

**Краткие экзаменационные вопросы
по курсу математического анализа
в III семестре для 1 потока 2 курса
механико-математического ф-та МГУ
в 2020/21 уч. г. Лектор — доц. Д.В. Фуфаев**

1. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимое условие сходимости.
2. Операции над рядами. Абсолютная и условная сходимости.
3. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости: ограниченность частичных сумм, сравнения.
4. Признаки Даламбера и Коши.
5. Интегральный признак Коши–Маклорена.
6. Признак Куммера.
7. Признаки Раабе и Гаусса.
8. Признак сходимости Лейбница.
9. Последовательности ограниченной вариации и их свойства.
10. Преобразование Абеля.
11. Признак сходимости Абеля.
12. Признак сходимости Дирихле.
13. Теорема Коши о перестановках членов ряда.
14. Теорема Римана о перестановках членов ряда.
15. Умножение числовых рядов. Теорема Коши.
16. Умножение числовых рядов. Теорема Мертенса.
17. Бесконечные произведения, условия сходимости.
18. Разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение.
19. Разложение функции $\cos x$ в бесконечное произведение и формула Валлиса.
20. Метод суммирования Чезаро (средних арифметических), его вполне регулярность и необходимое условие суммируемости.
21. Метод суммирования Абеля. Теорема Фробениуса.
22. Метод суммирования Абеля. Вполне регулярность метода Абеля.
23. Теорема Таубера.
24. Тауберова теорема Харди.
25. Критерий Маркова-Гордона.
26. Равномерная сходимость по базе и перестановка предельных переходов.
27. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость и операции с ней. Критерий Коши равномерной сходимости. Супремум-критерий.
28. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса и Дини.
29. Признак равномерной сходимости Лейбница.
30. Признак равномерной сходимости Абеля.
31. Признак равномерной сходимости Дирихле.
32. Теорема об изменении порядка пределов и следствия из неё. Пространство $C(K)$ непрерывных на компакте функций и его полнота.
33. Почленное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.
34. Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов.
35. Критерий компактности Хаусдорфа.

36. Равностепенная непрерывность. Теорема Арцеля–Асколи.
37. Степенные ряды. Теорема Коши–Адамара. Непрерывность суммы степенного ряда. Теорема Абеля (первая).
38. Дифференцируемость и интегрируемость суммы степенного ряда.
39. Степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы. Теорема единственности. Теорема Абеля (вторая).
40. (*) Применения теории степенных рядов. Аналитические комплексные функции.
41. Функции, зависящие от параметра (семейства функций); равномерное стремление к пределу; связь с равномерной сходимостью последовательностей. Критерий Коши. Супремум-критерий. Свойства равномерной сходимости.
42. Перестановка пределов и непрерывность для семейств функций.
43. Дифференцирование пределов функций, зависящих от параметра.
44. Интегрирование пределов функций, зависящих от параметра.
45. Собственные интегралы с параметром. Их свойства: переход к пределу, непрерывность.
46. Дифференцируемость и интегрируемость собственных интегралов с параметром.
47. Несобственные интегралы с параметром, их равномерная сходимость. Критерий Коши, супремум-критерий.
48. Признаки равномерной сходимости Вейерштрасса и Дини.
49. Признак равномерной сходимости Абеля.
50. Признак равномерной сходимости Дирихле.
51. Переход к пределу и непрерывность для несобственных интегралов с параметром.
52. Дифференцируемость и собственная интегрируемость несобственных интегралов с параметром.
53. Несобственная интегрируемость несобственных интегралов с параметром.
54. Вычисление интеграла Дирихле.
55. Формулы Фруллани.
56. Гамма-функция Эйлера, формула Эйлера.
57. Формула дополнения для Гамма-функции, интеграл Эйлера-Пуассона.
58. Бета-функция Эйлера и формулы для нее.
59. Связь функций Эйлера.
60. Формула Стирлинга.
61. Пространства со скалярным произведением. Неравенство Коши-Буняковского. Предгильбертовы и гильбертовы пространства.
62. Ортогональные системы. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Тождество Бесселя и неравенство Бесселя и следствия из него.
63. Ряд Фурье, его сходимость и связь сходимости с равенством Парсеваля.
64. Ряды в предгильбертовом и гильбертовом пространстве. Замкнутость, равенство Парсеваля, полнота и связь этих понятий.
65. Пространство l^2 , его полнота. Пространства функций.
66. Свёртка и её свойства.
67. Аппроксимативные единицы (δ -образные последовательности) и теоремы о них.
68. Примеры аппроксимативных единиц.
69. Теорема Вейерштрасса о приближении алгебраическими многочленами.

70. Теорема Вейерштрасса о приближении тригонометрическими многочленами.
71. Теоремы Римана-Лебега.
72. Тригонометрическая система, ее ортогональность. Замкнутость тригонометрической системы в пространстве непрерывных 2π -периодических функций.
73. Замкнутость тригонометрической системы в пространстве интегрируемых на отрезке длины 2π функций.
74. Последовательность Фурье, ее основные свойства.
75. Равенство Парсеваля для тригонометрического ряда Фурье, последовательность Фурье свертки.
76. Тригонометрический ряд Фурье, его основные свойства.
77. Почленное интегрирование ряда Фурье. Следствия.
78. Частичные суммы тригонометрического ряда Фурье, ядро Дирихле.
79. Признак Дини сходимости ряда Фурье и следствия из него. Принцип локализации Римана.
80. Средние Чезаро-Фейера. Ядро Фейера, его свойства. Теорема Фейера.
81. Тауберова теорема Харди (равномерный вариант). Признак Дирихле-Жордана.
82. Средние Абеля-Пуассона. Ядро Пуассона, его свойства. Теорема Пуассона.
83. (*) Пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится в одной точке и в конечном числе точек.
84. (*) Пример непрерывной, нигде не дифференцируемой функции.

Лектор доцент

Д.В. Фуфаев