Экзаменационные вопросы
по курсу математического анализа
во II семестре для 1 потока 1 курса
механико-математического ф-та МГУ
в 2011/12 уч. г. Лектор — проф. Т.П. Лукашенко

1. Определённые интегралы Римана и Курцвейля–Хенстока. Лемма о существовании разбиений. Простейшие свойства интегралов. Критерии Коши интегрируемости.

2. Интегрируемость на подотрезках. Необходимое условие интегрируемости по Риману. Аддитивность интегралов по отрезкам.

3. Интегрируемость производных по Курцвейлю–Хенстоку, формула Ньютона–Лейбница и следствия из неё.

4. Верхняя мера Лебега и её свойства. Множества меры нуль по Лебегу и их свойства.

5. Интегрируемость ограниченных и почти всюду непрерывных функций по Риману.

6. Ограниченность и непрерывность почти всюду функций, интегрируемых по Риману. Критерий Лебега интегрируемости по Риману и следующие из него дополнительные свойства интеграла Римана.

7. Два определения измеримых на отрезке функций, их эквивалентность.

8. Интегрируемость по Курцвейлю–Хенстоку ограниченных измеримых функций. Интегрируемость по Курцвейлю–Хенстоку функции, равной нулю почти всюду.

9. Интеграл с переменным верхним пределом. Принадлежность классу Липшица при условии ограниченности. Дифференцируемость в точке. Существование первообразных.

10. Слабая и сильная леммы Колмогорова–Сакса–Хенстока. Непрерывность интегралов с переменным верхним пределом.

11. Покрытие в смысле Витали. Теоремы Витали.

12. Дифференцируемость почти всюду интеграла Курцвейля–Хенстока с переменным верхним пределом. Неравенство Чебышёва.

13. Определённые интегралы Римана–Стилтьеса и Курцвейля–Хенстока–Стилтьеса; их простейшие свойства. Критерии Коши интегрируемости по Риману–Стилтьесу и по Курцвейлю–Хенстоку–Стилтьесу.

14. Интегрируемость по Риману–Стилтьесу и Курцвейлю–Хенстоку–Стилтьесу на подотрезках. Аддитивность интегралов Стилтьеса по отрезкам.

15. Функции ограниченной вариации и их свойства. Функции ограниченной вариации как разность неубывающих функций.

16. Интегрируемость в смысле Римана–Стилтьеса непрерывных функций по функциям ограниченной вариации. Интегрирование по частям в интеграле Римана–Стилтьеса.

17. Сведение интеграла Римана–Стилтьеса к интегралу Римана. Интегрирование по частям для интеграла Римана.

18. Сведение интеграла Курцвейля–Хенстока к интегралу Римана–Стилтьеса. Сохранение интегрируемости по Курцвейлю–Хенстоку при умножении на функции ограниченной вариации.

19. Замена переменной в интегралах. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

20. Первая и вторая теоремы о среднем для произведения функций и интегралов Стилтьеса.

21. Несобственные интегралы. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Абсолютная и условная сходимости. Признаки сходимости сравнения, Абеля и Дирихле.

22. Метрические и нормированные пространства. Пространство $\mathbb{R}^n$, норма и метрика в нём.

23. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах, их свойства.

24. Компакты, их свойства. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$. Теорема Больцано–Вейерштрасса о существовании предельной точки.

25. Последовательности в метрических, нормированных пространствах и в $\mathbb{R}^n$, их пределы, свойства.

26. Полные метрические пространства. Принцип замкнутых вложенных шаров. Полнота $\mathbb{R}^n$.

27. Предел функции и его свойства (в метрических и нормированных пространствах).

28. Непрерывные функции и их свойства (в метрических и нормированных пространствах). Принцип сжимающих отображений.

29. Непрерывные функции на компактах и их свойства.

30. Связные множества в метрических и нормированных пространствах и их свойства.

31. Путь (кривая), длина пути (кривой) и свойства длины в метрических пространствах, нормированных пространствах и в $\mathbb{R}^n$.

32. Дифференцируемость функций нескольких переменных. Дифференциал. Частные производные. Достаточные условия дифференцируемости.

33. Геометрический смысл дифференцируемости функций нескольких переменных. Производная по направлению. Градиент.

34. Правила дифференцирования. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

35. Теоремы о равенстве смешанных производных.

36. Формула Тейлора функции нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа, Пеано и в интегральной форме.

37. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия его существования.

38. Теоремы о существовании и дифференцируемости неявных функций.

39. Условный экстремум. Метод неопределённых множителей Лагранжа его отыскания.

Лектор профессор Т.П.Лукашенко

Зав. кафедрой математического анализа
академик РАН В.А.Садовничий