

1. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Операции над рядами. Абсолютная и условная сходимости.
2. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости: ограниченность частичных сумм, признаки сравнения.
3. Признаки сходимости Даламбера, Коши, интегральный Коши-Маклорена.
4. Признаки сходимости Куммера, Раабе и Гаусса.
5. Признак сходимости Лейбница. Последовательности ограниченной вариации, их свойства.
6. Преобразование Абеля. Признаки сходимости Абеля и Дирихле.
7. Теорема Коши о перестановках членов ряда.
8. Теорема Римана о перестановках членов ряда.
9. Умножение числовых рядов. Теоремы Коши и Мертенса.
10. Бесконечные произведения, условия сходимости.
11. Разложение функции  $\sin x$  в бесконечное произведение.
12. Метод суммирования Чезаро (средних арифметических), его вполне регулярность и необходимое условие суммируемости.
13. Метод суммирования Абеля. Теорема Фробениуса о суммируемости методом Абеля рядов, суммируемых методом Чезаро. Вполне регулярность метода Абеля.
14. Теорема Таубера. Средние Валле-Пуссена, тауберова теорема Харди.
15. Критерий Маркова-Гордона, равномерная сходимость по базе и перестановка предельных переходов.
16. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Операции с равномерной сходимостью. Критерий Коши равномерной сходимости. Супремум-критерий.
17. Признаки Вейерштрасса и Дини равномерной сходимости.
18. Признаки Лейбница, Абеля и Дирихле равномерной сходимости.
19. Теорема об изменении порядка пределов и следствия из неё. Полнота пространства  $C(K)$ .
20. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов.
21. Критерий компактности Хаусдорфа.
22. Равностепенная непрерывность. Теорема Арцеля-Асколи.
23. Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность суммы степенного ряда.
24. Дифференцируемость и интегрируемость суммы степенного ряда.
25. Степенной ряд как ряд Тейлора своей суммы. Теорема единственности. Теорема Абеля о равномерной сходимости на отрезке  $[0, z_0]$ , где  $z_0$  — точка сходимости степенного ряда.

### Список задач к коллоквиуму.

1. Пусть все  $a_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ . Доказать, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n} = \infty$ , а для  $\varepsilon > 0$   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{1+\varepsilon}} < \infty$ .
2. Пусть все  $a_n > 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ ,  $r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ . Доказать, что  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}} = \infty$ , а для  $\varepsilon > 0$   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_{n-1}^{1+\varepsilon}} < \infty$ .
3. Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$  сходится неравномерно на  $(0, 2\pi)$ .
4. Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  сходится неравномерно на  $[0, 2\pi]$ .
5. Доказать, что частичные суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  ограничены в совокупности.
6. Доказать, что ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2 \ln n}$  дифференцируем на  $\mathbb{R}$  и его производная равна  $-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln n}$ .
7. Доказать, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  интегрируем на  $[0, \pi]$  по Риману и указать величину этого интеграла.
8. Доказать, что несобственный интеграл Римана  $\int_{(0, \pi/2]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} dx$  существует и вычислить его.