**Лекция 1** (02.09.20)
**Числовые ряды**

Определения. Критерий сходимости Коши

Сумму, содержащую бесконечное число слагаемых, в математике называют **бесконечным рядом** (или просто **рядом** или **бесконечной суммой**). Слагаемые называют *членами ряда.*

Такое общее понятие необходимо сузить и конкретизировать для дальнейшего применения. Напомним уже встречавшееся определение.

**Определение 1.** Пусть $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$ — последовательность, пронумерованная (заиндексированная) целыми числами, начиная с числа $n \in \mathbb{Z}$. **Бесконечным рядом** (или просто **рядом** или **бесконечной суммой**) называется выражение вида

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots,$$

записываемое также более кратко как

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k.$$

Обычно ограничиваются рассмотрением случая $n = 1$ или $n = 0$, так как остальные случаи изменением нумерации можно свести к ним.

**Определение 2**. Если все элементы последовательности $a_k$, $k = n, n+1, \dots,$ — числа (действительные или комплексные), то ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ называют **числовым рядом**.

**Определения 3-4**. Элементы последовательности $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$, рассматриваемые как элементы ряда $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$, называют **членами ряда**; элемент $a_k$ называют $k$-ым **членом ряда** или **членом ряда** с номером $k$.

Сумму $\boldsymbol{S}_N = \sum\limits_{k=n}^{N} a_k$ называют **частичной суммой** ряда или, когда желают указать ее номер, $N$-ой **частичной суммой** ряда.

Принято считать, что сумма $\sum\limits_{k=n}^{N} a_k = 0$ при $n > N$ (т.е. сумма пустого множества слагаемых равна нулю).

Можно рассматривать ряды, члены которых принадлежат пространству (множеству), на котором определены операции сложения и предельного перехода. Например, можно рассматривать ряды элементов нормированного пространства.

Будем рассматривать ряды, члены которых действительные или комплексные числа, с указаниями, сохраняются ли излагаемые результаты для рядов в нормированных пространствах.

**Определения 5-7**. Если последовательность частичных сумм $\{\boldsymbol{S}_N\}$ (от $N = n$ до $\infty$ или от $N = 1$ до $\infty$) сходится к действительному (или комплексному) числу $\boldsymbol{S}$ или (для случая действительных чисел) к $\boldsymbol{S} = \pm\infty$, то $\boldsymbol{S}$ называют **суммой ряда** и пишут $\boldsymbol{S} = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$. Ряд, имеющий конечную сумму, называют **сходящимся**, а если последовательность частичных сумм $\{\boldsymbol{S}_N\}$ не имеет конечного предела, то ряд называют **расходящимся**.

Таким образом, выяснение сходимости ряда и нахождение его суммы сводится к выяснению сходимости последовательности частичных сумм и к нахождению ее предела. А так как зная последовательность частичных сумм ряда можно восстановить его члены, то верно и обратное, можно выяснение сходимости последовательностей и нахождение их пределов сводить к выяснению сходимости рядов и нахождению их сумм. Изучение рядов наряду с изучением последовательностей объясняется их распространением в математике и ее приложениях, а также тем, что целый ряд признаков сходимости естественнее формулируется для рядов, а не для последовательностей.

**Определение 8**. Если ряд сходится, то величину $\boldsymbol{r}_N = \boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}_N = \sum\limits_{k>N} a_k$ называют $N$-ым **остатком ряда**, это бесконечно малая величина.

Уже отмечалось, что любой ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ можно, сдвинув нумерацию на $n$ или на $n-1$, превратить в ряд, нумерация которого начинается либо с 0, либо с 1. Изменение ряда можно совершить и иначе, при $n > 0$ или $n > 1$, соответственно, добавив в начале ряда необходимое количество членов — нулей, а при $n < 0$ или $n < 1$ заменив $a_0$ на $\sum\limits_{k=n}^{0} a_k$ или $a_1$ на $\sum\limits_{k=n}^{1} a_k$, соответственно. Поэтому для стандартизации будем рассматривать числовые ряды нумерация которых начинается с 1, т.е. ряды вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

В первом семестре был доказан критерий Коши сходимости числового ряда (фактически был переформулирован критерий Коши сходимости последовательности). Напомним его.

**Критерий Коши.** *Ряд действительных (комплексных) чисел* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall p \quad (n \text{ и } p \text{ — натуральные числа}):$$

$$|\boldsymbol{S}_{n+p} - \boldsymbol{S}_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

*или, что эквивалентно,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall l > N \quad \forall m > N:$$

$$\left| \sum_{k=l}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

**Следствие 1** (необходимое условие сходимости ряда). *Для того, чтобы ряд сходился, необходимо, чтобы его члены стремились к нулю.*

Это следует как из критерия Коши сходимости ряда, если взять в нем $p = 1$ или $l = m$, так и из того, что $a_k = \boldsymbol{S}_k - \boldsymbol{S}_{k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, если последовательность $\boldsymbol{S}_k$ сходится.

**Следствие 2**. *Сходимость или расходимость ряда не изменится, если изменить, дописать или вычеркнуть любое конечное число членов ряда.*

## Абсолютная и условная сходимости

**Определение 9**. Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд из модулей его членов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ (для ряда в нормированном пространстве — ряд из норм его членов).

**Теорема 1**. *Абсолютно сходящийся ряд сходится и его $n$-ый остаток $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ по модулю не больше $n$-ого остатка ряда из модулей $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$ (т.е. $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$).*

▼ Если ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k|$ сходится, то для него выполняется критерий Коши сходимости ряда: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \forall m > N:\ \sum\limits_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Но тогда, в силу неравенства $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n}^{m} |a_k|$, и для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ выполняется критерий Коши, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. При этом

$$|\boldsymbol{r}_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| = \lim_{m\to\infty} \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|. \blacktriangle$$

**Определение 10**. Сходящийся числовой ряд, который не сходится абсолютно, называют сходящимся **условно**.

**Примечание**. Критерий Коши сходимости ряда и теорема 1 сохраняют верность в банаховых пространствах, если в них модули заменить на нормы.

## Операции над рядами

**Теорема 2**.

*а) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (абсолютно сходится) и $\boldsymbol{S}$ — его сумма, то для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\in \mathbb{C}$) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ также сходится (абсолютно сходится) и $\alpha\boldsymbol{S}$ — его сумма.*

*б) Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся (абсолютно сходятся) и имеют, соответственно, суммы $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{S}'$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ также сходится (абсолютно сходится) и $\boldsymbol{S} \pm \boldsymbol{S}'$ — его сумма.*

*в) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (абсолютно сходится) и $\boldsymbol{S}$ — его сумма, то сходится (абсолютно сходится) и имеет ту же сумму $\boldsymbol{S}$ ряд*

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} a_k\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\sum_{n_p < k \leqslant n_{p+1}} a_k\right),$$

*где $0 = n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, т.е. можно группировать скобками подряд члены сходящегося (абсолютно сходящегося) ряда. А если $a_k \to 0$ и $(n_{p+1} - n_p)$ — ограниченная последовательность, то из сходимости сгруппированного ряда с суммой $\boldsymbol{S}$ следует сходимость первоначального ряда и его сумма также $\boldsymbol{S}$.*

▼ а) Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \boldsymbol{S}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \alpha\boldsymbol{S}$.

б) Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \boldsymbol{S}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \boldsymbol{S}'$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \pm \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \boldsymbol{S} \pm \boldsymbol{S}'$.

Если в а) и б) под знаки сумм поставить знак модуля, то получится доказательство утверждений об абсолютной сходимости.

в) Частичные суммы сгруппированного ряда образуют подпоследовательность последовательности частичных сумм начального ряда и, следовательно, сходятся к тому же пределу $\boldsymbol{S}$. При этом если под знаками сумм поставить модули, то, учитывая неравенство $\left|\sum\limits_{n_r<k\leqslant n_{r+1}} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{n_r<k\leqslant n_{r+1}} |a_k|$, получим, что частичные суммы ряда $\sum\limits_{r=1}^{\infty}\left|\sum\limits_{n_r<k\leqslant n_{r+1}} a_k\right|$ ограничены (ограничены суммой $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$), а так как они образуют неубывающую последовательность, то эта последовательность сходится. Справедливость утверждения об абсолютной сходимости проверена.

И, наконец, справедливость обратного утверждения о сходимости первоначального ряда при предположениях, что $a_k \to 0$ и $l = \sup\limits_{r\in\mathbb{N}}(n_{r+1} - n_r) < \infty$ устанавливается так. Для любого $n$ найдем такое $n_r$, что $n_r \leqslant n < n_{r+1}$. Тогда $|\boldsymbol{S}_n - \boldsymbol{S}_{n_r}| \leqslant \sum\limits_{n-l\leqslant k\leqslant n} |a_k| = o(1)$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{S}_n = \lim\limits_{r\to\infty}\boldsymbol{S}_{n_r}$. ▲

## **Лекция 2** (04.09.20)
## Числовые ряды

### Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости

**Признак 1**. *Ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена (сверху).*

▼ Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами является неубывающей и сходится тогда и только тогда, когда ограничена (сверху). ▲

**Признак 2** (сравнения). *Если $0 \leqslant u_k \leqslant v_k$ при $k > K$, то из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и при этом $\boldsymbol{r}_n^{(u)} = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} v_k = \boldsymbol{r}_n^{(v)}$ при $n \geqslant K$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$.*

▼ В силу следствия 2 из критерия Коши можно считать, что $0 \leqslant u_k \leqslant v_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $0 \leqslant \boldsymbol{U}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k \leqslant \boldsymbol{V}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и из ограниченности последовательности $\boldsymbol{V}_n$ следует ограниченность, а значит, и сходимость последовательности $\boldsymbol{U}_n$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве $\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m} v_k$ с

$n \geqslant K$ получим утверждение об остатках рядов. И наконец, если последовательность $\boldsymbol{U}_n$ неограничена, то неограничена и последовательность $\boldsymbol{V}_n$. ▲

**Признак 3** (сравнения). *Если* $0 < \alpha \leqslant \frac{u_k}{v_k} \leqslant \beta < \infty$ *при* $k > K$, *то ряды с неотрицательными членами* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *одновременно сходятся или расходятся; в случае сходимости для их остатков* $\boldsymbol{r}_n^{(u)}$ *и* $\boldsymbol{r}_n^{(v)}$ *соответственно справедливо неравенство* $\alpha \boldsymbol{r}_n^{(v)} \leqslant \boldsymbol{r}_n^{(u)} \leqslant \beta \boldsymbol{r}_n^{(v)}$ *при* $n \geqslant K$.

▼ Так как $u_k \leqslant \beta v_k$ при $k > K$, то из пункта а) теоремы 3 и из признака 2 следует, что сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$. Так как $v_k \leqslant \frac{1}{\alpha} u_k$, то аналогично сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ влечет сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$. Неравенство для остатков очевидно следует из условия признака $\alpha v_k \leqslant u_k \leqslant \beta v_k$, $k > K$. ▲

**Замечание**. *Утверждение, что* $0 < \alpha \leqslant \frac{u_k}{v_k} \leqslant \beta < \infty$ *при* $k > K$ *эквивалентно утверждению, что* $0 < \varliminf\limits_{k \to \infty} \frac{u_k}{v_k} \leqslant \varlimsup\limits_{k \to \infty} \frac{u_k}{v_k} < \infty$ *и выполняется, если* $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{u_k}{v_k} = \gamma$, $0 < \gamma < \infty$.

**Признак 4** (сравнения). *Если* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *— ряды со строго положительными членами и* $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \frac{v_{k+1}}{v_k}$ *для* $k > K$, *то из сходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *и для их остатков* $\boldsymbol{r}_n^{(u)}$ *и* $\boldsymbol{r}_n^{(v)}$ *соответственно справедливо неравенство* $\boldsymbol{r}_n^{(u)} \leqslant \frac{u_k}{v_k} \boldsymbol{r}_n^{(v)}$ *при* $n \geqslant k \geqslant K$, *а из расходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$.

▼ Возьмем $m > k > K$. Тогда $\frac{u_m}{u_k} = \prod\limits_{i=k}^{m-1} \frac{u_{i+1}}{u_i} \leqslant \prod\limits_{i=k}^{m-1} \frac{v_{i+1}}{v_i} = \frac{v_m}{v_k}$ и, значит, $u_m \leqslant \frac{u_k}{v_k} v_m$ при $m \geqslant k > K$. Получаем, что из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, а суммируя по $m > n$ приведенное неравенство получаем, что $\boldsymbol{r}_n^{(u)} \leqslant \frac{u_k}{v_k} \boldsymbol{r}_n^{(v)}$ при $n \geqslant k \geqslant K$. Естественно, что в случае расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится не может. ▲

**Признак 5** (Д'Аламбера). *Ряд со строго положительными членами* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$

*а) при условии* $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q < 1$ *при* $k > K$ *сходится и* $r_n \leqslant u_k \frac{q^{n+1-k}}{1-q}$ *при* $n \geqslant k \geqslant K$, $K \in \mathbb{N}$;

*б) при условии* $\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1$ *при* $k \geqslant K$, $K \in \mathbb{N}$, *члены ряда не стремятся к нулю и ряд расходится.*

▼ Пункт а) следует из признака 4), если взять $v_k = q^k$ — геометрическую прогрессию. Пункт б) очевиден, $u_n = u_K \prod\limits_{k=K}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant u_K$. ▲

**Замечание 1**. (Признак Д'Аламбера в предельной форме) *Условие пункта а)* $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q < 1$ *при* $k \geqslant K$ *(для некоторых* $q$ *и* $K \in \mathbb{N}$*) эквивалентно условию*

$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$*; условие пункта б)* $\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1$ *при* $k \geqslant K$ *выполняется (для некоторого* $K \in \mathbb{N}$*), если* $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$.

**Замечание 2**. *При* $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant 1 \leqslant \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{u_{k+1}}{u_k}$*, в частности, при* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1$*, ряд может как сходиться, так и расходиться. Примерами служат ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

**Признак 6** (Коши). *Ряд с неотрицательными членами* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$

*а) при условии* $\sqrt[k]{u_k} \leqslant q < 1$ *при* $k \geqslant K$, $K \in \mathbb{N}$*, сходится и* $r_n \leqslant \frac{q^{n+1}}{1-q}$ *при* $n \geqslant K$*;*

*б) если* $\sqrt[k]{u_k} \geqslant 1$ *для бесконечного множества номеров* $k$*, то члены ряда не стремятся к нулю и ряд расходится.*

▼ Пункт а) следует из признака 2, если взять $v_k = q^k$. Пункт б) очевиден, так как для бесконечного числа номеров $k$ $u_k \geqslant 1$. ▲

**Замечание 1**. (Признак Коши в предельной форме) *Условие пункта а)* $\sqrt[k]{u_k} \leqslant q < 1$ *при* $k \geqslant K$ *(для некоторых* $q$ *и* $K \in \mathbb{N}$*) эквивалентно условию* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} < 1$. *Условие пункта б) выполняется, если* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} > 1$.

**Замечание 2**. *При* $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} = 1$ *или даже при* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = 1$ *ряд может как сходиться, так и расходиться. Смотри примеры из замечания 2 к предыдущему признаку Д'Аламбера.*

**Замечание 3**. *Если ряд сходится по признаку 5 Д'Аламбера, то он сходится и по признаку 6 Коши. Обратное неверно, поэтому говорят, что признак Коши сильнее признака Д'Аламбера. Если ряд расходится по признаку Д'Аламбера в предельной форме, т.е.* $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$*, то он расходится и по признаку Коши.*

▼ Действительно, если $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q < 1$ при $k \geqslant K$, то $u_k = u_K \prod\limits_{i=K}^{k-1} \frac{u_{i+1}}{u_i} \leqslant u_K q^{k-K}$ и, значит, $\sqrt[k]{u_k} \leqslant \sqrt[k]{u_K} \cdot q^{1-\frac{K}{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \cdot q < 1$, т.е. $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} < 1$.

Аналогично, легко устанавливается, что если $\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant q > 1$ при $k \geqslant K$, то $u_k \geqslant u_K q^{k-K}$ при $k \geqslant K$ и, значит, $\sqrt[k]{u_k} \geqslant \sqrt[k]{u_K} \cdot q^{1-\frac{K}{k}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1 \cdot q > 1$, т.е. $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{u_k} \geqslant q > 1$. ▲

**Пример**. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{k+(-1)^k}$ *удовлетворяет признаку Коши, но не удовлетворяет признаку Д'Аламбера.*

**Признак 7** (интегральный Коши–Маклорена). *Пусть функция* $f$ *неотрицательна и невозрастает на полупрямой* $[M, +\infty)$, $M \in \mathbb{Z}$. *Тогда для целых* $n \geqslant m \geqslant M$

$$0 \leq \sum_{k=m}^{n} f(k) - \int_{m}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant f(m) \qquad (*)$$

*и, значит, ряд* $\sum\limits_{k=M}^{\infty} f(k)$ *и интеграл* $\int\limits_{M}^{\infty} f(x)\,dx$ *сходятся или расходятся одновременно. В случае сходимости справедливо неравенство* $\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant r_n \leqslant \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx$.

▼

С одной стороны, имеем $\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n+1} f(x)\,dx = \sum\limits_{k=m}^{n} (f(k) - \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx) = \sum\limits_{k=m}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} (f(k) - f(x)\,dx) \geq 0$, так как $f(k) = f(k) \int\limits_{k}^{k+1} 1\,dx$ и $f(k) \geq f(x)$ при $x \in [k, k+1]$.

С другой стороны, $\sum\limits_{k=m}^{n} f(k) - \int\limits_{m}^{n+1} f(x)\,dx = f(m) + \sum\limits_{k=m+1}^{n} (f(k) - \int\limits_{k-1}^{k} f(x)\,dx) - - \int\limits_{n}^{n+1} f(x)\,dx \leq f(m)$, так как $f(k) \leq f(x)$ при $x \in [k-1, k]$ и $f(x) \geq 0$.

Из этой формулы следует, что частичные суммы $\sum\limits_{k=m}^{n} f(k)$ и интегралы $\int\limits_{m}^{n+1} f(x)\,dx$ (а значит, в силу неотрицательности функции $f(x)$, и интегралы $\int\limits_{m}^{A} f(x)\,dx$, $A \geqslant m$) одновременно ограничены или неограничены, а значит, одновременно сходятся или расходятся. Оценка остатка сразу следует из того, что $f(x+1) \leq f(k+1) \leq f(x)$ на отрезке $[k, k+1]$. ▲

**Пример**. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int\limits_{1}^{n+1} \frac{1}{x}dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{1}^{\infty} \left[\frac{1}{x}\right] - \frac{1}{x}dx = C = 0,577215664901532\ldots$ — постоянная Эйлера–Маклорена.

**Следствие**. *Ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}$, *как и интеграл* $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$, *сходится при* $\alpha > 1$ *и расходится при* $\alpha \leqslant 1$.

**Признак 8** (Куммера). *Пусть даны ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *с* $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, *и последовательность* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с* $b_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, *причем числа* $v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1}$ *одного знака при* $k \geqslant K \in \mathbb{N}$. *Тогда,*

*а) если* $v_k \geqslant l > 0$ *при* $k \geqslant K$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится,*

*б) если* $v_k \leqslant 0$ *при* $k \geqslant K$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

▼ Если $v_k \geqslant l > 0$, то $l a_{k+1} \leqslant v_k a_{k+1} = a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}$ и $l \sum\limits_{K \leqslant k \leqslant n} a_k \leqslant \sum\limits_{K \leqslant k \leqslant n} (a_k b_k - a_{k+1} b_{k+1}) = a_K b_K - a_n b_n \leqslant a_K b_K$, значит, последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена, ряд сходится по признаку 1.

Если $v_k \leqslant 0$, то $a_k b_k \leqslant a_{k+1} b_{k+1}$ и, значит, $a_K b_K \leqslant a_{K+1} b_{K+1} \leqslant \cdots \leqslant a_k b_k$ при $k \geqslant K$ и $a_k \geqslant \frac{a_K b_K}{b_k}$. Если ряд $\sum\limits_{k=K}^{\infty} \frac{1}{b_k}$ расходится, то расходится и ряд $\sum\limits_{k=K}^{\infty} \frac{a_K b_K}{b_k} = a_K b_K \sum\limits_{k=K}^{\infty} \frac{1}{b_k}$, а тогда по признаку 2 расходится ряд $\sum\limits_{k=K}^{\infty} a_k$. ▲

**Следствие** (признак Куммера в предельной форме). *Условие пункта а) эквивалентно условию* $\varliminf\limits_{k\to\infty} \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1}\right) > 0$, *а условие пункта б) следует из условия* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1}\right) < 0$ *и расходимости ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k}$.

## **Лекция 3** (09.09.20)

## Числовые ряды. Признаки сходимости

**Признак 9** (Раабе). *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *с* $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, *тогда*

*а) если* $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \geq r > 1$ *при* $k \geqslant K$, $K \in \mathbb{N}$, *то ряд сходится,*

*б) если* $k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) \leq 1$ *при* $k \geqslant K$, $K \in \mathbb{N}$, *то ряд расходится.*

▼ Воспользуемся признаком Куммера с $b_k = k$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, $v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}}k - (k+1) = k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) - 1 = r_k - 1$. Если $r_k - 1 \geq r - 1 > 0$, то ряд сходится, а если $r_k - 1 \leq 0$, то ряд расходится. ▲

**Следствие** (признак Раабе в предельной форме). *Условие п. а) равносильно условию* $\varliminf\limits_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) > 1$, *а условие п. б) следует из условия* $\varlimsup\limits_{k\to\infty} k\left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1\right) < 1$.

**Признак 10** (Гаусса). *Пусть* $a_k > 0$ *для* $k \in \mathbb{N}$ *и* $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \alpha + \frac{\beta}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\varepsilon}}$, *где* $\alpha$, $\beta$, $\varepsilon$ *— действительные числа,* $\varepsilon > 0$, *а* $\gamma_k$ *— ограниченная числовая последовательность. Тогда при* $\alpha > 1$ *или* $\alpha = 1$, $\beta > 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а при* $\alpha < 1$ *или* $\alpha = 1$, $\beta \leqslant 1$ *расходится.*

▼ По признаку 5 Д'Аламбера (или 9 Раабе) ряд при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha < 1$ расходится. Если $\alpha = 1$, то по признаку 9 Раабе ряд при $\beta > 1$ сходится, а при $\beta < 1$ расходится. Остается рассмотреть случай $\alpha = \beta = 1$, т.е. когда $\frac{a_k}{a_{k+1}} = 1 + \frac{1}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\varepsilon}}$. Применим признак 8 Куммера в предельной форме с $b_k = k \ln k$, $k \geqslant 2$. Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ расходится по интегральному признаку Коши–Маклорена 7. Тогда имеем $v_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} b_k - b_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\gamma_k}{k^{1+\varepsilon}}\right) k \ln k - (k+1)\ln(k+1) = (k+1)\ln k + \frac{1}{k^{\varepsilon}}\gamma_k \ln k - (k+1)\ln(k+1) = \gamma_k \frac{\ln k}{k^{\varepsilon}} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 - \ln e = 0 - 1 = -1$. Ряд расходится по признаку Куммера 8 в предельной форме. ▲

## Ряды с членами произвольных знаков и ряды комплексных чисел. Признаки сходимости

Ряды с членами произвольных знаков и ряды комплексных чисел исследуют на сходимость и на абсолютную сходимость (как известно, влекущую сходимость). При исследовании ряда на абсолютную сходимость к ряду из модулей его членов можно применять все признаки сходимости рядов с неотрицательными членами. При исследовании на сходимость бывают полезны признаки сходимости, не связанные с абсолютной сходимостью.

**Признак 1** (Лейбница). *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *— действительный ряд со знакочередующимися членами (т.е. все члены с нечетными номерами одного знака, а с четными — другого), абсолютные величины которых не возрастают и стремятся к нулю (т.е.* $|u_1| \geqslant |u_2| \geqslant |u_3| \geqslant \ldots$ *и* $u_k \to 0$*). Такой ряд называется рядом Лейбница и является сходящимся, причем* $|r_n| \leqslant |u_{n+1}| \leqslant |u_n|$.

▼ Рассмотрим случай, когда все члены с нечетными номерами неотрицательны, а с четными неположительны. Тогда $\boldsymbol{S}_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+a_{2k})$ — неубывающая последовательность, т.к. $a_{2k-1}+a_{2k} \geqslant 0$, а $\boldsymbol{S}_{2n+1} = a_1 + \sum\limits_{k=1}^{n}(a_{2k}+a_{2k+1})$ — невозрастающая последовательность, т.к. $a_{2k}+a_{2k+1} \leqslant 0$. При этом $\boldsymbol{S}_{2n} \leqslant \boldsymbol{S}_{2n} + a_{2n+1} = \boldsymbol{S}_{2n+1}$. Значит, неубывающая последовательность $\boldsymbol{S}_{2n}$ ограничена сверху $\boldsymbol{S}_1$, а невозрастающая последовательность $\boldsymbol{S}_{2n+1}$ ограничена снизу $\boldsymbol{S}_2$, они имеют предел, общий, т.к. $\boldsymbol{S}_{2n+1} - \boldsymbol{S}_{2n} = a_{2n+1} = o(1)$.

Случай, когда все члены с нечетными номерами неположительны, а с четными неотрицательны, сводится к данному умножением на $-1$. Итак, в любом случае ряд Лейбница сходится. Его остаток $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$; если $u_{n+1} \geqslant 0$, то $r_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n+2k-1}+u_{n+2k}) \geqslant 0$ (как ряд с неотрицательными членами) и $r_n = u_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_{n+2k}+u_{n+2k+1}) \leqslant u_{n+1} + 0 = u_{n+1}$, т.е. $0 \leqslant r_n \leqslant u_{n+1} \leqslant |u_n|$. Если $u_{n+1} \leqslant 0$, то умножением на $-1$ можно все свести к предыдущему случаю и получить оценку $0 \leqslant -r_n \leqslant -u_{n+1} = |u_{n+1}|$. Значит, в любом случае $|r_n| \leqslant |u_{n+1}|$. ▲

**Пример** ряда Лейбница: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ с $\alpha > 0$.

## Преобразование Абеля

**Теорема 1**. *Для любых чисел (из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) $u_k$ и $v_k$, $k = 1, \ldots, n$, $1 \leqslant m \leqslant n$, верны равенства*

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m-1}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_{m-1},$$

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_m,$$

$v_0 = 0$, $U_k = \sum\limits_{j=1}^{k}$, $U_0 = 0$.

▼ $\sum\limits_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum\limits_{k=m}^{n}(U_k - U_{k-1})\, v_k = \sum\limits_{k=m}^{n} U_k v_k - \sum\limits_{j=m-1}^{n-1} U_j v_{j+1} = \sum\limits_{k=m-1}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_{m-1} = \sum\limits_{k=m}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + U_n v_n - U_{m-1} v_m$. ▲

**Определение**. Последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $v_k$ — действительные или комплексные числа, **ограниченной вариации** (с **ограниченным изменением**, VB-последовательностью), если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|$. В случае сходимости величина этого ряда называется **вариацией** последовательности $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ и обозначается $\mathrm{Var}(\{v_k\})$.

Из теоремы I,2 (об операциях над рядами) следует, что если последовательность ограниченной вариации умножить на комплексное число, а также если к ней прибавить или из нее вычесть (почленно) последовательность ограниченной вариации, то получится последовательность ограниченной вариации, при этом $\operatorname{Var}(\{\alpha v_k\}) = |\alpha| \operatorname{Var}(\{v_k\})$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) и $\operatorname{Var}(\{v_k + u_k\}) \leq \operatorname{Var}(\{v_k\}) + \operatorname{Var}(\{u_k\})$.

Некоторое представление о том, какие последовательности имеют ограниченную вариацию, дает следующая теорема.

**Теорема 2**. *Комплексная последовательность имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда ограниченную вариацию имеют последовательности ее действительных и мнимых частей. Действительная последовательность имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда она представима в виде разности двух неубывающих (невозрастающих) сходящихся последовательностей.*

▼ Первое утверждение сразу следует из того, что если $v_k = a_k + ib_k$, где $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, то $|a_{k+1} - a_k| \leqslant |v_{k+1} - v_k|$, $|b_{k+1} - b_k| \leqslant |v_{k+1} - v_k|$ и $|v_{k+1} - v_k| \leqslant |a_{k+1} - a_k| + |b_{k+1} - b_k|$.

Докажем второе утверждение. Достаточность. Если действительная последовательность неубывает и имеет предел, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k| = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k) = \lim\limits_{n\to\infty} (v_{n+1} - v_1) = \lim\limits_{n\to\infty} v_n - v_1$, т.е. $v_k$ — последовательность ограниченной вариации. Разность таких последовательностей также имеет ограниченную вариацию.

Необходимость. Если действительная последовательность $v_k$ ограниченной вариации, то $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k|$ и $S_n - v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k| + v_1 - \sum\limits_{k=1}^{n} (v_{k+1} - v_k)$ неубывающие ограниченные, а значит, сходящиеся последовательности, разность которых последовательность $v_n$. ▲

**Теорема 3**. *Любая последовательность ограниченной вариации имеет предел и ряд, последовательностью частичных сумм которого она является, абсолютно сходится.*

▼ Утверждение сразу следует из равенства $v_n = v_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)$, где ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (v_{k+1} - v_k)$ сходится абсолютно. ▲

**Теорема 4**. *Если $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — VB-последовательности, то их поточечное произведение $\{v_k u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — тоже VB-последовательность, причем*

$\operatorname{Var}(\{v_k u_k\}) \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{v_k\} \operatorname{Var}(\{u_k\}) + \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \{u_k\} \operatorname{Var}(\{v_k\})$

▼ Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} |v_{k+1}u_{k+1} - v_k u_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1}u_{k+1} - v_{k+1}u_k| + \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1}u_k - v_k u_k| \leq$$

$$\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \{v_{k+1}\} \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1} - u_k| + \sup_{k\in\mathbb{N}} \{u_k\} \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k| \leq$$

$$\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \{v_k\} \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1} - u_k| + \sup_{k\in\mathbb{N}} \{u_k\} \sum_{k=1}^{n} |v_{k+1} - v_k|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое неравенство и утверждение.

▲

**Признак 2** (Абеля). *Если ряд комплексных чисел* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится, а* $v_k$ *— последовательность ограниченной вариации, то сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$.

**Признак 3** (Дирихле). *Если частичные суммы ряда комплексных чисел* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *ограничены, а* $v_k$ *— стремящаяся к нулю последовательность ограниченной вариации, то сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$.

▼ В обоих случаях $U_k = \sum\limits_{j=1}^{k} u_k$ ограничены, пусть $|U_k| \leqslant C$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\left|\sum\limits_{k=m-1}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1})\right| \leqslant C \sum\limits_{k=m-1}^{n-1} |v_k - v_{k+1}|$ и, значит,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n, m > N_1 :\ \left|\sum_{k=m-1}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1})\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В признаке Абеля $U_k$ и $v_k$, а значит, и $U_k v_k$ сходятся. В признаке Дирихле $U_k$ — ограниченная последовательность, а $v_k$ — бесконечно малая, значит, $U_k v_k$ сходятся. В обоих случаях $\lim\limits_{k\to\infty} U_k v_k$ существует и, значит,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n, m > N_2 :\ |U_n v_n - U_{m-1} v_{m-1}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При $N = \max\{N_1, N_2\}$ $\ \forall n, m > N$:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k v_k\right| = \left|\sum_{k=m-1}^{n-1} U_k(v_k - v_{k+1}) + (U_n v_n - U_{m-1} v_{m-1})\right| < \varepsilon.$$

По критерию Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сходится. ▲

**Следствие**. *Признак 1 Лейбница, исключая оценку остаточного члена, — следствие признака Дирихле.*

▼ Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — ряд Лейбница. Если положить $v_k = |a_k|$, а $u_k = (-1)^k$ или $u_k = (-1)^{k+1}$, то выполняется условие признака Дирихле и, значит, знакочередующийся ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ▲

**Замечание**. Признаки Абеля и Дирихле верны и в случае, когда $u_k$ — элементы банахового пространства, а $v_k$ — числовая последовательность.

## **Лекция 4** (11.09.20)
## О перестановках членов ряда
### Перестановки абсолютно сходящихся рядов

**Определение**. Если $\varphi$ — взаимно однозначное отображение $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ — ряд, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ называется **перестановкой** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ или **переставленным** рядом.

**Теорема 1** (Коши). *Если ряд абсолютно сходится, то при любой перестановке его членов получается ряд, который также абсолютно сходится и его сумма совпадает с суммой начального ряда.*

▼ Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$, являющегося перестановкой абсолютно сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, следует из того, что для любого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant \max\limits_{1 \leqslant r \leqslant n} \varphi(r)} |a_k| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$. Остается показать, что сумма переставленного ряда совпадает с суммой начального ряда.

Пусть $F_n = \{\varphi(k) : \ 1 \leqslant k \leqslant n\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем такое $M \in \mathbb{N}$, что $\sum\limits_{k=M+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. Потом найдем такое $N \in \mathbb{N}$, что $\{1, \ldots, M\} \subset F_N$.

Тогда $\forall n > N$ имеем

$$|\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq |\sum_{k=1}^{n} a_{\varphi(k)} - \sum_{k=1}^{M} a_k| + |\sum_{k=1}^{M} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq |\sum_{k=1, \varphi(k) > M}^{n} a_{\varphi(k)}| + \varepsilon < 2\varepsilon$$

**Замечание**. Теорема верна также для рядов в нормированных пространствах.

Перестановки условно сходящихся рядов

**Теорема 2** (Римана). *Если ряд действительных чисел сходится условно, то для любого $l \in \overline{\mathbb{R}}$ можно так переставить члены этого ряда, что переставленный ряд будет сходиться к $l$. Кроме того, можно переставить члены ряда так, что его частичные суммы будут ограничены, но не будут иметь предела.*

▼ Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, сходится условно. Тогда среди членов ряда бесконечно много строго положительных и бесконечно много строго отрицательных (ведь конечное число членов ряда не влияет на сходимость и может быть изменено, а ряд из членов одного знака если сходится, то сходится абсолютно). Пусть $u_k$ — последовательно занумерованные неотрицательные члены ряда, $u_k \geqslant 0$, а $v_k$ — последовательно занумерованные отрицательные члены ряда, $v_k < 0$. Ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ одновременно расходятся (к $+\infty$ и к $-\infty$ соответственно). Действительно, абсолютно сходится оба ряда не могут, т.к. начальный ряд не сходится абсолютно, а если бы один из рядов расходился, а другой сходился, то из равенства $\boldsymbol{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{p} u_k + \sum\limits_{k=1}^{q} v_k$ для некоторых $p$ и $q$, где $n = p + q$ и $p \to \infty$, $q \to \infty$ при $n \to \infty$, следовала бы расходимость начального ряда.

Теперь докажем теорему для случая $l \in \mathbb{R}$. Выберем из исходного ряда столько неотрицательных членов $u_1, u_2, \ldots, u_{k_1}$, чтобы их сумма превзошла $l$, $\sum\limits_{j=1}^{k_1} u_j > l$. Добавим к выбранным членам минимальное количество отрицательных членов $v_1, v_2, \ldots, u_{r_1}$, чтобы общая сумма стала меньше $l$,

$$\sum_{j=1}^{k_1} u_j + \sum_{j=1}^{r_1} v_j < l, \text{ а } \sum_{j=1}^{k_1} u_j + \sum_{j=1}^{r_1 - 1} v_j \geqslant l.$$

После этого добавим минимальное количество неотрицательных членов ряда $u_{k_1+1}, u_{k_1+2}, \ldots, u_{k_2}$, чтобы общая сумма стала больше $l$,

$$\sum_{j=1}^{k_2} u_j + \sum_{j=1}^{r_1} v_j > l, \text{ а } \sum_{j=1}^{k_2-1} u_j + \sum_{j=1}^{r_1} v_j \leqslant l.$$

Затем снова добавим минимальное количество отрицательных членов ряда $v_{r_1+1}, v_{r_1+2}, \ldots, v_{r_2}$, чтобы общая сумма стала меньше $l$,

$$\sum_{j=1}^{k_2} u_j + \sum_{j=1}^{r_2} v_j < l, \text{ а } \sum_{j=1}^{k_2} u_j + \sum_{j=1}^{r_2-1} v_j \geqslant l.$$

После этого добавим минимальное количество неотрицательных членов ряда $u_{k_2+1}, u_{k_2+2}, \ldots, u_{k_3}$, чтобы общая сумма стала больше $l$. Затем добавим минимальное количество отрицательных членов $v_{r_2+1}, v_{r_2+2}, \ldots, v_{r_3}$, чтобы общая сумма стала меньше $l$. И т.д.

Продолжая аналогичным образом добавлять неотрицательные и отрицательные члены начального ряда и нумеруя их натуральными числами в порядке добавления, получим бесконечный ряд, в который войдут все члены исходного ряда, т.к. на каждом шаге построения добавляется хотя бы один неотрицательный или отрицательный член исходного ряда попеременно, то есть получим переставленный исходный ряд. Остается показать, что он сходится к $l$.

Заметим, что в полученном ряде последовательно чередуются группы неотрицательных и отрицательных членов. Если частичная сумма ряда содержит такие группы целиком, то в силу построения отклонение этой частичной суммы от $l$ не превосходит модуля ее последнего члена (т.к. предыдущая частичная сумма расположена по другую сторону от $l$). В силу сходимости начального ряда его члены стремятся к нулю и, значит, подпоследовательность частичных сумм указанного вида сходится к $l$. Как видно из построения, любая другая частичная сумма лежит между ближайшими к ней (по нумерации) частичными суммами указанного выше вида, а значит, последовательность всех частичных сумм сходится к $l$.

Если $l = +\infty$, то будем последовательно выбирать строго возрастающие $k_m \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{k_m} u_j > m + \sum_{j=1}^{m} |v_j| = m - \sum_{j=1}^{m} v_j.$$

Тогда ряд $u_1 + u_2 + \cdots + u_{k_1} + v_1 + u_{k_1+1} + u_{k_1+2} + \cdots + u_{k_2} + v_2 + u_{k_2+1} + u_{k_2+2} + \cdots + u_{k_3} + v_3 + \cdots + v_n + u_{k_n+1} + u_{k_n+2} + \cdots + u_{k_{n+1}} + v_{n+1} + \ldots$ сходится к $+\infty$, т.к. для всех частичных сумм с номерами $n \geqslant k_m + m$ будет выполняться неравенство $\boldsymbol{S}_n > m$ (ведь если $k_p + p \leqslant n \leqslant k_{p+1} + p$, то $\boldsymbol{S}_n \geqslant \sum\limits_{j=1}^{k_p} u_j + \sum\limits_{j=1}^{m} v_j > p$).

Случай $l = -\infty$ доказывается аналогично. Он может быть также сведен к предыдущему случаю умножением на $-1$.

Покажем, что можно переставить члены ряда так, что частичные суммы будут ограничены, но не будут иметь предела. Аналогично предыдущему будем последовательно выбирать строго возрастающие $k_m \in \mathbb{N}$ и $r_m \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{k_m} u_j + \sum_{j=1}^{r_{m-1}} v_j > 1, \text{ а } \sum_{j=1}^{k_m-1} u_j + \sum_{j=1}^{r_{m-1}} v_j \leqslant 1,$$

$$\sum_{j=1}^{k_m} u_j + \sum_{j=1}^{r_m} v_j < -1, \text{ а } \sum_{j=1}^{k_m} u_j + \sum_{j=1}^{r_m-1} v_j \geqslant -1,$$

т.е. сначала мы добавляем минимальное число положительных слагаемых, чтобы частичная сумма ряда превысила 1, потом добавляем минимальное число отрицательных слагаемых, чтобы частичная сумма стала меньше $-1$, после чего процесс продолжается до бесконечности. В последовательности частичных сумм полученного переставленного ряда бесконечное число членов больше 1, и бесконечное число — меньше $-1$, поэтому ряд не сходится. При этом, так как общий член ряда стремится к нулю, начиная с некоторого номера все частичные суммы будут меньше 2 и больше $-2$, так что последовательность частичных сумм будет ограничена. ▲

**Замечание**. В $\mathbb{R}^n$ (в частности, в $\mathbb{C}$) известна теорема Штайница, утверждающая, что если множество сумм ряда при различных перестановках содержит две точки, то оно содержит и проходящую через них прямую. В бесконечномерных банаховых пространствах аналогичное утверждение неверно, но там начинает наблюдаться следующий эффект: существуют сходящиеся ряды, которые не сходятся абсолютно, но у которых значение суммы не меняется ни при каких перестановках членов ряда. Такие ряды называют безусловно сходящимися.

## Умножение числовых рядов

**Теорема 3** (Коши). *Если два числовых ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходятся абсолютно и имеют суммы соответственно равные $U$ и $V$, то ряд, составленный из произведений $u_i v_j$, $i, j \in \mathbb{N}$, взятых в любом порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна $UV$.*

▼ Обозначим через $w_k$, $k \in \mathbb{N}$, произведения вида $u_i v_j$, $i, j \in \mathbb{N}$, занумерованные в каком угодно порядке. Докажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |w_k|$ сходится. Рассмотрим его частичную сумму $\bar{\boldsymbol{S}}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |w_k|$, это сумма членов вида $u_i v_j$, среди индексов $i$ и $j$, входящих в сумму $\bar{\boldsymbol{S}}_n$, найдем наибольший и обозначим его $m$. Тогда $\bar{\boldsymbol{S}}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |w_k| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} |u_i v_j| = \sum\limits_{i=1}^{m} |u_i| \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} |v_j| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i| \cdot \sum\limits_{j=1}^{\infty} |v_j| < \infty$, частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |w_k|$ ограничены и, значит, он сходится, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ сходится абсолютно. Тогда его сумма по теореме 1 Коши не зависит от порядка суммирования членов и последовательность или любая подпоследовательность частичных сумм ряда, члены которого $w_k$, расположеные в каком угодно порядке, стремится к сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$.
А $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{m} u_i v_j = \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} v_j \xrightarrow[m\to\infty]{} UV$, значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k = UV$. ▲

**Теорема 4** (Мертенса). *Если два числовых ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *сходятся, причем один из них абсолютно, и имеют суммы* $U$ *и* $V$ *соответственно, то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$*, где* $w_k = \sum_{j=1}^{k} u_j v_{k+1-j}$*, сходится и его сумма равна* $UV$*.*

▼ Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, $U_n$ и $V_n$ — частичные суммы с номерами $n$ рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ соответственно. Тогда

$$\left|U_n V_n - \sum_{k=1}^{n} w_k\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j - \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{k} u_r v_{k+1-r}\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1-i} u_i v_j\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |V_n - V_{n+1-i}|\,.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для любого $k > N$ выполняются неравенства $|V - V_n| < \varepsilon$ и $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} |u_i| < \varepsilon$. Тогда при $n > 2N$ имеем оценку $\sum\limits_{i=1}^{n} |u_i| \cdot |V_n - V_{n+1-i}| = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} + \sum\limits_{i=N+1}^{n}\right) |u_i| \cdot |V_n - V_{n+1-i}| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} |u_i| \cdot (|V_n - V| + |V - V_{n+1-i}|) + \sum\limits_{i=N+1}^{\infty} |u_i| \cdot 2\sup\limits_{n} |V_n| \leqslant \left(2\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i| + 2\sup\limits_{n} |V_n|\right) \cdot \varepsilon$, т.е. $U_n V_n - \sum\limits_{k=1}^{n} w_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, что и доказывает теорему. ▲

## **Лекция 5** (16.09.20)
## Умножение числовых рядов. Бесконечные произведения

### Бесконечные произведения

Произведение, содержащее бесконечное множество сомножителей, обычно называют бесконечным произведением. Но пользоваться мы будем более конкретным (и более узким) определением.

**Определение 1**. Если $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$, $n \in \mathbb{Z}$, — последовательность, то выражение вида $a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot \dots \cdot a_k \cdot \ldots$, записываемое также как $\prod\limits_{k=n}^{\infty} a_k$, называют **бесконечным произведением**.

Элементы последовательности $\{a_k\}_{k=n}^{\infty}$, рассматриваемые как элементы бесконечного произведения, называют **членами** бесконечного произведения.

Бесконечное произведение, члены которого числа (действительные или комплексные), называется бесконечным числовым произведением. Только такие бесконечные произведения будем рассматривать в дальнейшем. Так как нумерацию членов можно изменить, начав ее либо с 0, либо с 1, то в дальнейшем ограничимся случаем $n = 1$, т.е. бесконечным произведением вида $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots = \prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

**Определение 2**. Произведение $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, первых $n$ членов бесконечного произведения $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ называют **частичным произведением** (с номером $n$) или **$n$-ым частичным призведением**.

**Определение 3**. Если существует конечный отличный от нуля предел последовательности частичных произведений $P = \lim_{n\to\infty} P_n$, то бесконечное произведение называют **сходящимся**; также говорят, что бесконечное произведение сходится к числу $P$ и называют $P$ **значением** (**величиной**) бесконечного произведения $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$.

Если предел частичных произведений бесконечного произведения не существует или равен 0 или $\pm\infty$ (если члены — действительные числа), то такое бесконечное произведение называют расходящимся. Если $\lim_{n\to\infty} P_n$ равен 0 или $\pm\infty$, то также говорят, что бесконечное произведение расходится к 0 или к $\pm\infty$ (иногда в этих случаях говорят и о сходимости к 0 или к $\pm\infty$).

**Определение 4**. Если бесконечное произведение сходится, то величину $r_n = \frac{P}{P_n} = \prod_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называют **$n$-ым остатком** произведения; очевидно $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Если хотя бы один член бесконечного произведения равен 0, то это произведение расходится к 0. Поэтому в дальнейшем будем считать, что все члены рассматриваемого бесконечного произведения отличны от 0.

**Теорема 1** (необходимое условие сходимости). *Если бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$.*

▼ Так как $a_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$, то $\lim_{k\to\infty} a_k = \frac{\lim_{k\to\infty} P_k}{\lim_{k\to\infty} P_{k-1}} = \frac{P}{P} = 1$. ▲

Из определения сходимости бесконечного произведения следует, что отбрасывание из бесконечного произведения или вписывание в него конечного числа отличных от нуля членов (сомножителей), а также их замена на также отличные от нуля члены не изменяет сходимости или расходимости произведения (в том числе к 0). А из необходимого условия сходимости произведения следует, что начиная с некоторого номера все члены сходящегося бесконечного произведения действительных чисел положительны. Поэтому, неограничивая общности, можно считать все члены произведения действительных чисел положительными.

**Теорема 2** (условие сходимости). *Произведение $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ с $a_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$. В случае сходимости $\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k\right) = e^{\sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k}$.*

▼ Так как $\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k$, то $\lim_{n\to\infty} \ln P_n = \sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$, предел $\ln P_n$ и бесконечная сумма одновременно существуют или несуществуют. В силу непрерывности функций $\ln x$ и $e^x$ существует $\lim_{n\to\infty} P_n \in (0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда существует конечный $\lim_{n\to\infty} \ln P_n$ и $\ln \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \ln P_n = \sum_{k=1}^{\infty} \ln a_k$, откуда следует утверждаемое в теореме равенство. ▲

**Теорема 3** (условие сходимости). *Произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+\alpha_k)$*, где все действительные* $\alpha_k > -1$ *и одного знака, сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$.

▼ Сходимость бесконечного произведения по предыдущей теореме эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1+\alpha_k)$, что эквивалентно сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ по признаку сравнения 3 из лекции I, ведь $\alpha_k \to 0 \Leftrightarrow \ln(1+\alpha_k) \to 0$ и $\frac{\ln(1+\alpha_k}{\alpha_k} \xrightarrow[\alpha_k\to 0]{} 1$. ▲

Разложение функции $\sin x$ в бесконечное произведение

**Теорема 4** (Эйлера). *Для любого действительного (комплексного) $x$*

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

▼ Для $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, равенство очевидно верно, т.к. произведение расходится к нулю. Поэтому пусть $x \neq k\pi$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, т.е. $\sin x \neq 0$. Доказательство будет состоять из нескольких этапов.

Этап 1. Пусть $m$ — нечетное натуральное число, $m = 2n+1$, тогда для $\theta \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right), \tag{*}$$

причем при $m = 1$ и $n = 0$ считаем произведение пустого множества сомножителей равным 1.

Действительно, $\sin m\theta = P_n\left(\sin^2\theta\right)\cdot\sin\theta$, где $P_n$ — многочлен степени $n$. Это верно при $m = 1$ и $m = 3$. И если верно для $m = p \geqslant 3$, то верно и для $m = p+2$. Ведь по обычной формуле сложения синусов $\sin m\theta + \sin(m-4)\theta = 2\sin(m-2)\theta\cdot\cos 2\theta = 2\sin(m-2)\theta\cdot(1-2\sin^2\theta)$, значит, $\sin(p+2)\theta = 2\sin p\theta\cdot(1-2\sin^2\theta) - \sin(p-2)\theta = P_{n-1}\left(\sin^2\theta\right)\cdot\sin\theta(1-2\sin^2\theta) - P_{n-2}\left(\sin^2\theta\right)\cdot\sin\theta = P_n\left(\sin^2\theta\right)\cdot\sin\theta$. Еще проще утверждение про вид $\sim m\theta$ следует из формулы Муавра $\cos m\theta + i\sin m\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^m$ и бинома Ньютона, т.к. по ним $\sin m\theta = \sum\limits_{k=0}^{n} C_m^{2k}(1-\sin^2\theta)^k\cdot(-1)^k\sin^{m-2k}\theta$.

Из вида $\sim m\theta$ следует, что $\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = Q_n\left(\sin^2\theta\right)$, где $Q_n = \frac{1}{m}P_n$ — многочлен степени $n$, который имеет корни $\sin^2\frac{k\pi}{m}$, $k = 1,\ldots,m$, т.к. в точках $\theta = \frac{k\pi}{m}$ функция $\sin m\theta$ равна 0. Кроме того, $Q_n(0) = \lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta} = 1$. Значит, $Q_n(z) = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right)$ (ведь многочлены с одинаковыми корнями могут отличаться лишь на постоянный множитель, а так как они равны 1 в точке 0, то совпадают). Отсюда следует равенство (*).

Этап 2. Положим в выведенной формуле (*) $\theta = \frac{x}{m}$, тогда

$$\frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right).$$

Пусть $p$ и $n$ такие натуральные числа, что $|x| \leqslant 2p < 2n = m-1$. Тогда

$$\frac{\sin x}{m \sin \frac{x}{m}} = \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}}\right) \cdot R_p^n(x),$$

где $R_p^n(x) = \prod\limits_{k=p+1}^{n} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{m}}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}}\right)$. Устремим $m = 2n+1$ к бесконечности, получим

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) R_p(x), \tag{**}$$

где $R_p(x) = \lim\limits_{n\to\infty} R_p^n(x)$ существует в силу существования всех остальных пределов в формуле. Если докажем, что $\lim\limits_{p\to\infty} R_p(x) = 1$, то, перейдя в формуле (**), получим требуемое утверждение. Оценим величину $R_p^n(x)$, точнее, $|R_p^n(x) - 1|$.

Этап 3. **Лемма.** Если $a_k$ — последовательность комплексных чисел, то для любого натурального $n$ верно неравенство

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) - 1\right| \leqslant \prod_{k=1}^{n}(1+|a_k|) - 1.$$

Действительно, для $n=1$ это верно, $|(1+a_1)-1| = (1+|a_1|)-1$. Предположим, что неравенство верно для $n=m$. Так как $\left|\prod\limits_{k=1}^{n+1}(1+a_k) - 1\right| \leqslant \left|\prod\limits_{k=1}^{n+1}(1+a_k) - \prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)\right| + \left|\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k) - 1\right| \leqslant \prod\limits_{k=1}^{n}(1+|a_k|)\cdot|a_{n+1}| + \prod\limits_{k=1}^{n}(1+|a_k|) - 1 = \prod\limits_{k=1}^{n+1}(1+|a_k|) - 1$, то оно верно и для $n = m+1$. Значит, неравенство верно для всех натуральных $n$. Лемма доказана.

Следовательно,

$$\left|R_p^n(x) - 1\right| \leqslant \prod_{k=p+1}^{n} \left(1 + \frac{\left|\sin^2 \frac{x}{m}\right|}{\sin^2 \frac{k\pi}{m}}\right) - 1.$$

Оценим синусы в этом выражении.

Этап 4. Для $|z| \leqslant 1$ имеем неравенство $|\sin z| = \left|z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right| \leqslant |z| \cdot \big(1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots\big) \leqslant |z| \cdot \big(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \dots\big) = \frac{6}{5}|z|$ (для действительного $z$ просто $|\sin z| \leqslant |z|$).

Из выпуклости вверх $\sin t$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$ следует, что $\frac{2}{\pi}t \leqslant \sin t$ на $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Значит, $\frac{|\sin\frac{x}{m}|}{|sin\frac{k\pi}{m}|} \leqslant \frac{\frac{6|x|}{5m}}{\frac{2k}{m}} = \frac{3|x|}{5k}$. Отсюда

$$\left|R_p^n(x) - 1\right| \leqslant \prod_{k=p+1}^{n} \left(1 + \frac{9|x|^2}{25k^2}\right) - 1.$$

Так как нестрогие неравенства сохраняются при предельном переходе, то

$$|R_p(x) - 1| \leqslant \prod_{k=p+1}^{\infty} \left(1 + \frac{9|x|^2}{25k^2}\right) - 1.$$

Так как $\prod\limits_{k=p+1}^{\infty}\left(1+\frac{9|x|^2}{25k^2}\right) \xrightarrow[p\to\infty]{} 1$ как остаток сходящегося (по теореме 4 в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$) произведения, то $R_p \xrightarrow[p\to\infty]{} 1$ и, переходя к пределу в формуле (**) при $p\to\infty$, получаем, что

$$\frac{\sin x}{x}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \blacktriangle$$

Формула Эйлера доказана.

Выведем из нее ряд следствий.

**Следствие 1** (формула Валлиса).

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

$\blacktriangledown$ Полагая в формуле Эйлера разложения синуса в бесконечное произведение аргумент синуса $x=\frac{\pi}{2}$ получаем, что

$$1=\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)=\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2-1}{4k^2}=\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2},$$

откуда и следует формула Валлиса. $\blacktriangle$

**Следствие 2** (Разложение косинуса). *Для любого действительного (комплексного) $x$*

$$\cos x=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2\pi^2}\right).$$

$\blacktriangledown$ Для $x\neq n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$,

$$\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}=\lim_{N\to\infty}\frac{2x\prod\limits_{k=1}^{2N}\left(1-\frac{4x^2}{k^2\pi^2}\right)}{2x\prod\limits_{k=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2\pi^2}\right).$$

Если $x=n\pi$, то получаем $\cos n\pi=(-1)^n$ и

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\left(1-\frac{4n^2\pi^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right)=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\frac{(2k-1)^2-4n^2}{(2k-1)^2}=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\prod_{k=1}^{N}\frac{(2k-2n-1)(2k+2n-1)}{(2k-1)^2}=\lim_{N\to\infty}\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-2n-1)\prod\limits_{k=N-n+1}^{N}(2k+2n-1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k-1)\prod\limits_{k=N-n+1}^{N}(2k-1)}=$$

$$=(-1)^n\lim_{N\to\infty}\prod_{k=N-n+1}^{N}\frac{2(k+n)-1}{2k-1}=(-1)^n$$

и, значит, утверждение следствия верно. ▲

**Замечание**. Используя разложения синуса и косинуса в бесконечное произведение легко получить аналогичные разложения для гаперболических синуса и косинуса, ведь $\operatorname{sh} x = -i \sin ix$, $\operatorname{ch} x = \cos ix$, поэтому

$$\operatorname{sh} x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), \ \operatorname{ch} x = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 \pi^2}\right).$$

**Лекция 6** (18.09.20)

**Обобщенные методы суммирования расходящихся последовательностей и рядов**

В ряде задач как теоретического, так и практического характера, возникают расходящиеся последовательности или расходящиеся ряды. Возникает и необходимость приписывания им некоторого предела или суммы, т.е. возникает проблема суммирования расходящихся последовательностей и рядов, проблема введения обобщения понятия предела последовательности или суммы ряда. Познакомимся с двумя такими обобщениями.

Метод средних арифметических
(Чезаро, Чезаро–Фейера или метод (C,1))

**Определение 1**. Последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ суммируется **методом средних арифметических** (**методом Чезаро**) к числу $S$ (или к $S = \pm\infty$), если средние арифметические последовательности

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k \xrightarrow[n\to\infty]{} S.$$

При этом $S$ называют обобщенным пределом в смысле средних арифметических (Чезаро) последовательности $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$. Иногда пишут $\sigma_n = \sigma_n(\{s_k\})$.

**Определение 2**. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ суммируется **методом средних арифметических** (**Чезаро**) к числу $S$ (или к $S = \pm\infty$), если последовательность частичных сумм ряда $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ суммируется этим методом к $S$, т.е.

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_k \xrightarrow[n\to\infty]{} S.$$

При этом $S$ называют обобщенной суммой в смысле средних арифметических (Чезаро) ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

**Определение 3**. Метод суммирования называют **линейным**, если почленное произведение суммируемой к $S$ последовательности (ряда) на число $\alpha$ также суммируемо к $\alpha S$ и если сумма двух суммируемых соответственно к $S$ и $S'$ последовательностей (рядов) суммируется к $S + S'$.

**Определение 4**. Метод суммирования называют **регулярным**, если всякая сходящаяся к числу $S$ последовательность (всякий ряд с суммой $S$) суммируется этим методом также к $S$. Если это верно еще и для $S = \pm\infty$, то такой метод суммирования называют **вполне регулярным**.

**Теорема 1**. *Метод суммирования средних арифметических (Чезаро) линеен и вполне регулярен.*

▼ Свойство линейности очевидно. Докажем регулярность. Пусть $s_k = o(1)$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k > N: \ |s_k| < \varepsilon$. Для $n > N$ имеем $|\sigma_n| < \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N}|s_k| + \frac{1}{n}\sum\limits_{k=N+1}^{n}\varepsilon < \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N}|s_k| + \varepsilon = o(1) + \varepsilon$ (при $n \to \infty$), значит, $\exists N^\sigma\ \forall n > N^\sigma: \ |\sigma_n| < 2\varepsilon$, т.е. $\sigma_n = o(1)$. Если $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} S$, то тогда $\sigma_n(\{s_k\}) = \sigma_n(\{S\}) + \sigma_n(\{s_k - S\}) = S + o(1)$, т.е. $\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S$.

Докажем вполне регулярность. Если $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k > N:$ $s_k \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(+\infty)$, т.е. $s_k > \frac{2}{\varepsilon}$. Так как $\sigma_n \geqslant \frac{1}{n}\sum\limits_{k=N+1}^{n} s_k - \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{N}|s_k| > \frac{1}{n}\sum\limits_{k=N+1}^{n}\frac{2}{\varepsilon} - o(1) = \frac{2}{\varepsilon} - \frac{2N}{n\varepsilon} - o(1) = \frac{2}{\varepsilon} + o(1)$, то $\exists N^\sigma\ \forall n > N^\sigma: \ \sigma_n > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\sigma_n \in B_\varepsilon(+\infty)$. Значит, $\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Случай $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} -\infty$ разбирается аналогично или умножением на $-1$ сводится к предыдущему случаю. Теорема доказана. ▲

**Примеры**.

Последовательность $(-1)^{k-1}$ расходится, но суммируется методом средних арифметических к нулю, т.к. $\sigma_n$ равна 0 при четном $n$ и равна $\frac{1}{n}$ при нечетном $n$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}$ расходится, но суммируется методом средних арифметических к $\frac{1}{2}$, т.к. $\sigma_n$ равна $\frac{1}{2}$ при четном $n$ и равна $\frac{n+1}{2n}$ при нечетном $n$.

**Теорема 2** (необходимое условие суммируемости по Чезаро). *Если последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ (ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$) суммируется методом средних арифметических к конечному числу, то $s_k = o(k)$ $(a_k = o(k))$.*

▼ Если существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$, то $s_k = k\sigma_k - (k-1)\sigma_{k-1} = k(\sigma_k - \sigma_{k-1}) + \sigma_{k-1} = k\cdot o(1) + O(1) = o(k)$; также $a_k = s_k - s_{k-1} = o(k)$. ▲

## Метод суммирования Абеля (Абеля-Пуассона)

**Определение 1**. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ **суммируется методом Абеля** к числу $S$ (или к $S = \pm\infty$), если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^{k-1}$ сходится при $x \in [0,1)$ (сходится или расходится к $\pm\infty$ при $x \in [0,1)$) и $\lim\limits_{x\to 1-0}\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k x^{k-1} = S$. Величину $S$ называют **обобщенной суммой** в смысле Абеля ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$.

**Определение 2**. Последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ суммируется методом Абеля к числу $S$ (или к $S = \pm\infty$), если ряд $s_1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty}(s_k - s_{k-1})$, последовательностью частичных сумм которого является $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, суммируется методом Абеля к $S$. Величину $S$ называют **обобщенным пределом** в смысле Абеля последовательности $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$.

**Теорема 3** (Фробениуса). *Если ряд (последовательность) суммируется методом средних арифметических (Чезаро) к числу $S$, то он суммируется методом Абеля к тому же числу.*

▼ Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ суммируется методом средних арифметических к числу $S$. По преобразованию Абеля

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} s_k (x^{k-1} - x^k) + s_n x^{n-1} =$$
$$= (1-x)\sum_{k=1}^{n-1} s_k x^{k-1} + s_n x^{n-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{n} s_k x^{k-1} + s_n x^n.$$

Так как по теореме 2 $s_n = o(n)$, то $s_n x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для $0 \leqslant x < 1$. Переходя к пределу получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} s_k x^{k-1},$$

где оба ряда одновременно сходятся по признаку Коши для $0 \leqslant x < 1$, т.к. по теореме 2 $a_n = o(n)$ и $s_n = o(n)$, поэтому $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k| x^{k-1}} \leqslant x < 1$ и $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|s_k| x^{k-1}} \leqslant x < 1$. По преобразованию Абеля

$$\sum_{k=1}^{n} s_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} k\sigma_k (x^{k-1} - x^k) + n\sigma_n x^{n-1} =$$
$$= (1-x)\sum_{k=1}^{n-1} k\sigma_k x^{k-1} + n\sigma_n x^{n-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{n} k\sigma_k x^{k-1} + n\sigma_n x^n.$$

Так как $n\sigma_n = O(n)$, то $n\sigma_n x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для $0 \leqslant x < 1$. Переходя к пределу получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k x^{k-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k x^{k-1},$$

где оба ряда одновременно сходятся по признаку Коши для $0 \leqslant x < 1$ или в силу уже доказанной сходимости первого ряда. Значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = (1-x)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k x^{k-1}.$$

Применяя равенство к ряду $1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$ получаем, что

$$1 = (1-x)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}.$$

По условию $\sigma_k \xrightarrow[k\to\infty]{} S$, значит $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k > N: \ |\sigma_k - S| < \varepsilon$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} - S = (1-x)^2 \sum\limits_{k=1}^{N} k(\sigma_k - S) x^{k-1} + (1-x)^2 \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} k(\sigma_k - S) x^{k-1}$, где первая сумма — $o(1)$ при $x \to 1$, а вторая по модулю не превосходит $(1-x)^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\varepsilon x^{k-1} = \varepsilon$. Значит, $\exists x_0 \in (0,1)\ \forall x \in (x_0, 1):\ \left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} - S\right| < 2\varepsilon$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ суммируется методом Абеля к $S$. ▲

**Теорема 3**. *Метод суммирования Абеля линеен и вполне регулярен.*

▼ Линейность очевидна, а регулярность следует из предыдущей теоремы и теоремы 1 о регулярности метода средних арифметических. Поэтому рассмотрим случай, когда последовательность частичных сумм $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ стремится к $+\infty$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k x^{k-1}$ при $x \in [0,1)$ может иметь лишь конечное число отрицательных членов и, значит, он либо сходится, либо расходится к $+\infty$. Если он расходится к $+\infty$ при некотором $x = x_0 \in (0,1)$, то по признаку сравнения 2 он расходится к $+\infty$ при всех $x \in [x_0, 1)$. По преобразованию Абеля $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k(x^{k-1} - x^k) + s_n x^{n-1} = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{n} s_k x^{k-1} + s_n x^n$, значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = +\infty$ при $x \in [x_0, 1)$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ суммируется методом Абеля к $+\infty$.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k x^{k-1}$ сходится при всех $x \in [0,1)$, то его члены стремятся к нулю и из равенства $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{n} s_k x^{k-1} + s_n x^n$ предельным переходом получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k x^{k-1}$. По предположению $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} S$, значит, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall k > N$ верно неравенство $s_k > \frac{2}{\varepsilon}$. Тогда, используя очевидное рвенство $1 = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$, имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} = (1-x)\left(\sum\limits_{k=1}^{N} + \sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\right) s_k x^{k-1} > (1-x)\sum\limits_{k=1}^{N} s_k x^{k-1} + (1-x)\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon} x^{k-1} - (1-x)\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{2}{\varepsilon} x^{k-1} = (1-x)\sum\limits_{k=1}^{N}\left(s_k - \frac{2}{\varepsilon}\right) x^{k-1} + \frac{2}{\varepsilon}$, где первое слагаемое в последней части равенства $o(1)$ при $x \to 1-0$. Значит, $\exists x_0 \in [0,1)\ \forall x \in (x_0, 1):$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x^{k-1} > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ суммируется методом Абеля к $+\infty$.

Случай $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} -\infty$ разбирается аналогично или умножением на $-1$ сводится к предыдущему случаю. ▲

**Пример** ряда, суммируемого по Абелю, но не суммируемого по Чезаро.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k$ суммируется методом Абеля к $\frac{1}{4}$, но не суммируется методом средних арифметических.

Действительно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x^k = \frac{x-(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$, откуда дифференцированием получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}kx^{k-1} = \frac{(1+x)(1-(-1)^n(n+1)x^n - (x-(-1)^n x^{n+1}}{(1+x)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{(1+x)^2}$, т.е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}kx^{k-1} = \frac{1}{(1+x)^2} \xrightarrow[x\to 1-0]{} \frac{1}{4}$. Так как $a_k = (-1)^{k-1}k$ не являются $o(k)$, то ряд не суммируется методом средних арифметических.

## **Лекция 7** (24.09.20)

## Теоремы тауберова типа
## Критерий Маркова-Гордона
## Равномерная сходимость
## функциональных последовательностей и рядов

### Тауберовы теоремы

Как показывают примеры предыдущей лекции, из суммируемости последовательности (или ряда) не следует ее сходимость. Однако, при выполнении некоторых дополнительных условий суммируемость к некоторому значению влечет сходимость к тому же значению. Утверждения подобного рода называются теоремами тауберова типа (первая подобная теорема была получена Таубером), имеется ряд таких теорем, мы разберем две из них.

**Теорема 1** (Таубера). *Пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *суммируется методом Абеля к числу* $S$ *и* $a_n = o(\frac{1}{n})$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и* $S$ *– его сумма.*

▼

В силу неравенства

$$|S - \sum_{n=1}^{N} a_n| \leq |S - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n| + |\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{N} a_n|$$

достаточно доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{N} a_n \to 0$$

при $N \to \infty$, где $x = \frac{N-1}{N} \to 1$.

Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем $N$ таким, что $|na_n| < \varepsilon$ при $n > N$.

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{N} a_n| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{N} a_n(1-x^n)| \leq |\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n| + |\sum_{n=1}^{N} a_n(1-x^n)|$$

Первое выражение оценивается так:

$$|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n| = |\sum_{n=N+1}^{\infty} na_n \frac{x^n}{n}| \leq \frac{\varepsilon}{N+1} |\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n| < \frac{\varepsilon}{(N+1)(1-x)} = \frac{N\varepsilon}{N+1} < \varepsilon$$

Для оценки второго воспользуемся тем, что $1 - x^n = (1-x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) < n(1-x)$:

$$|\sum_{n=1}^{N} a_n(1-x^n)| < (1-x)\sum_{n=1}^{N} n|a_n| = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} n|a_n|$$

Это — средние арифметические стремящейся к нулю последовательности $\{n|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$, поэтому эти средние тоже стремятся к нулю. Значит, при достаточно больших $N$

второе выражение также не превосходит $\varepsilon$. Значит, $|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \sum\limits_{n=1}^{N} a_n| < 2\varepsilon$, что и требовалось доказать.

▲

**Определение 1**. Определим сдвинутые средние арифметические (или средние Валле-Пуссена) последовательности $s_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$,

$$\sigma_{n,k} = \sigma_{n,k}(\{s_j\}) = \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} s_j, \quad n \in \mathbb{Z}^+,\ k \in \mathbb{N}.$$

**Лемма 1**. *Если средние арифметические $\sigma_k = \sigma_{0,k}$ последовательности $S_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, сходятся к $S$, а $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$ так, что отношение $\frac{n}{k_n}$ ограничено, то $\sigma_{n,k_n}$ сходятся к $S$.*

▼Действительно,

$$\sigma_{n,k_n} = \frac{1}{k_n}\left((k_n+n)\sigma_{k_n+n-1} - n\sigma_{n-1}\right) = \sigma_{k_n+n-1} + \frac{n}{k_n}(\sigma_{k_n+n-1} - \sigma_{n-1}) = S + o(1),$$

где $o(1)$ стремится к 0 при $n \to \infty$, если отношение $\frac{n}{k_n}$ ограничено. ▲

**Лемма 2**. *Для последовательности $S_j = \sum\limits_{r=0}^{j} c_r$, $j = 0, 1, 2, \dots$,*

$$\sigma_{n,k} = S_n + \sum_{j=n+1}^{n+k-1} \left(1 - \frac{j-n}{k}\right) c_j.$$

▼ Так как $k\sigma_{n,k} = \sum\limits_{j=n}^{n+k-1} S_j = kS_n + \sum\limits_{j=n}^{n+k-1} (S_j - S_n) = kS_n + \sum\limits_{j=n+1}^{n+k-1} (n+k-j)c_j$, то лемма верна. ▲

**Теорема 2**. (тауберова теорема Харди). *Если у ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ члены $c_k = O(\frac{1}{k})$ при $k \to \infty$ и он суммируется методом средних арифметических к числу $S$, то он сходится к $S$.*

▼ Дано, что для некоторого $A > 0$ $|c_k| \leqslant \frac{A}{k}$. Из леммы 2 для $n \geqslant K$ получаем оценку

$$|\sigma_{n,k} - S_n| \leqslant \sum_{j=n+1}^{n+k-1} |c_j| \leqslant A\frac{k-1}{n}. \tag{*}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и для каждого $n > \max\{\frac{2}{\varepsilon}, K\}$ выберем $k_n \in \mathbb{N}$ так, что $\frac{\varepsilon n}{2} \leqslant k_n \leqslant \varepsilon n$. Поскольку $\varepsilon n > 2$, то это возможно. Поскольку отношение $\frac{n}{k_n} \leqslant \frac{2}{\varepsilon}$, то по лемме 1 $\sigma_{n,k_n}$ сходятся к $S$ и, значит, начиная с некоторого номера $N$ имеем оценку $|\sigma_{n,k_n} - S| < \varepsilon$. А из оценки (*) следует, что $|\sigma_{n,k} - S_n| \leqslant A\varepsilon$. Следовательно, начиная с некоторого номера $N$ имеем оценку $|S_n - S| < (A+1)\varepsilon$. Теорема доказана. ▲

Критерий Маркова-Гордона

В анализе часто возникают ситуации, когда переходят к пределу сначала по одной переменной (параметру), потом по другой, а дальше возникает необходимость поменять порядок пределов с сохранением конечного результата. Наиболее общим результатом на эту тему является следующий критерий Маркова–Гордона. Этот критерий был опубликован Р.А. Гордоном в 1995 г. Похожий критерий перестановки пределов функций двух переменных А.А. Марков опубликовал в 1890 г.

**Теорема 3** (Критерий Маркова–Гордона). *Пусть $\mathfrak{B}$ — база в множестве $X$, $\mathfrak{D}$ — база в множестве $Y$, а $h(x,y)$ — функция двух переменных $x \in X$ и $y \in Y$, т.е. отображение из множества $X \times Y$ в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Предположим, что $f(x) = \lim\limits_{\mathfrak{D}} h(x,y)$ существует для всех $x \in X$, а $g(y) = \lim\limits_{\mathfrak{B}} h(x,y)$ существует для всех $y \in Y$. Тогда оба предела*

$$\lim_{\mathfrak{B}} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{\mathfrak{D}} g(y)$$

*существуют и равны тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B_\varepsilon \in \mathfrak{B}\ \forall x \in B_\varepsilon\ \exists D_x \in \mathfrak{D}\ \forall y \in D_x : \quad |h(x,y) - g(y)| < \varepsilon.$$

▼ Сначала докажем необходимость условия. Предположим, что оба предела $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f(x)$ и $\lim\limits_{\mathfrak{D}} g(y)$ существуют и равны и пусть $H$ — общая величина этих пределов. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\lim\limits_{\mathfrak{B}} f(x) = H$, то существует элемент $B_\varepsilon$ базы $\mathfrak{B}$, $B_\varepsilon \subset X$, такой что для всех $x \in B_\varepsilon$ верно неравенство $|f(x) - H| < \varepsilon$. Теперь фиксируем любое $x \in B_\varepsilon$. По предположению существует такой элемент $D_1$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_1$ верно неравенство $|h(x,y) - f(x)| < \varepsilon$. Также по предположению существует такой элемент $D_2$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_2$ верно неравенство $|g(y) - H| < \varepsilon$. Выберем такой элемент $D_x$ базы $\mathfrak{D}$, что $D_x \subset D_1 \cap D_2$. Тогда для каждого $y \in D_x$ имеем оценку

$$|h(x,y) - g(y)| \leqslant |h(x,y) - f(x)| + |f(x) - H| + |H - g(y)| < 3\varepsilon.$$

Так как константа 3 несущественна (всегда можно $\varepsilon$ сначала уменьшить в 3 раза), а $x$ — любой элемент $B_\varepsilon$, то необходимость условия доказана.

Теперь докажем достаточность условия. Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $B_\varepsilon$ базы $\mathfrak{B}$, что для каждого $x \in B_\varepsilon$ существует элемент $D_x$ базы $\mathfrak{D}$, такой что для всех $y \in D_x$ выполняется неравенство $|h(x,y) - g(y)| < \varepsilon$. Сначала докажем, что для функции $f(x)$ выполняется критерий Коши по базе $\mathfrak{B}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По предположению существует такой элемент $B_\varepsilon$ базы $\mathfrak{B}$, что для каждого $x \in B_\varepsilon$ существует элемент $D_x$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_x$ выполняется неравенство $|h(x,y) - g(y)| < \varepsilon$. Возьмем любые $x_1, x_2 \in B_\varepsilon$. Так как $\lim\limits_{\mathfrak{D}} h(x_1, y) = f(x_1)$, то существует такой элемент $D_1$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_1$ верно неравенство

$$|h(x_1, y) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

По предположению существует такой элемент $D_{x_1}$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_{x_1}$ верно неравенство

$$|h(x_1, y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Аналогично существует такой элемент $D_2$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_2$ верно неравенство

$$|h(x_2, y) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

По предположению существует такой элемент $D_{x_2}$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_{x_2}$ верно неравенство

$$|h(x_2, y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Выберем такой элемент $D_0$ базы $\mathfrak{D}$, что $D_0 \subset D_1 \cap D_{x_1} \cap D_2 \cap D_{x_2}$. Тогда для каждого $y \in D_0$ имеем оценку

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - h(x_1, y)| + |h(x_1, y) - g(y)| +$$
$$+ |g(y) - h(x_2, y)| + |h(x_2, y) - f(x_2)| < 4\varepsilon.$$

Так как константа 4 несущественна (всегда можно $\varepsilon$ сначала уменьшить в 4 раза), то, значит, для функции $f(x)$ выполняется критерий Коши по базе $\mathfrak{B}$, а следовательно существует $H = \lim\limits_{\mathfrak{B}} f(x)$.

Осталось доказать, что $\lim\limits_{\mathfrak{D}} g(x) = H$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По предположению существует такой элемент $B_\varepsilon$ базы $\mathfrak{B}$, что для каждого $x \in B_\varepsilon$ существует элемент $D_x$ базы $\mathfrak{D}$, такой что для каждого $y \in D_x$ выполняется неравенство $|h(x, y) - g(y)| < \varepsilon$. В силу доказанного существует такой элемент $B_1 \subset X$ базы $\mathfrak{B}$, что для всех $x \in B_1$ верно неравенство $|f(x) - H| < \varepsilon$. Возьмем элемент $B_0 \subset B_\varepsilon \cap B_1$ базы $\mathfrak{B}$. Пусть $x_0 \in B_0$. Так как $\lim\limits_{\mathfrak{D}} h(x_0, y) = f(x_0)$, то существует такой элемент $D_0$ базы $\mathfrak{D}$, что для всех $y \in D_0$ верно неравенство $|h(x_0, y) - f(x_0)| < \varepsilon$. Возьмем элемент $D_1 \subset D_x \cap D_0$ базы $\mathfrak{D}$. Тогда для всех $y \in D_1$ имеем оценку

$$|g(y) - H| \leqslant |g(y) - h(x_0, y)| + |h(x_0, y) - f(x_0)| + |f(x_0) - H| < 3\varepsilon.$$

Так как константа 3 несущественна (всегда можно $\varepsilon$ сначала уменьшить в 3 раза), то $\lim\limits_{\mathfrak{D}} g(x) = H$, достаточность условия установлена. ▲

**Определение 2.** Пусть $\mathfrak{B}$ — база в множестве $X$, а $h(x, y)$ — функция двух переменных $x \in X$ и $y \in Y$, т.е. отображение из множества $X \times Y$ в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Пусть $g(y)$ — функция на множестве $Y$.

Будем говорить, что $h(x, y)$ **сходится равномерно на множестве** $Y$ **к функции** $g(y)$ **по базе** $\mathfrak{B}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists B_\varepsilon \in \mathfrak{B} \; \forall x \in B_\varepsilon \; \forall y \in Y : \quad |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Отметим, что $h(x, y)$ **сходится поточечно на множестве** $Y$ **к** $g(y)$ **по базе** $\mathfrak{B}$, если

$$\forall y \in Y \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists B_{\varepsilon,y} \in \mathfrak{B} \; \forall x \in B_{\varepsilon,y} : \quad |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Очевидно, что равномерная сходимость влечет поточечную, достаточно взять $B_{\varepsilon,y} = B_\varepsilon$.

**Теорема 4.** [О перестановке пределов]. *Пусть $\mathfrak{B}$ — база в множестве $X$, а $h(x, y)$ — функция двух переменных $x \in X$ и $y \in Y$, т.е. отображение из множества $X \times Y$ в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Предположим, что $h(x, y)$ сходится равномерно на множестве $Y$ к $g(y)$ по базе $\mathfrak{B}$. Тогда для любой $\mathfrak{D}$ — базы в множестве $Y$, такой, что для всех $x \in X$ существует $f(x) = \lim\limits_{\mathfrak{D}} h(x, y)$, оба предела*

$$\lim_{\mathfrak{B}} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{\mathfrak{D}} g(y)$$

*существуют и равны.*

▼ Дано, что выполнено условие равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B_\varepsilon \in \mathfrak{B}\ \forall x \in B_\varepsilon\ \forall y \in Y: \quad |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Условие критерия Маркова-Гордона

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B_\varepsilon \in \mathfrak{B}\ \forall x \in B_\varepsilon\ \exists D_x \in \mathfrak{D}\ \forall y \in D_x: \quad |h(x, y) - g(y)| < \varepsilon.$$

выполнено, если взять $D_x = Y$.

▲

Функциональные последовательности и ряды

**Определения 1-2**. **Функциональной последовательностью** будем называть последовательность определенных на некотором множестве $X$ функций $\{f_k\}_{k=n}^{\infty}$, $n \in \mathbb{N}$.

**Функциональным рядом** будем называть ряд определенных на некотором множестве $X$ функций $\sum\limits_{k=n}^{\infty} f_k$, $n \in \mathbb{N}$.

**Определения 3-4**. Функцию последовательности (ряда), соответствующую целому числу $k \geqslant n$, $f_k$, называют **членом** (**элементом**) последовательности (ряда), множество $X$ — **областью** (или **множеством**) определения функциональной последовательности (ряда).

Далее будем рассматривать только действительнозначные или комплеснозначные функции и последовательности (или ряды) из них. Так как нумерацию членов можно изменить, начав ее, например, с 1, то ограничимся рассмотрением последовательностей и рядов, члены которых занумерованы натуральными числами.

**Определение 5**. Сумму первых $n$ членов функционального ряда $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ будем называть $n$-ой частичной суммой этого ряда.

Отметим, что изучение функциональных рядов сводится к изучению последовательности его частичных сумм. А всякую функциональную последовательность $s_n$ можно рассматривать как последовательность частичных сумм ряда $s_1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty}(s_k - s_{k-1})$.

**Определение 6**. Функциональная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется **сходящийся в точке** $x_0$ к числу $s$, если все (или начиная с некоторого номера) функции последовательности определены в точке $x_0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x_0) = s$.

**Определение 7**. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ называется **сходящимся в точке** $x_0$ к числу $S$, если все функции ряда определены в точке $x_0$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ сходится к $S$.

**Определение 8**. Функциональная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится **на множестве** (точнее, сходится **поточечно на множестве**) $X$, если все (или начиная с некоторого номера) функции последовательности определены на $X$ и последовательность $f_k(x)$ сходится в каждой точке $x \in X$.

Если $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ для $x \in X$, то последовательность $\{f_k\}$ сходится к $f$ на $X$.

**Определение 9**. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ сходится **на множестве** (точнее, сходится **поточечно на множестве**) $X$, если все функции ряда определены на $X$ и конечная сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ существует в каждой точке $x \in X$.

Если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = S(x)$ для $x \in X$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ сходится к $S(x)$ на $X$.

Новым важным понятием будет понятие равномерной сходимости.

**Определение 10**. Последовательность функций $f_k(x)$ **равномерно на множестве** $X$ сходится к функции $f(x)$, если все функции $f_k(x)$ и $f(x)$ определены на $X$ и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall k > N,\ k \in \mathbb{N}\ \forall x \in X:\ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

или, эквивалентно,

$$\sup_X |f_k(x) - f(x)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Равномерную сходимость последовательности функций $f_k$ к функции $f$ на множестве $X$ обозначают так:

$$f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f.$$

**Определение 11**. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=n}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно на множестве $X$ к функции $S(x)$, если функции $f_k(x)$, $k \geqslant n$, и $f(x)$ определены на $X$ и если последовательность $S_N(x)$ частичных сумм ряда сходится равномерно на $X$ к $S(x)$.

**Определение 12**. Функциональная последовательность (ряд) сходится равномерно на множестве $X$, если существует функция, к которой эта последовательность (ряд) сходится равномерно на $X$.

**Теорема 1**. *Из равномерной сходимости функциональной последовательности $f_k$ (ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$) на множестве $X$ следует ее (его) поточечная сходимость на $X$.*

▼ Если в определении равномерной сходимости зафиксировать точку $x \in X$, то получится определение сходимости числовой последовательности $f_k(x)$ (ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$) на множестве $X$. ▲

**Примеры**. $x^k \underset{k\to\infty}{\overset{[0,1-\varepsilon]}{\rightrightarrows}} 0$, $0 < \varepsilon < 1$, т.к. $\sup\limits_{[0,1-\varepsilon]} x^k = (1-\varepsilon)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, но $x^k \underset{k\to\infty}{\overset{[0,1)}{\not\rightrightarrows}} 0$, т.к. $\sup\limits_{[0,1)} x^k = 1$, хотя поточечно $x^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для $x \in [0,1)$.

**Определение 1**. Функциональная последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет **условию Коши равномерной сходимости** на множестве $X$, если все $f_k$, $k \in \mathbb{N}$, определены на $X$ и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n, m > N,\ n, m \in \mathbb{N}\ \forall x \in X:\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

**Теорема 1** (Коши). *Функциональная последовательность сходится равномерно на множестве $X$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на множестве $X$.*

▼ Необходимость. Если $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall k > N,\ \forall x \in X:\ |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда $\forall n, m > N,\ \forall x \in X:\ |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, последовательность $f_k$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости.

Достаточность. Если функциональная последовательность $\{f_k\}$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на множестве $X$, то в каждой точке $x \in X$ последовательность $f_k(x)$ удовлетворяет условию Коши сходимости числовых последовательностей и, значит, сходится. Обозначим ее предел $f(x)$. По условию Коши равномерной сходимости

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N,\ \forall x \in X:\ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Устремляя $m$ к бесконечности получаем в пределе, что

$$\forall n > N,\ \forall x \in X:\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$$

т.е. $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$. Теорема доказана. ▲

## **Лекция 8** (25.09.20) Простейшие свойства равномерной сходимости последовательностей и рядов Признаки равномерной сходимости

**Определение 1**. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ удовлетворяет **условию Коши равномерной сходимости** на множестве $X$, если все $u_k$, $k \in \mathbb{N}$, определены на $X$ и

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n > N\ \forall p > 0, n, p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X:$$
$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon$$

или, что эквивалентно,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n, m > N\ n, m \in \mathbb{N},\ \forall x \in X:\ \left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Это переформулировка для рядов условия Коши равномерной сходимости последовательностей. Переформулируем для рядов и теорему 1 прошлой лекции.

**Теорема 1** (Коши). *Функциональный ряд сходится равномерно на множестве $X$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на этом множестве.*

**Следствие**. *Члены равномерно сходящегося на множестве $X$ функционального ряда равномерно стремятся к нулю на этом множестве.*

Это следует как из условия Коши равномерной сходимости, если взять $p = 1$ или $m = n$, так и из того, что $u_k(x) = S_k(x) - S_{k-1}(x) \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$, если ряд равномерно сходится на $X$.

### Простейшие свойства равномерной сходимости

1. Если функциональная последовательность (ряд) равномерно сходится на множестве $X$, то она (он) равномерно сходится и на любом подмножестве $X$.

2 (линейность). Если $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$ и число $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\in \mathbb{C})$, то $\alpha f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \alpha f$. Если $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$ и $g_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} g$, то $f_k \pm g_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f \pm g$.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на множестве $X$, число $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\in \mathbb{C})$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha u_k(x)$ равномерно сходится к $\alpha S(x)$ на $X$. Если ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ равномерно сходятся к $S(x)$ и $S'(x)$ соответственно на множестве $X$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (u_k(x) \pm v_k(x))$ равномерно сходится к $S(x) \pm S'(x)$ на $X$.

3. Если $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} f$, а $g$ — ограниченная функция на $X$, то $gf_k \underset{k\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} gf$.

Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на $X$, а $g(x)$ — ограниченная функция на $X$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g(x)u_k(x)$ равномерно сходится к $g(x)S(x)$ на $X$.

Верность свойства 1 непосредственно следует из определения.

Верность свойства 2 для последовательностей следует из того, что если $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ на $X$, то $|\alpha f_k(x) - \alpha f(x)| < |\alpha|\varepsilon$ на $X$; если $|f_k(x) - f(x)|$ и если $|g_k(x) - g(x)| < \varepsilon$ на $X$, то $|(f_k(x) \pm g_k(x)) - (f(x) \pm g(x))| < 2\varepsilon$ на $X$.

Верность свойства 2 для рядов следует из верности свойства 2 для последовательностей.

Верность свойства 3 для последовательностей следует из того, что если $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ на $X$, то $|g(x)f_k(x) - g(x)f(x)| < \sup\limits_{X} |g(x)| \cdot \varepsilon$ на $X$.

Верность свойства 3 для рядов следует из верности свойства 3 для последовательностей.

## Признаки равномерной сходимости

Каждый признак можно формулировать в двух вариантах — для последовательностей и для рядов. Мы будем приводить или обе формулироваки или только одну более удобную.

**Признак 1** (Вейерштрасса). *Функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на множестве* $X$, *если* $u_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, *определены на* $X$ *и удовлетворяют оценкам* $|u_k(x)| \leqslant \alpha_k$ *на* $X$, $k \in \mathbb{N}$, *где числовой ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *сходится.*

▼ 1 способ. Из условия Коши сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сразу следует справедливость условия Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на $X$.

2 способ. По признаку сравнения ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в каждой точке $x \in X$ и

его остаток $|r_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k = r_n \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, т.е. $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} 0$. ▲

**Признак 2** (Дини). *Если последовательность непрерывных на компакте $K$ (в некотором метрическом пространстве) функций $f_k(x)$ сходится в каждой точке $K$ к непрерывной на $K$ функции $f(x)$ и $|f_k(x) - f(x)| \to 0$ монотонно в каждой точке $K$, то $f_k(x) \underset{k\to\infty}{\overset{K}{\rightrightarrows}} f(x)$.*

▼ Пусть $\varphi_k(x) = |f_k(x) - f(x)|$ — последовательность непрерывных на $K$ функций в каждой точке $x \in K$ монотонно стремящаяся к нулю. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и пусть $F_N = \{x \in K : \ |\varphi_N(x)| \geqslant \varepsilon\} = \bigcup\limits_{n\geqslant N} \{x \in K : \ |\varphi_n(x)| \geqslant \varepsilon\}$, это замкнутое подмножество $K$. Из того, что в каждой точке $x \in K \quad \varphi_n(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ следует, что $\bigcap\limits_{N=1}^{\infty} F_N = \emptyset$, значит, $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} (M \setminus F_N) = M \setminus \bigcap\limits_{N=1}^{\infty} F_N = M \supset K$, где $M$ — метрическое пространство. В силу компактности $K$ найдется $m \in \mathbb{N}$, что $\bigcup\limits_{N=1}^{m} (M \setminus F_N) \supset K$, а в силу включений $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \quad M \setminus F_m \supset K$, значит, $F_m = \emptyset$, т.е. $\forall n \geqslant m \ \forall x \in K$: $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$. Теорема доказана. ▲

**Замечание**. Если в каждой точке $x \in K$ функции $f_k(x)$ действительны и образуют монотонную последовательность, то $|f_k(x) - f(x)| \to 0$ монотонно в каждой точке $K$.

Часто в признаке Дини вместо условия, что $|f_k(x) - f(x)| \to 0$ монотонно в каждой точке $K$, фигурирует приведенное условие.

Приведем формулировку признака Дини в этом виде для рядов.

**Признак 2** (Дини) для рядов. *Если все члены функционального ряда действительны и непрерывны на компакте $K$, в каждой его точке одного знака и ряд сходится поточечно на $K$ к непрерывной на $K$ функции, то этот ряд сходится равномерно на $K$.*

Это утверждение сразу следует из вышеприведенного признака Дини для функциональных последовательностей и замечания к нему.

**Признак 3** (Лейбница). *Если заданный на множестве $X$ функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ имеет действительные члены, которые равномерно на $X$ стремятся к нулю, в каждой точке $X$ знакопеременны и монотонно убывают по модулю, то он равномерно сходится на $X$.*

▼ По признаку Лейбница для числовых рядов остаток ряда $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)$ оценивается по модулю модулем первого члена остатка $|r_n(x)| \leqslant |a_{n+1}(x)|$, а по условию $a_k(x) \to 0$ равномерно на $X$. ▲

**Признак 4** (Абеля). *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $X$, а $v_k(x)$ такая последовательность на $X$, что $v_1(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_k(x) - v_{k+1}(x)|$ ограничены на $X$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) v_k(x)$ сходится равномерно на $X$.*

**Определение**. Семейство функций $\{f_\alpha(x)\}_{\alpha\in\Lambda}$ (например, в случае функциональной последовательности $\Lambda = \mathbb{N}$) **равномерно ограничена** (**ограничена в со-**

**вокупности**) на множестве $X$, если $f_\alpha(x)$ определены на $X$ и $\sup\limits_{\alpha\in\Lambda,\, x\in X} |f_\alpha(x)| < +\infty$, т.е. множество $\{f_\alpha(x), x\in X, \alpha\in\Lambda\}$ ограничено.

**Замечание.** Из того, что $|v_n(x)| = |\sum\limits_{k=1}^{n-1}(v_{k+1}(x)-v_k(x)) + v_1(x)| \le \sum\limits_{k=1}^{\infty}|v_{k+1}(x) - v_k(x)| + |v_1(x)|$ следует, что в условиях признака Абеля последовательность $\{v_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничена на $X$.

**Признак 5** (Дирихле). *Если частичные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно ограничены на $X$, а $v_k(x)$ равномерно стремящаяся к нулю на $X$ последовательность с равномерно сходящимся на $X$ рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|v_k(x) - v_{k+1}(x)|$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)v_k(x)$ сходится равномерно на $X$.*

▼

Проведем доказательство одновременно для признаков 4 и 5. Используя преобразование Абеля, получаем

$$\sum_{k=m}^{n} u_k(x)v_k(x) = \sum_{k=m-1}^{n-1} U_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x)) + v_n(x)U_n(x),$$

где $U_r(x) = \sum\limits_{j=m}^{r} u_j(x)$.

Для случая признака Абеля по условию Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеем, что $\forall\varepsilon>0 \ \ \exists N \ \ \forall k,m, \ k>m>N \ \ \forall x\in X$: $\left|\sum\limits_{j=m}^{k} u_j(x)\right| = |U_k(x)| < \varepsilon$. Тогда из приведенного равенства получаем следующую оценку

$$|\sum_{k=m}^{n} u_k(x)v_k(x)| \le \varepsilon \sum_{k=m-1}^{n-1} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| + |v_n(x)|\varepsilon \le$$

$$\le \varepsilon\left(\sup_{x\in X}\sum_{k=1}^{\infty}|v_k(x) - v_{k+1}(x)| + \sup_{x\in X}\sup_{n\in\mathbb{N}}|v_n(x)|\right),$$

Для случая признака Дирихле по условию Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|v_k(x) - v_{k+1}(x)|$ и по равномерной сходимости к нулю последовательности $\{v_n(x)\}$ имеем, что $\forall\varepsilon>0 \ \ \exists N \ \ \forall n,m, \ n>m>N \ \ \forall x\in X$: $\sum\limits_{k=m-1}^{n-1}|v_k(x) - v_{k+1}(x)| < \varepsilon$ и $v_n(x) < \varepsilon$, а из равномерной ограниченности частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ имеем, что $\forall x\in X \ \forall k\in\mathbb{N} \ |U_k(x)| = |\sum\limits_{j=1}^{k} u_j(x) - \sum\limits_{j=1}^{m-1} u_j(x)| \le 2\sup\limits_{x\in X}\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|\sum\limits_{j=1}^{k} u_j(x)|$. Тогда получаем оценку

$$|\sum_{k=m}^{n} u_k(x)v_k(x)| \le 2\sup_{x\in X}\sup_{k\in\mathbb{N}}|\sum_{j=1}^{k} u_j(x)|\cdot\varepsilon + \varepsilon\cdot 2\sup_{x\in X}\sup_{k\in\mathbb{N}}|\sum_{j=1}^{k} u_j(x)| = 4\varepsilon\sup_{x\in X}\sup_{k\in\mathbb{N}}|\sum_{j=1}^{k} u_j(x)|.$$

В обоих случаях выполнен критерий Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$.

**Замечание 1**. В признаке 4 Абеля наложенные на $v_k(x)$ условия выполняются при следующих требованиях: $v_k(x)$ равномерно ограничены на $X$ и при каждом $x \in X$ $v_k(x)$ образуют монотонную последовательность.

**Замечание 2**. Отметим, что условие ограниченности $v_1(x)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|$ на $X$ можно очевидно заменить условием ограниченности $v_n(x)$ и $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|$ на $X$ при некотором $n$.

**Замечание 3**. В признаке 5 Дирихле наложенные на $v_k(x)$ условия выполняются при следующих требованиях: $v_k(x)$ равномерно на $X$ стремятся к нулю и при каждом $x \in X$ $v_k(x)$ образуют монотонную последовательность.

**Следствие**. Признак 3 Лейбница — следствие признака Дирихле.

Действительно, если взять $v_k(x) = |a_k|$, $u_k(x) = \operatorname{sign} a_k(x)$, где для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ выполняются условия признака 3 Лейбница, то для $u_k$ и $v_k$ выполняются условия признака 5 Дирихле.

## **Лекция 9** (30.09.20)
## Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

Об изменении порядка пределов

**Теорема 1** (о перестановке пределов). *Пусть $\mathfrak{D}$ — база в множестве $X$, $D \in \mathfrak{D}$ и $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{D}{\rightrightarrows}} f$, для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует $\lim\limits_{\mathfrak{D}} f_k = b_k$. Тогда существует $\lim\limits_{\mathfrak{D}} f = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$ (т.е. $\lim\limits_{\mathfrak{D}} \lim\limits_{k\to\infty} f_k = \lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{\mathfrak{D}} f_k$).*

▼ Используя критерий Маркова–Гордона получаем, что достаточно проверить, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > N,\ \exists D_n \in \mathfrak{D}\ \forall x \in D_n : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В силу равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{R}$, что для любого натурального $n > N$ верно неравенство $\sup\limits_{D} |f_n - f| < \varepsilon$. Взяв $D_n = D$ видим, что в рассматриваемом случае критерий Маркова-Гордона существования и равенства двух повторных пределов $\lim\limits_{\mathfrak{D}} f = \lim\limits_{\mathfrak{D}} \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{\mathfrak{D}} f_k$ выполнен. ▲

Частным случаем теоремы 1 является следующая теорема.

**Теорема 2** (о перестановке пределов). *Пусть $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f$, где $E$ — подмножество метрического пространства, $a$ — предельная точка $E$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ существует конечный $\lim\limits_{E\ni x\to a} f_k(x) = b_k$. Тогда существует $\lim\limits_{E\ni x\to a} f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$ (т.е. $\lim\limits_{E\ni x\to a} \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{E\ni x\to a} f_k(x)$).*

**Следствие 1** (о непрерывности). *Если* $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f$*, где* $E$ *— подмножество метрического пространства, и все* $f_k$ *непрерывны в точке* $a \in E$ *по множеству* $E$*, то* $f$ *также непрерывна в точке* $a$ *по множеству* $E$*.*

Это также частный случай теоремы 1. Ее также легко вывести из теоремы 2. Если $a$ — изолированная точка $E$, то любая определенная в $a$ функция непрерывна в $a$ по $E$, а если $a$ — предельная точка $E$, то утверждение следствия сразу следует из теоремы 2.

**Следствие 2** (о непрерывности). *Если* $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{E}{\rightrightarrows}} f$*, где* $E$ *— подмножество метрического пространства, и все* $f_k$ *непрерывны на* $E$*, то* $f$ *также непрерывна на* $E$*.*

Это утверждение сразу вытекает из предыдущего следствия.

**Следствие 3** (о пространстве $C(K)$). *Обозначим через* $C(K)$ *нормированное пространство непрерывных на компакте* $K$ *функций с нормой* $||f|| = \max\limits_{x\in K} |f(x)|$*. Тогда* $C(K)$ *— полное нормированное пространство, сходимость в котором эквивалентна равномерной сходимости на* $K$*.*

Легко убедиться, что $||f||$ обладает всеми свойствами нормы (соответственно, величина $\rho(f,g) = \max\limits_{K} |f-g|$ является метрикой). А так как $\rho(f,g) = \max\limits_{K} |f-g|$, то $\rho(f_k, f) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ тогда и только тогда, когда $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{K}{\rightrightarrows}} f$.

Переформулируем теперь теоремы 1 и 2 и часть следствий для рядов.

**Теорема 3** (о перестановке суммы и предела). *Пусть* $\mathfrak{D}$ *— база в множестве* $X$*,* $D \in \mathfrak{D}$ *и функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на* $D$ *к* $S(x)$*, для каждого* $k \in \mathbb{N}$ *существует конечный* $\lim\limits_{\mathfrak{D}} u_k = \alpha_k$*. Тогда сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *и его сумма* $S = \lim\limits_{\mathfrak{D}} S(x)$ *(т.е.* $\lim\limits_{\mathfrak{D}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{\mathfrak{D}} u_k(x)$*, к пределу можно переходить почленно).*

**Теорема 4** (о перестановке суммы и предела). *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится равномерно на* $E$ *к* $S(x)$*, где* $E$ *— подмножество метрического пространства,* $a$ *— предельная точка* $E$ *и для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существует конечный* $\lim\limits_{E\ni x\to a} u_k(x) = \alpha_k$*. Тогда сходится ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ *и его сумма* $S = \lim\limits_{E\ni x\to a} S(x)$ *(т.е.* $\lim\limits_{E\ni x\to a} \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{E\ni x\to a} u_k(x)$*, к пределу можно переходить почленно).*

**Следствие 1** (о непрерывности). *Если ряд из непрерывных в точке* $a \in E$ *по множеству* $E$ *функций сходится равномерно на* $E$*, то его сумма также непрерывна в точке* $a$ *по множеству* $E$*.*

**Следствие 2** (о непрерывности). *Если ряд из непрерывных на* $E$ *функций сходится равномерно на* $E$*, то его сумма непрерывная на* $E$ *функция.*

Почленное дифференцирование функциональных последовательностей и рядов

**Теорема 4** (о дифференцировании). *Пусть дана последовательность дифференцируемых функций* $f_k$ *на ограниченном промежутке* $I$*, причем последовательность* *производных $f_k'$ сходится равномерно на $I$, а сама последовательность $f_k$ сходится хотя бы в одной точке $I$. Тогда существует дифференцируемая функция $f$ на $I$ такая, что $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f$ и $f_k' \underset{k\to\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f'$ (т.е. $\frac{d}{dx}\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{d}{dx} f_k(x)$).*

▼ Покажем сначала, что последовательность $f_k$ сходится равномерно на $I$ к некоторой функции $f$. Пусть $x_0$ такая точка $I$, что последовательность $f_k(x_0)$ сходится. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n > N:\ |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon$$
$$\text{и } \exists N'\ \forall m, n > N'\ \forall x \in I:\ |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon.$$

Тогда $\forall n, m > \max\{N, N'\}\ \forall x \in I:\ |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |(f_n(x) - f_n(x_0)) - (f_m(x) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$, где первый член в правой части неравенства по формуле Лагранжа равен $|f_n'(c) - f_m'(c)| \cdot |x - x_0| < \varepsilon |I|$, $c$ лежит между $x$ и $x_0$, $|I|$ — длина $I$, а второй член меньше $\varepsilon$, т.е. $|f_n(x) - f_m(x)| < (|I| + 1)\varepsilon = C\varepsilon$, для последовательности $f_k$ выполнено условие Коши равномерной сходимости и, значит, существует такая функция $f$ на $I$, что $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f$.

Теперь покажем, что $f$ дифференцируема на $I$ и что $f_k' \underset{k\to\infty}{\overset{I}{\rightrightarrows}} f'$. Так как последовательность $f_k'$ сходится равномерно на $I$, то достаточно показать, что в каждой точке $x \in I$ $f_k'(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f'(x)$. Для этого зафиксируем $x \in I$ и рассмотрим последовательность функций $\varphi_k(t) = \frac{f_k(t) - f_k(x)}{t - x}$ на $I \setminus \{x\}$. Покажем, что на этом множестве последовательность $\varphi_k(t)$ сходится равномерно. Так как $f_k'$ сходится равномерно на $I$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n, m > N\ \forall x \in I:\ |f_n'(x) - f_m'(x)| < \varepsilon.$$

Тогда $\forall n, m > N\ \ \forall t \in I \setminus \{x_0\}:\ \ |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| = \left|\frac{(f_n(t) - f_m(t)) - (f_n(x) - f_m(x))}{t - x}\right| = |f_n'(c) - f_m'(c)| < \varepsilon$, где по формуле Лагранжа $c$ лежит между $t$ и $x$. Значит, $\varphi_k$ удовлетворяет условию Коши равномерной сходимости на $I \setminus \{x_0\}$, а значит, сходится равномерно на $I \setminus \{x_0\}$.

По условию, $\forall k \in \mathbb{N}$ существует $\lim\limits_{I \ni t \to x} \varphi_k(t) = f_k'(x)$.

Но тогда по теореме 2 существует $\lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{I \ni t \to x} \varphi_k(t) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k'(x) = \lim\limits_{I \ni t \to x} \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(t) = \lim\limits_{I \ni t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x)$. Теорема доказана. ▲

**Замечание**. *Если дополнительно предположить непрерывную дифференцируемость каждого члена последовательности в теореме 4 на $I$, то и предельная функция $f$ будет непрерывно дифференцируема на $I$.*

**Следствие**. *Если каждая функция $f_k$ имеет точную первообразную на промежутке $I$ и последовательность $f_k$ равномерно на $I$ сходится к функции $f$, то и $f$ имеет точную первообразную. Более того, если фиксировать точку $x_0 \in I$ и рассмотреть такие точные первообразные $F_k$ и $F$ этих функций, которые равны нулю в точке $x_0$, то для любого ограниченного промежутка $J \subset I$ имеем $F_k \underset{k\to\infty}{\overset{J}{\rightrightarrows}} F$.*

Переформулируем доказанную теорему и замечание к ней для рядов.

**Теорема 5** (о дифференцировании). *Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ дифференцируемых* *функций на ограниченном промежутке $I$, причем ряд из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на $I$, а сам ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке $I$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится на $I$ равномерно, его сумма $S(x)$ дифференцируема на $I$ и ряд из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно на $I$ к $S'(x)$.*

**Замечание**. *Если дополнительно предположить непрерывную дифференцируемость каждого члена ряда на $I$, то и его сумма будет непрерывно дифференцируема на $I$.*

Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов

**Теорема 6** (об интегрировании). *Если $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f$ и все $f_k$ интегрируемы по Риману (на $[a.b]$, то и $f$ интегрируема по Риману (на $[a.b]$ и $\int\limits_a^b f\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_a^b f_k\,dx$ (т.е. $\int\limits_a^b \lim\limits_{k\to\infty} f_k\,dx = \lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_a^b f_k\,dx$).*

▼ Если $\sup\limits_{[a,b]}(f_k(x) - f(x)) < \varepsilon$, то для любого отмеченного разбиения $\mathbb{T} = \{(\Delta_i, \xi_i)\}$ верна оценка

$$|\mathfrak{S}(f_k, \mathbb{T}) - \mathfrak{S}(f, \mathbb{T})| = |\mathfrak{S}(f - f_k, \mathbb{T})| = \left|\sum_i (f_k(\xi_i) - f(\xi_i)|\Delta_i|\right| < \varepsilon(b-a).$$

Поэтому если $f_k \underset{k\to\infty}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} f$, то $\mathfrak{S}(f_k, \mathbb{T}) \underset{k\to\infty}{\overset{Y}{\rightrightarrows}} \mathfrak{S}(f, \mathbb{T})$ на множестве $Y$ всех отмеченных разбиений $\mathbb{T}$ отрезка $[a, b]$. Если $\mathfrak{D}$ — база Римана в множестве всех отмеченных разбиений, то по условию $\forall k \in \mathbb{N}\ \lim\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{S}(f_k, \mathbb{T}) = \int\limits_a^b f_k\,dx$ — интегралу Римана. Тогда по теореме 1 существует

$$\lim_{\mathfrak{D}} \mathfrak{S}(f, \mathbb{T}) = \lim_{\mathfrak{D}} \lim_{k\to\infty} \mathfrak{S}(f_k, \mathbb{T}) = \lim_{k\to\infty} \lim_{\mathfrak{D}} \mathfrak{S}(f_k, \mathbb{T}) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_a^b f_k\,dx,$$

т.е. $f$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ по Риману и

$$\int\limits_a^b f\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_a^b f_k\,dx. \blacktriangle$$

Переформулируем доказанную теорему для рядов.

**Теорема 7** (об интегрировании). *Если функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$ и $S(x)$ — его сумма, все члены ряда $u_k$ интегрируемы по Риману* *(по на $[a.b]$, то и $S(x)$ интегрируема по Риману (по на $[a.b]$ и $\int\limits_a^b S\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_k\,dx$ (т.е. $\int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_k\,dx$).*

## **Лекция 10** (02.10.20)
## **Критерий компактности Хаусдорфа**

### Компакты

**Определение 1**. Вспомним, что подмножество $K$ метрического пространства называется компактом (или компактным множеством), если из любого покрытия $K$ открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие (конечную систему множеств, также покрывающую $K$). Подмножество $P$ метрического пространства называется **предкомпактным**, если существует компакт $K \supset P$.

Вспомним, что замыканием подмножества $A$ метрического пространства называется наименьшее содержащее $A$ замкнутое множество $\overline{A} = \bigcap\limits_{F\supset A} F$, где $F$ — замкнутое множество.

**Теорема 1**. *Множество предкомпактно тогда и только тогда, когда его замыкание — компакт.*

▼ Достаточность очевидна из определения. Покажем необходимость. Если $P$ — предкомпактное множество, то существует компакт $K \supset P$. Так как $K$ замкнутое множество, то $K \supset \overline{P}$ и, значит, $\overline{P}$ компакт (как замкнутое подмножество компакта). ▲

### Критерий компактности Хаусдорфа

**Определение 2**. В метрическом пространстве множество $A$ является $\varepsilon$**-сетью** для множества $B$, где $\varepsilon > 0$, если $\forall b \in B\ \ \exists a \in A$: $\rho(a,b) \leqslant \varepsilon$.

**Определение 3**. Множество в метрическом пространстве называется **вполне ограниченным**, если оно для любого $\varepsilon > 0$ имеет конечную $\varepsilon$-сеть.

**Теорема 2**. *Если для некоторого $\varepsilon > 0$ множество имеет конечную $\varepsilon$-сеть, то оно ограничено.*

▼ Пусть $\{x_k\}_{k=1}^n$ — конечная $\varepsilon$-сеть множества $B$. Положим $r = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\rho(x_1,x_k)+\varepsilon$, тогда $\overline{B}_r(x_1) \supset B$. ▲

**Следствие**. *Вполне ограниченное множество ограничено.*

**Лемма 1**. *Если конечное множество $A$ является $\varepsilon$-сетью для множества $P$, $\varepsilon > 0$, то $A$ является $\varepsilon$-сетью и для замыкания $\overline{P}$.*

▼ Пусть $y \in \overline{P}$. Если $\min\limits_{x\in A}\rho(x,y) = \alpha > \varepsilon$, то открытый шар $B_{\alpha-\varepsilon}(y)$ не пересекается с $P$, $M \setminus B_{\alpha-\varepsilon}(y) \supset P$, а значит, $M \setminus B_{\alpha-\varepsilon}(y) \supset \overline{P}$, что противоречит тому, что $y \in \overline{P}$. Значит, $\min\limits_{x\in A}\rho(x,y) \leqslant \varepsilon$, $A$ — $\varepsilon$-сеть для $\overline{P}$. ▲

**Лемма 2**. *Если конечное множество $\{x_k\}_{k=1}^n$ является $\varepsilon$-сетью для множества $P$, $\varepsilon > 0$, то существует конечное множество $\{y_k\}_{k=1}^m \subset P$, $m \leqslant n$, которое является $2\varepsilon$-сетью $P$.*

▼ Для тех $k$, для которых $\overline{B}_\varepsilon(x_k)\cap P \neq \varnothing$, выберем по точке $y \in \overline{B}_\varepsilon(x_k)\cap P$. Легко видеть, что выбранные точки составляют искомое множество $\{y_k\}_{k=1}^m \subset P$, $m \leqslant n$, которое является $2\varepsilon$-сетью $P$. ▲

**Теорема 3** (критерий компактности Хаусдорфа). *В полном метрическом пространстве множество предкомпактно тогда и только тогда, когда вполне ограничено, а компактно тогда и только тогда, когда вполне ограничено и замкнуто.*

▼ Сначала покажем, что второе утверждение следует из первого. Действительно, если $P$ — компакт, то это замкнутое множество, которое по первому утверждению вполне ограничено. Если множество $P$ замкнуто и вполне ограничено, то по первому утверждению $P$ предкомпактно, а значит, его замыкание $\overline{P} = P$ компактно.

Итак, доказываем первое утверждение. Необходимость. Пусть $P$ — предкомпакт, тогда $\overline{P}$ — компакт. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда $\{B_\varepsilon(x)\}_{x\in\overline{P}}$ — открытое покрытие $\overline{P}$, из которого в силу компактности можно выбрать конечное подпокрытие $\{B_\varepsilon(x_k)\}_{k=1}^n$. Тогда $\{x_k\}_{k=1}^n$ — $\varepsilon$-сеть для множества $\overline{P}$ и для $P$.

Достаточность.

Предположим, что $P$ обладает конечной $\varepsilon$-сетью для всех $\varepsilon > 0$, но не предкомпакт, т.е. $\overline{P}$ не является компактом. Тогда существует покрывающая $\overline{P}$ система открытых множеств $\{G_\lambda\}$, из которой нельзя выделить конечного подпокрытия. Покажем, что это приводит к противоречию.

Будем $\overline{B}_r(x)$ обозначать замкнутый шар с центром в точке $x$ радиуса $r$, т.е. множество $\{t \in M : \rho(t,x) \leqslant r\}$ (метрическом пространстве $M$). Пусть $\{x_k^1\}$ — конечная $2^{-1}$-сеть для $\overline{P}$. Из множеств $\overline{P} \cap \overline{B}_{2^{-1}}(x_k^1)$, покрытых системой $\{G_\lambda\}$, хотя бы одно не имеет конечного подпокрытия (иначе и $\overline{P}$ имело бы конечное подпокрытие). Обозначим его $P_1 = \overline{P} \cap \overline{B}_1(x_{k_1}^1)$.

Пусть $\{x_k^2\} \subset P_1$ — конечная $2^{-2}$-сеть для $P_1$ (которая существует в силу существования конечной $2^{-2}$-сети для $\overline{P}$). Из множеств $P_1 \cap \overline{B}_{2^{-2}}(x_k^2)$, покрытых системой $\{G_\lambda\}$, хотя бы одно не имеет конечного подпокрытия (иначе и $P_1$ имело бы конечное подпокрытие). Обозначим его $P_2 = P_1 \cap \overline{B}_{2^{-2}}(x_{k_2}^2)$. Отметим, что $\rho(x_{k_1}^1, x_{k_2}^2) \leqslant 2^{-1}$.

Пусть $\{x_k^3\} \subset P_2$ — конечня $2^{-3}$-сеть для $P_2$ (которая существует в силу существования конечной $2^{-3}$-сети для $\overline{P}$). Из множеств $P_2 \cap \overline{B}_{2^{-3}}(x_k^3)$, покрытых системой $\{G_\lambda\}$, хотя бы одно не имеет конечного подпокрытия (иначе и $P_3$ имело бы конечное подпокрытие). Обозначим его $P_3 = P_1 \cap \overline{B}_{2^{-3}}(x_{k_3}^3)$. Отметим, что $\rho(x_{k_2}^2, x_{k_3}^3) \leqslant 2^{-2}$.

Пусть $\{x_k^4\} \subset P_3$ — конечная $2^{-4}$-сеть для $P_3 \ldots$. И т.д.

Последовательность точек $x_{k_j}^j$ — последовательность Коши (т.к. $\rho(x_{k_j}^j, x_{k_{j+1}}^{j+1}) \leqslant 2^{-j}$). Пусть $x$ — ее предел, который существует в силу полноты пространства. В любую ее $\varepsilon$-окрестность $B_\varepsilon(x)$ множества $P_k$ попадают начиная с некоторого номера. Значит, точка $x$ — точка соприкосновения $\overline{P}$ и, следовательно, $x \in \overline{P}$. Но тогда существует $G_\lambda \ni x$ и существует $B_\varepsilon(x) \subset G_\lambda$, в которую множества $P_k$ попадают начиная с некоторого номера, что противоречит тому, что эти множества не имеют конечного подпокрытия множествами системы $\{G_\lambda\}$. Полученное противоречие доказывает, что если $P$ обладает конечной $\varepsilon$-сетью для всех $\varepsilon > 0$, то $P$ предкомпакт. Теорема доказана. ▲

## Критерий предкомпактности Арцеля–Асколи

Напомним, что семейство функций $\{f_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ **равномерно ограничено** (**ограничено в совокупности**) на множестве $E$, если все функции семейства определены на $E$ и $\sup\limits_{\lambda\in\Lambda,\, x\in E} |f_\lambda(x)| < +\infty$ (т.е. $\exists C \geqslant 0 \ \ \forall \lambda \in \Lambda \ \ \forall x \in E$: $|f_\lambda(x)| \leqslant C$).

**Определение 4**. Семейство функций $\{f_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ **равностепенно непрерывно** на подмножестве $E$ метрического пространства, если все функции семейства определены на $E$ и

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,x'\in E\ \forall\lambda\in\Lambda:\quad \rho(x,x')<\delta \implies |f_\lambda(x)-f_\lambda(x')|<\varepsilon$$

или, эквивалентно

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in E\ \forall x'\in B_\delta(x)\cap E\ \forall\lambda\in\Lambda:\quad |f_\lambda(x)-f_\lambda(x')|<\varepsilon.$$

**Замечание 1**. Легко видеть, что для семейства из одной функции данное определение совпадает с определением равномерной непрерывности на $E$, а в случае более многочисленного семейства из данного определения следует равномерная непрерывность любой функции семейства на $E$.

**Замечание 2**. В приведенных определениях функции комплекснозначны. Но определения легко модифицировать для функций со значениями в некотором метрическом пространстве.

**Теорема 4** (критерий предкомпактности Арцеля–Асколи). *Пусть $C(K)$ — нормированное пространство непрерывных комплекснозначных функций на компакте $K$ (в некотором метрическом пространстве) с нормой $\|f\|=\max\limits_K|f(x)|$. Семейство функций $\Phi\subset C(K)$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

▼ Необходимость. Пусть семейство $\Phi$ предкомпактно. Тогда для любого $\varepsilon>0$ оно имеет конечную $\varepsilon$-сеть $\{f_k\}_{k=1}^n$. Значит семейство $\Phi$ ограничено в $C(K)$, т.е. существует шар $B_r(g)\supset\Phi$. Но тогда для любой $f\in\Phi$ имеем $\|f\|=\max\limits_K|f(x)|\leqslant r+\|g\|$ и, значит, $\Phi$ равномерно ограничено. Каждая из функций $f_k$ $\varepsilon$-сети непрерывна, а значит, и равномерно непрерывна на компакте $K$. Поэтому для того же $\varepsilon>0$ найдутся такие $\delta_k>0$, $1\leqslant k\leqslant n$, что при $\rho(x,x')<\delta_k$ верна оценка $|f_k(x)-f_k(x')|<\varepsilon$. Но тогда, положив $\delta=\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\delta_k$, получаем, что $\forall x,x'\in K\ \ \forall f\in\Phi$: $\rho(x,x')<\delta \implies |f(x)-f(x')|\leqslant|f(x)-f_k(x)|+|f_k(x)-f_k(x')|+|f_k(x')-f(x')|<3\varepsilon$, где $f_k$ такая функция из $\varepsilon$-сети, что $\rho(f,f_k)=\max\limits_K|f(x)-f_k(x)|\leqslant\varepsilon$. Значит, семейство $\Phi$ равностепенно непрерывно.

Достаточность. Пусть семейство $\Phi\subset C(K)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Возьмем любое $\varepsilon>0$ и будем строить конечную $\varepsilon$-сеть для $\Phi$. Выберем $\delta>0$ так, чтобы $\forall x,x'\in K\ \ \forall f\in\Phi$: $\rho(x,x')<\delta\implies|f(x)-f(x')|<\varepsilon$. Для компакта $K$ по критерию Хаусдорфа существует конечная $\delta$-сеть $A=\{x_1,\ldots,x_n\}\subset K$. Рассмотрим отображение $\Phi$ в $\mathbb{C}^n$ $\ f\to(f(x_1),\ldots,f(x_n))$. Метрическое пространство $\mathbb{C}$ то же самое, что $\mathbb{R}^2$, а метрическое пространство $\mathbb{C}^n$ то же самое, что $\mathbb{R}^{2n}$. Рассматриваемое отображение непрерывно покоординатно, а значит, просто непрерывно. В силу равномерной ограниченности $\Phi$ его образ $\tilde\Phi$ ограниченное, а значит, предкомпактное множество в $\mathbb{C}^n$, оно имеет конечную $\varepsilon$-сеть, состоящую из образов функций $f_m\in\Phi$, $m=1,\ldots,M$. Покажем, что функции $f_m$, $m=1,\ldots,M$, являются $3\varepsilon$-сетью для $\Phi$. Пусть $f\in\Phi$. Тогда $(f(x_1),\ldots,f(x_n))\in\tilde\Phi$ и, значит, существует $f_m$, $1\leqslant m\leqslant M$, что $\rho\big((f(x_1),\ldots,f(x_n)),(f_m(x_1),\ldots,f_m(x_n))\big)=\sqrt{\sum\limits_{j=1}^n|f(x_j)-f_m(x_j)|^2}<\varepsilon$, а значит, $|f(x_j)-f_m(x_j)|<\varepsilon$ для $j=1,\ldots,n$. Пусть $x$ — любая точка $K$. Так как $A=\{x_1,\ldots,x_n\}\subset K$ — $\delta$-сеть в $K$, то найдется в ней точка $x_j$, $1\leqslant j\leqslant n$, что

$\rho(x, x_j) < \delta$. Тогда в силу равностепенной непрерывности и выбора $\delta > 0$ выполняются неравенства $|f(x) - f(x_j)| < \varepsilon$ и $|f_m(x) - f_m(x_j)| < \varepsilon$. А тогда имеем оценку $|f(x) - f_m(x)| \leqslant |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_m(x_j)| + |f_m(x_j) - f_m(x)| < 3\varepsilon$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ в $\Phi$ существует конечная $3\varepsilon$-сеть. Значит, по критерию Хаусдорфа, $\Phi$ — предкомпакт. ▼

**Следствие** (Арцеля–Асколи). *Из любого равномерно ограниченного и равностепенно непрерывного семейства функций на компакте $K$ можно выделить равномерно сходящуюся на $K$ последовательность.*

**Следствие** (Арцеля–Асколи). *Из любой равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной последовательности функций на компакте $K$ можно выделить равномерно сходящуюся на $K$ подпоследовательность.*

## Лекция 11 (07.10.20)
## Степенные ряды и их свойства

### Степенные ряды

**Определение 1**. **Степенным рядом** называют функциональный ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, где коэффициенты $c_k$ и $z_0$ — действительные или комплексные числа, а $z$ — действительная или комплексная переменная.

Будем в дальнейшем считать, если не оговорено иное, что $c_k$, $z_0$ и $z$ из $\mathbb{C}$ — множества комплексных чисел.

Обозначая $z - z_0$ за $w$ можно всегда вместо ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ рассматривать ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k w^k$, поэтому в дальнейшем будем изучать именно такие ряды.

**Теорема 1** (Коши–Адамара). *Для любого степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ существует $R$, $0 \leqslant R \leqslant +\infty$, такое что ряд сходится и притом абсолютно в открытом круге комплексной плоскости $\mathbb{C}$ $B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < R\}$ и расходится во внешности этого круга $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| > R\}$. Величина*

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$$

*(считаем $\frac{1}{+\infty} = 0$ и $\frac{1}{0} = +\infty$).*

▼ По признаку Коши ряд абсолютно сходится в точке $z$, если $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} < 1$ и расходится, если $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k z^k|} = |z| \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 1$, что и доказывает теорему. ▲

**Определение 2**. Величину $R$ называют **радиусом сходимости**, круг $B_R(0)$ — **кругом сходимости**, а его пересечение с действительной прямой — **интервалом сходимости**.

**Теорема 2**. *Радиус сходимости $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$, если этот предел существует.*

▼ По признаку Д'Аламбера ряд сходится, если $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1} z^{k+1}}{c_k z^k}\right| = |z| \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| < 1$, и расходится, если приведенный предел больше 1. Значит, $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$. ▲

**Теорема 3**. *Степенной ряд абсолютно и равномерно сходится на любом замкнутом круге $B_q(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant q\}$ с $q < R$ — радиуса сходимости.*

▼ Из теоремы 2 следует, что абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{k=0} c_k q^k$, то есть сходится ряд $\sum\limits_{k=0} |c_k| q^k$, который почленно мажорирует степенной ряд на круге $B_q(0)$. Утверждение теоремы следует из признака Вейерштрасса. ▲

**Следствие**. *Степенной ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из круга сходимости.*

Действительно, если компакт $K \subset B_R(0)$, то $K \subset \bigcup\limits_{q<R} B_q(0)$ и, значит, существует $B_q(0) \supset K$ с $q < R$.

Из теоремы 3 также сразу следуют две следующие теоремы.

**Теорема 4**. *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией внутри его круга сходимости.*

**Теорема 5** (Абеля). *Если степенной ряд сходится в точке $w \in \mathbb{C}$, то он сходится абсолютно в открытом круге $B_{|w|}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < |w|\}$ и равномерно на любом круге $\overline{B}_q(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant q\}$ с $q < |w|$.*

**Теорема 6** (о дифференцировании). *Радиусы сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ и ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$, полученного из него почленным дифференцированием, совпадают и второй ряд является производной (в комплексном смысле) первого ряда в круге сходимости.*

▼ Если $R$ — радиус сходимости первого ряда, $R = \left(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}\right)^{-1}$, то такой же радиус сходимости и у ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k c_k z^k$, поскольку $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{k|c_k|} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|}$, а значит, и у ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1}$.

Используя формулу $a^n - b^n = (a-b) \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ получаем, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k (z+\Delta z)^k - c_k z^k}{\Delta z} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (z+\Delta z)^k - \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k}{\Delta z} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-1} \sum\limits_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right)^j$. Последний ряд сходится равномерно при фиксированном $z$ по $\Delta z \in \{\Delta z : 0 < |\Delta z| < \varepsilon\}$, где $|z| + \varepsilon < R$, по признаку Вейерштрасса, т.к. почленно мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k| \cdot k(|z| + \varepsilon)^{k-1}$ (ведь ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k c_k w^{k-1}$ абсолютно сходится при $|w| < R$). Значит,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right)^j = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{k-1} \lim_{\Delta z \to 0} \sum_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right)^j = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}.$$

Теорема доказана. ▲

Выведем из теоремы о дифференцировании степенного ряда несколько следствий.

**Следствие 1**. *Сумма степенного ряда бесконечно дифференцируема в комплексном смысле (когда приращение аргумента $\Delta z$ комплексное) в круге сходимости.*

**Следствие 2**. *Любой степенной ряд имеет в круге сходимости комплексную первообразную.*

Действительно, в круге сходимости степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ является производной ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}$.

**Теорема 7** (об интегрировании). *Пусть отрезок $[a,b]$ действительной оси $\mathbb{R}$ принадлежит кругу сходимости $B_R(z_0)$ степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$. Тогда сумма ряда $S(z)$ интегрируема на $[a,b]$ по Риману и $\int\limits_a^b S(x)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b c_k(x-z_0)^k dx$.*

▼ Ряд равномерно сходится на отрезке внутри круга сходимости, поэтому данная теорема следует из теоремы 7 лекции 9 об интегрировании равномерно сходящихся рядов функций. ▲

**Следствие**. *На любом отрезке из интервала сходимости $(-R, R)$ степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ интегрирование ряда сводится к его почленному интегрированию.*

**Теорема 8**. *Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ имеет непустой круг сходимости (радиус сходимости $R > 0$), то этот ряд является рядом Тейлора своей суммы, т.е. если $S(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, то $c_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.*

▼ Теорема 8 сразу следует из теоремы 6, т.к. $S^{(n)}(z) = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} c_k z^{k-n}$ и, значит, $S^n(0) = n! \cdot c_k$. ▲

**Теорема 9** (единственности). *Если суммы степенных рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ совпадают в точках $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $z_n \neq 0$ для $n \in \mathbb{N}$, то эти ряды совпадают тождественно, т.е. $a_k = b_k$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$.*

▼ Так как $a_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z_n^k = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z_n^k = b_0$, то $a_0 = b_0$. Если $a_k = b_k$ для всех $k < K$, то в точках $z_n$ совпадают суммы степенных рядов $\sum\limits_{k=K}^{\infty} a_k z^k$ и $\sum\limits_{k=K}^{\infty} b_k z^k$, а значит, совпадают и суммы рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k+K} z^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_{k+K} z^k$, а тогда по уже доказанному $a_K = b_K$. Согласно принципу математической индукции теорема доказана. ▲

**Теорема 10** (Абеля). *Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в точке $z = z_0$, то он сходится равномерно на отрезке $[0, z_0] = \{z \in \mathbb{C} : \ z = \alpha z_0, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1\}$ и его сумма непрерывна на нем.*

▼ По признаку 4 Абеля из лекции 8 ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z_0^k \cdot \alpha^k$ равномерно суммируется по $\alpha$ на $[0,1]$ и, значит, его сумма непрерывна на $[0,1]$. ▲

**Следствие**. *Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в точке $R$, где $R$ — радиус сходимости, то его сумма непрерывна в ней слева, а если сходится в точке $-R$, то его сумма непрерывна в ней справа.*

## Применения теории степенных рядов

Вычисление рядов

а) $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots$ при $|t| < 1$, откуда

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \text{ при } -1 < x < 1.$$

При $x = 1$ ряд сходится по признаку Лейбница, тогда по последней теореме Абеля

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

б) $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \ldots$ при $|t| < 1$, откуда

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t}dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots \text{ при } -1 < x < 1.$$

При $x = 1$ ряд сходится по признаку Лейбница, тогда по последней теореме Абеля

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots.$$

а) $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} - \ldots$ при всех $t \in \mathbb{R}$, откуда

$$\int\limits_0^x e^{-t^2}dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \ldots \text{ при всех } x \in \mathbb{R}.$$

б) $\frac{\sin t}{t} = 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \ldots$ при всех $t \in \mathbb{R}$, откуда

$$\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots \text{ при всех } x \in \mathbb{R}.$$

### Вычисление числа $\pi$

Ряд $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}$ — плохой ряд для вычислений, т.к. сходится медленно. Ряд $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^7 + \cdots = \frac{\sqrt{3}}{3}\big(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 9} - \frac{1}{7 \cdot 27} + \cdots = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ сходится гораздо быстрее. Но можно найти еще более быстро сходящиеся ряды. Пусть $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, тогда $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$, откуда $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{1}{7} - \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} - \cdots + 2\big(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \ldots\big)$, эти ряды сходятся еще лучше.

### Функции комплексного переменного

Функции $e^x$, $\cos x$ и $\sin x$ можно продолжить с $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$ следующим образом:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Из сопоставления рядов легко получить формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. Переходя в формуле к действительному переменному $x$ получаем $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Для функции $e^z$ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ легко проверяется основное свойство экспоненты $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, ведь

$$e^{z+w} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j z^j w^{k-j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{z^j}{j!} \frac{w^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!} = e^z \cdot e^w$$

(в конце используется теорема Мертенса о произведении рядов). Из основного свойства экспоненты и равенств $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ легко выводятся основные свойства тригонометрических функций. Из равенств также видна связь тригонометрических функций с гиперболическими $\cos iz = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \operatorname{ch} z$, $\sin iz = \frac{-e^z+e^{-z}}{2i} = i\operatorname{sh} z$. Функция $e^z$ $2\pi i$-периодична, поэтому обратная к ней функция не может быть однозначной, это многозначная функция.