И.Х. Сабитов

Конспекты семинаров по курсу математического анализа

Тема: Задачи № 608-610.

Напишем условие задачи № 608а из задачника Демидовича в следующем виде

Пусть функция $f(x)$ определена в бесконечном интервале $(a, +\infty)$ и ограничена в каждом конечном интервале (a, b). Тогда

$$\exists \lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x)) = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = L.$$

Лемма 1. *В условиях задачи для каждого $x_0 > a$ верно утверждение*

$$\exists \lim_{n\to+\infty}\frac{f(t+n)}{t+n} = L.$$

Доказательство. Можно предложить два доказательства леммы.

Первое. Введем последовательности $z_n = f(t+n)$ и $y_n = t+n$. Для них выполнены условия теоремы Штольца. Действительно, $y_n \uparrow \infty$ и из существования предела $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = L$ следует существование того же предела для любой подпоследовательности точек $x_n \to \infty$, в частности, и для $x_n = t+n$. Тогда теорема Штольца дает

$$\exists \lim_{n\to+\infty}\frac{z_{n+1}-z_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to+\infty}(f(x_n+1)-f(x_n)) = L \Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t+n)}{t+n} = L.$$

Второе. (Это д-во полезно своей часто используемой идеей.) Зафиксируем некоторое произвольное $\varepsilon > 0$. В силу условия задачи существует значение X, такое, что для всех $x > X$ верно неравенство

$$|(f(x+1)-f(x)) - L| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Выберем некоторое $x_0 > X$ и для произвольного $t \in [x_0, x_0+1)$ выпишем цепочку неравенств

$$\begin{array}{r} L-\frac{\varepsilon}{4} < f(t+1)-f(t) < L+\frac{\varepsilon}{4} \\ L-\frac{\varepsilon}{4} < f(t+2)-f(t+1) < L+\frac{\varepsilon}{4} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L-\frac{\varepsilon}{4} < f(t+n)-f(t+n-1) < L+\frac{\varepsilon}{4} \end{array}$$

Сложив все эти неравенства, получим неравенство

$$|\frac{f(t+n)-f(t)}{n} - L| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1}$$

Представим разность $\dfrac{f(t+n)}{t+n} - L$ в виде

$$|\frac{f(t+n)}{t+n} - L| = |\frac{f(t+n)}{t+n} - \frac{f(t+n)-f(n)}{n} + \frac{f(t+n)-f(n)}{n} - L| <$$
$$|\frac{f(t+n)-f(n)}{n} - \frac{f(t+n)}{t+n}| + \frac{\varepsilon}{4} \le |\frac{f(t+n)-f(n)}{n}||\frac{t}{t+n}| + |\frac{f(t)}{t+n}| + \frac{\varepsilon}{4}$$

и при достаточно большом N для $n > N$ получим оценку

$$|\frac{f(t+n)}{t+n} - L| < \varepsilon,$$

что и дает второе доказательство леммы.

Теперь получим решение самой задачи. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем некоторое x_0. Для достаточно больших x можем утверждать, что для x существует n, больше того N, которое встречалось во втором доказательстве (и в первом, достаточное для проверки выполнения определения предела при данном ε), такое; что x представимо в виде $x = t+n$, где t - некоторое число из промежутка $[x_0, x_0+1)$, т.е. x находится в промежутке $[x_0+n, x_0+n+1)$. А по лемме для всех таких x имеем

$$|\frac{f(x)}{x} - L| = |\frac{f(t+n)}{t+n} - L| < \varepsilon,$$

что и гарантирует существование нужного предела L.

Задача № 608б решается сведением ее к случаю а) путем введения функции $g(x) = \ln f(x)$.

Задача 609. Это фактически предыдущая задача при значениях $L = \pm$
$infty$. Вместо доказательства существования нужного X при данном ε нужно проверять выполнение определения предела, равного бесконечности, что не должно вызывать никаких идейных проблем.

Задача 610. Сформулируем задачу Пусть функция $f(x)$ определена в бесконечном интервале $(a, +\infty)$ и ограничена в каждом конечном интервале (a, b). Тогда

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} = L \Rightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{L}{n+1},$$

где n - данное натуральное число.

Мы рассмотрим случай конечного L и $n = 1$. Снова сведем задачу к использованию теоремы Штольца. Рассмотрим отношение вида

$$\frac{f(x+n)}{(x+n)^2}.$$

Положим $z_n = f(x+n), y_n = (x+n)^2$. Убедимся, что к этим последовательностям применима теорема Штольца. Составим разность

$$|\frac{z_{n+1} - z_n}{y_{n+1} - y_n} - \frac{L}{2}| = |\frac{f(x+n+1) - f(x+n)}{2(x+n)+1} - \frac{L}{2}| \leq |\frac{f(x+n+1) - f(x+n)}{2(x+n)} - \frac{L}{2}| +$$
$$|\frac{f(x+n+1) - f(x+n)}{2(x+n)+1} - \frac{f(x+n+1) - f(x+n)}{2(x+n)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + |\frac{f(x+n+1) - f(x+n)}{2(x+n)} \frac{1}{2(x+n)+1}| < \varepsilon$$

(мы воспользовались выполнением определения предела в условии задачи при произвольно взятом $\frac{\varepsilon}{2}$, ограниченностью L и бесконечной малостью множителя $\frac{1}{2(x+n)+1}$ при $n \to \infty$). Значит,

$$\exists \frac{1}{2(x+n)+1} = \frac{L}{2},$$

а дальше рассуждаем как и при решении задачи № 608а.

Случаи $n \geq 2$ и бесконечного L оставляем студентам.

Вопрос для размышлений: что бывает, если параметр n не является натуральным числом?