пуассона)**. *Если $f$ — $2\pi$-периодическая интегрируемая по Риману функция, то в каждой точке ее непрерывности $x$*

$$f(r;x) = f*\frac{1}{\pi}P_r(x) \xrightarrow[r\to 1-0]{} f(x),$$

*в каждой точке $x$ устранимого разрыва или разрыва I рода*

$$f(r;x) = f*\frac{1}{\pi}P_r(x) \xrightarrow[r\to 1-0]{} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

*а если $f$ непрерывна всюду, то*

$$f(r;x) = f*\frac{1}{\pi}P_r(x) \underset{r\to 1-0}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} f(x).$$

▼ Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы Фейера.

Первое и третье утверждения теоремы непосредственно следуют из леммы и теоремы об аппроксимативной единице (надо использовать определение предела по Гейне).

Первый и второй пункты теоремы также следуют из теорем Фейера и Фробениуса (о том, что суммируемая методом средних арифметических последовательность суммируется и методом Абеля к той же величине). ▲

## Пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в точке.

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, заданная на $[0,\pi]$ формулой

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

(т.е. $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k|x|)$), с условием того, что все $b_k \geq 0$ и ряд $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Тогда заданный ряд сходится равномерно, функция $f(x)$ всюду непрерывна и $f(0)=0$.

Подберем $b_k$ так, что ряд Фурье функции $f$ расходится в точке $x=0$.

В силу четности $f$ и равномерной сходимости ряда имеем

$$S_n(f,0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(-t)dt=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} f(t)D_n(t)dt=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\int\limits_{0}^{\pi}\sin(kt)D_n(t)dt=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\beta_{k,n},$$

где $\beta_{k,n}=2\int\limits_{0}^{\pi}\sin(kt)D_n(t)dt$. Покажем, что для всех натуральных $k$ и $n$ выполнено $\beta_{k,n}\geq 0$.

Для любого $j\in\mathbb{N}$ имеем $\int\limits_{0}^{\pi}\sin jt\ dt=\frac{1-(-1)^j}{j}\geq 0$ $(*)$.

Далее,

$$2\sin(kt)D_n(t)=2\sin(kt)(\frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{n}\cos jt)=\sin kt+\sum_{j=1}^{n}(\sin(k+j)y+\sin(k-j)t)$$

При $k>n$ имеем $k-j>0$ для $j=1,\ldots,n$, отсюда и из полученного равенства имеем $\beta_{k,n}\geq 0$ при $k>n$.

Для $k\leq n$ преобразуем полученное равенство, разбив сумму в две, первую сгруппировав с первым слагаемым, вторую разбив в разность сумм с положительными множителями:

$$2\sin(kt)D_n(t)=\sum_{j=0}^{n}\sin(k+j)t+\sum_{j=1}^{k-1}\sin(k-j)t-\sum_{j=k+1}^{n}\sin(j-k)t=$$

$$=\sum_{j=1}^{n+k}\sin jt-\sum_{j=1}^{n-k}\sin jt=\sum_{j=n-k+1}^{n+k}\sin jt\quad(**)$$

Отсюда в силу $(*)$ имеем, что $\beta_{k,n}\geq 0$.

Получаем, что

$$S_n(f,0) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\beta_{k,n} \geq \frac{1}{\pi} b_n\beta_{n,n}$$

Из (**) при $k = n$ получаем

$$2\sin nt\ D_n(t) = \sum_{j=1}^{2n} \sin jt,$$

значит,

$$\beta_{n,n} = \int_0^{\pi} \sum_{j=1}^{2n} \sin jt dt = \sum_{j=1}^{2n} \frac{1-(-1)^j}{j} = \sum_{m=1}^{n} \frac{2}{2m-1} > \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} > \int_1^n \frac{du}{u} = \ln n$$

поэтому

$$S_n(f,0) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\beta_{k,n} \geq \frac{1}{\pi} b_n \ln n$$

Теперь подберем числа $b_n$ так, чтобы это выражение не стремилось к нулю — значению функции в нуле. Можем выбрать даже так, чтобы это выражение расходилось (помня про условия в начале построения). Положим

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{m^2}, \text{ если } n = 2^{m^3} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

тогда для $n = 2^{m^3}$ имеем

$$S_n(f,0) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{m^2}\ln(2^{m^3}) = \frac{\ln 2}{\pi} m,$$

что расходится. Значит, ряд Фурье непрерывной функции $f$ расходится в точке $x = 0$.

Нетрудно, используя этот пример и принцип локализации Римана, построить пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в конечном числе точек на отрезке $[-\pi, \pi]$.

**Пример всюду непрерывной, нигде не дифференцируемой функции.**

Таким примером служит функция-тригонометрический ряд $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\sin 8^k x$. Непрерывность следует из равномерной сходимости ряда. Пусть $x$ — произвольная действительная точка. Покажем, что $\varphi$ не дифференцируема в точке $x$. От противного: если бы $\varphi$ имела производную в точке $x$, то существовал бы предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(x\pm\pi 2^{-3n-1})-\varphi(x)}{\pm\pi 2^{-3n-1}}$ (знак для каждого конкретного $n \in \mathbb{N}$ будет выбран позже). Оценим числитель.

Если $k > n$, то $8^k \cdot 2^{-3n-1}$ — целое четное число, поэтому в силу $2\pi$-периодичности синуса имеем

$$\sin 8^k(x \pm \pi 2^{-3n-1}) = \sin 8^k x.$$

Значит,

$$\varphi(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}(\sin 8^k(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \sin 8^k x)$$

Отсюда

$$|\varphi(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \varphi(x)| = |\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}(\sin 8^k(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \sin 8^k x)| \geq$$

$$\geq |2^{-n}(\sin 8^n(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \sin 8^n x)| - |\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}(\sin 8^k(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \sin 8^k x)|$$

Оценим сверху сумму, пользуясь неравенством $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$:

$$|\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k}(\sin 8^k(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \sin 8^k x)| \leq \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} 8^k \pi 2^{-3n-1} =$$

$$= \pi 2^{-3n-1} \sum_{k=1}^{n-1} 4^k = \pi 2^{-3n-1} \frac{4 - 4^n}{1 - 4} < 2^{-n} \frac{\pi}{6}$$

Оценим снизу слагаемое при $k = n$:

$$2^{-n}(\sin 8^n(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \sin 8^n x) = 2^{-n}(\sin(8^n x \pm \pi/2) - \sin 8^n x) =$$

$$= 2^{-n} \cdot 2 \sin(\pm\pi/4) \cdot \cos(8^n x \pm \pi/4)$$

Пришло время выбрать знак для $\pm$. При каждом $n$ его можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$|\cos(8^n x \pm \pi/4)| \geq \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

В самом деле, расстояние между числами $8^n x + \pi/4$ и $8^n x - \pi/4$ равно $\pi/2$, а из двух чисел $|\cos\alpha|$ и $|\cos(\alpha + \pi/2)| = |\sin\alpha|$ хотя бы одно больше или равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (иначе бы не выполнялось основное тригонометрическое тождество).

Из вышесказанного следует, что (при соответствующем выборе знака)

$$|\varphi(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \varphi(x)| > 2^{-n} 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-n} \frac{\pi}{6} = 2^{-n}(1 - \pi/6)$$

Значит,

$$\left|\frac{\varphi(x \pm \pi 2^{-3n-1}) - \varphi(x)}{\pm\pi 2^{-3n-1}}\right| > 2^{2n+1}(1 - \pi/6)\frac{1}{\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

т.е. функция $\varphi$ не имеет производной в точке $x$. В силу произвольности $x$, функция $\varphi$ нигде не дифференцируема.