И.Х. Сабитов

Конспекты семинаров по курсу математического анализа

Тема: Задачи № 637.1-637.3.

Задача № 637.1 из задачника Демидовича:

Элементы последовательности (x_n) заданы рекуррентным соотношением

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}), n > 2 \tag{1}$$

со следующими начальными значениями $x_1 = 0, x_2 = 1$. Найти $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Выпишем несколько элементов этой последовательности

$$x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = \frac{3}{4},\ x_5 = \frac{5}{8},\ x_6 = 1116,\ x_7 = \frac{41}{32}$$

и заметим для них следующие закономерности

$$x_{2n} > x_{2n-1},\ x_{2n} > x_{2n+1},\ x_{2n+1} < x_{2n},\ x_{2n+1} < x_{2n+2},\ x_{2n} < x_{2n-2},\ x_{2n+1} > x_{2n-1},\ n = 1, 2, 3. \tag{2}$$

По индукции легко показывается справедливость этих неравенств для всех элементов четными и нечетными номерами (например, из равенства

$$x_{2n+4} = \frac{1}{2}(x_{2n+3} + x_{2n+2}), n > 2$$

получим

$$\frac{x_{2n+4}}{x_{2n+2}} = \frac{1}{2}(\frac{x_{2n+3}}{x_{2n+2}} + 1) < 1,$$

так как по индукционному предположению элемент x_{2n+3} с нечетным номером меньше соседнего элемента с четным номером). Следовательно, элементы с четными номерами составляют убывающую последовательность, а с нечетными номерами – возрастающую последовательность. Элеенты с четными номерами ограничены снизу числом 0, поэтому они сходятся к некоторому значению a. Покажем, что элементы с нечетными номерами ограничены сверху. Действительно, $x_{2n+1} < x_{2n} < x_{2n-2} < ... < x_2 = 1$. Значит, последовательность элементов с нечетными номерами сходится к некоторому пределу b. Тогда для элементов x_n с четными номерами n из (1) в пределе имеем равенство

$$a = \frac{1}{2}(b + a).$$

Аналогично, для элементов x_n с нечетными элементами в пределе имеем

$$b = \frac{1}{2}(a + b),$$

следовательно, $a = b$. Переход к пределу в равенстве (1) дает тождество $a = a$, поэтому надо искать другой способ нахождения a. Для этого выпишем равенство (1) для значений $n = 2, 3, ..., N$

$$\begin{aligned}
x_2 &= 1\\
x_3 &= \frac{1}{2}(x_2 + x_1)\\
x_4 &= \frac{1}{2}(x_3 + x_2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_{N-1} &= \frac{1}{2}(x_{N-2} + x_{N-3})\\
x_N &= \frac{1}{2}(x_{N-1} + x_{N-2}).
\end{aligned}$$

Сложим все эти равенства и получим равенство

$$x_N + x_{N-1} = 1 + \frac{1}{2}x_{N-1}$$

откуда, переходя пределу получим ответ $2a = 1 + \dfrac{a}{2}$ или

$$\lim_{N\to\infty} x_N = \frac{2}{3}.$$

Задача № 637.2.

Элементы последовательностей x_n и y_n связаны соотношениями

$$y_0 = x_0,\ y_n = x_n - \alpha x_{n-1}\ (n = 1, 2, ...), \tag{3}$$

где $|\alpha| < 1$. Известно, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} y_n = b \in \mathbb{R}.$$

Найти $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Решение. Если бы мы знали существование предела x_n, то найти его из (3) не было бы никакой проблемы. Покажем, что этот предел действительно существует, для чего докажем выполнение для последовательности критерия Коши. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Так как по условию последовательность y_n имеет предел, то для нее выполнено условие критерия Коши

$$\forall\varepsilon\ \exists N_1\ : \forall n, k > N_1 \Rightarrow |y_n - y_k| < \frac{(1-|\alpha|)\varepsilon}{2C}, .$$

где $C = sup|y_n|$ (такое число существует, так как последовательность (y_n)) ограниченная). Последовательным применением соотношений (3) находим

$$x_n = y_n + \alpha x_{n-1} = y_n + \alpha(y_{n-1} + \alpha x_{n-2}) = ... = y_n + \alpha y_{n-1} + \alpha^2 y_{n-2} + ... + \alpha^n y_0.$$

Теперь найдем N_2, такое, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{2C|\alpha|^{N_2}}{1-|\alpha|} < \frac{1}{2}\varepsilon$$

(такое N_2 существует, так как $|\alpha| < 1$ и $|\alpha|^n \to 0$ при $n \to \infty$). Пусть $N = max(N_1, N_2)$. Составим для номеров $n > 2N$ разность

$$|x_{n+p} - x_n| = |(y_{n+p} + \alpha y_{n-1} + ... + \alpha^{N-1} y_{n+p-N+1} + \alpha^N y_{n+p-N} + ... + \alpha^{n+p} y_0) -$$
$$-(y_n + \alpha y_{n-1} + ... + \alpha^{N-1} y_{n-N+1} + \alpha^N y_{n-N} + ... + \alpha^n y_0)| \leq$$
$$|y_{n+p} - y_n| + |\alpha||y_{n+p-1} - y_{n-1}| + ... + |\alpha|^{N-1}|y_{n+p-N+1} - y_{n-N+1}| + \frac{2C|\alpha|^N}{1-|\alpha|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(в двух местах учтено, что сумма вида $1 + |\alpha| + ... + |\alpha|^k$ меньше суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, равной $\frac{1}{1-|\alpha|}$).

Итак, получено, что для последовательности (x_n) выполнено условие Коши, значит, она имеет предел. Переходим в (3) к пределу и получим, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1-\alpha}.$$

Задача № 637.3.

Последовательность x_n задана рекуррентным соотношением

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}. \tag{4}$$

Найти $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Воспользуемся указанием и будем считать, что мы решаем задачу нахождения неподвижной точки функции $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, т.е. решения уравнения $x = f(x)$ (это действительно будет так, если мы докажем, что gоследовательность x_n сходится). Для исследования задачи полезно рассмотреть ее геометрическое представление как нахождение точки пересечения прямой $y = x$ с графиком функции $y = f(x)$.

Из условия задачи видим, что последовательность ограничена неравенствами $0 < x_n < 1$. Выпишем несколько ее элементов:

$$x_0 = 1,\ x_{\frac{1}{2}},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = \frac{3}{5},\ x_4 = \frac{5}{8},\ x_5 = \frac{8}{13}.$$

Замечаем, что выполнены неравенства $x_0 > x_2 > x_4,\ x_1 < x_3 < x_5$. Это наводит на мысль, что x_n с четными номерами убывают, а с нечетными номерами возрастают и что $x_{2n} > x_{2n+1}$. Проверим, что это действительно так. Решим уравнение $x = \dfrac{1}{1+x}$, и получим корень $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Проверяем, что $x_2 > a$ и $x_3 < a$. Покажем индукцией, что все $x_{2n} > a$ и что при всех n имеем $x_{2n} < x_{2n-2}$. Находим,. что

$$x_{2n} = \frac{1}{1+x_{2n-1}} = \frac{1+x_{2n-2}}{2+x_{2n-2}}.$$

Допустив, что $x_{2n} \geq x_{2n-2}$ и зная по индукционному предположению, что $x_{2n-2} > a$, придем противоречию. Далее, зная по индукционному предположению, что $x_{2n-1} < a$, показываем, что $x_{2n} = \frac{1}{1+x_{2n-1}} > \frac{1}{1+a} = a$. Такие же рассмотрения покажут возрастание последовательности x_{2n+1}. Значит, у обеих последовательностей с четными и нечетными номерами существуют пределы. Используя представления

$$x_{2n} = \frac{1+x_{2n-2}}{2+x_{2n-2}},\ x_{2n+1} == \frac{1+x_{2n-1}}{2+x_{2n-1}}$$

убеждаемся, что оба предела совпадают и равны $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.