Явления с запаздыванием отклика
(другой пример)

В.А. Зорич

Аннотация

Изложенное ниже может служить содержательным, хотя и нетривиальным, элементом упражнений по математическому анализу в семестре, где рассматриваются элементы теории поля, операторы градиент, ротор, дивергенция, и их вычисление в разных координатах, включающее работу с неявными функциями.

I. Некоторые исходные данные.

Мы собираемся предложить провести в качестве полезных упражнений некоторые вычисления, относящиеся к распространению и приёму электромагнитного сигнала (например, видимого света), исходящего от движущегося удалённого заряда. Не погружаясь в электродинамику и фундаментальные уравнения Максвела, мы стартуем со следующих исходных данных, которые возникают как определённый этап исследования этих уравнений:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi\ , \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}\ . \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — интересующие нас трёхмерные векторы напряжённости электрического и магнитного поля соответственно, c — скорость света, φ и $\mathbf{A}$ — вспомогательные функции, называемые скалярным и векторным потенциалами электромагнитного поля. (Их часто объединяют в один четырёхмерный вектор $(\varphi, \mathbf{A})$, который изменяется под действием преобразований Лоренца как вектор пространства Минковского. Это обстоятельство поясняет инвариантность самих уравнений Максвелла, которые могут быть записаны в лоренц-инвариантном виде. Мы лишь напоминаем этот важный факт, но он не используется в предложенных ниже вычислительных упражнениях.)

II. Запаздывание принимаемого сигнала.

Находясь в фиксированной точке пространства, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}$, наблюдаем электромагнитное поле (пусть свет), создаваемое движущимся удалённым точечным зарядом e. Известен закон движения заряда $\mathbf{r}_e(\tau)$ как функция времени τ. Сигнал, создаваемый зарядом в момент времени τ, распространяется с конечной скоростью c и достигает наблюдателя в более поздний момент времени t. Вектор $\mathbf{R}$, идущий от заряда к наблюдателю, очевидно, равен $\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\tau)$. Пусть $R = |\mathbf{R}|$ — длина этого вектора. Тогда запаздывание момента t приёма сигнала, посланного зарядом в момент τ, определяется соотношением

$$t = \tau + \frac{R(\tau)}{c}. \tag{2}$$

Величина $R = |\mathbf{R}|$, как и сам вектор $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_e(\tau)$, через время τ зависят от переменных координат движущегося заряда. Вектор $\mathbf{r}$ постоянен (точка наблюдения), а $\frac{d\mathbf{r}_e}{d\tau} = \mathbf{v}(\tau)$ — скорость заряда в момент времени τ. Таким образом,

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\tau} = -\mathbf{v}(\tau). \tag{3}$$

III. Запаздывающие потенциалы.

Квалифицированные физики нашли, что для вычисления компонент электромагнитного поля по формулам (1), надо брать функции

$$\varphi = \frac{e}{(R - \frac{\mathbf{vR}}{c})} \qquad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c(R - \frac{\mathbf{vR}}{c})}. \tag{4}$$

Они называются *запаздывающими потенциалами* или *потенциалами Лиенара — Вихерта*. Здесь e — величина заряда.

Тонкость состоит в том, что потенциалы (4), точнее, все величины в правых частях равенств (4), берутся в момент τ, в то время как все дифференцирования в формулах (1) производятся в точке наблюдения (x, y, z) по времени t наблюдателя. Связь τ и t даётся соотношением (2), которое определяет τ как неявную функцию t, x, y, z.

IV. Задача, ответ и комментарий.

Задача теперь в том, чтобы, разобравшись в ситуации и правильно выполнив все нужные дифференцирования, самостоятельно найти следующие, очень ценные окончательные формулы

$$\mathbf{E} = e\frac{1-\frac{v^2}{c}}{(R-\frac{\mathbf{vR}}{c})^3}(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R) + \frac{e}{c^2(R-\frac{\mathbf{vR}}{c})^3}[\mathbf{R}[(\mathbf{R}-\frac{\mathbf{v}}{c}R)\dot{\mathbf{v}}]] \ , \qquad (5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R}[\mathbf{RE}] \ . \qquad (6)$$

Прокомментируем формулу (5). В ней первое слагаемое не зависит от ускорения $\dot{\mathbf{v}}$ заряда и убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда до наблюдателя. Второе слагаемое, наоборот, зависит от ускорения $\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}$ заряда и убывает обратно пропорционально расстоянию от заряда до наблюдателя. Именно оно и позволяет принимать электромагнитные сигналы на больших расстояниях, на которых первое слагаемое практически исчезает.

V. Справка, помощь, самоконтроль и развитие.

Если возникнет потребность в консультации, в самоконтроле, а также при желании узнать больше, можно открыть книжку [1].

Книгу можно полистать в интернете, например, на сайте http://books.e-heritage.ru/book/10084340

VI. Вопрос на вырост.

Вычисляя поле в момент t на расстоянии R от заряда, мы связываем его с состоянием (ускорением) заряда в момент $\tau = t - R/c$, а не в момент $t + R/c$. Одно это, казалось бы, должно говорить о том, что законы электродинамики необратимы. Но эти законы диктуются уравнениями Максвелла, которые обратимы так же, как и уравнения механики Ньютона. Как же вопреки обратимости решений уравнений возникает необратимость большинства наблюдаемых нами явлений? Почему всё течёт в одну сторону и не течёт в другую? Вопрос глубокий. Его (как и многое другое) обсуждает термодинамика, точнее, статистическая термодинамика. Она учитывает атомарную структуру вещества (например, молекулярную структуру газа) и тенденцию многочастичных систем переходить из менее вероятного состояния в более вероятное. Возникает вездесущее понятие *энтропии*, а фундаментальный закон (второе начало термодинамики) состоит в том, что процессы развиваются в направлении роста энтропии.

Начальные, но содержательные и ценные сведения об этом можно найти, например, в первых главах книги [2].

Литература

[**1**] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. М., Наука, (1969). (С. 248 — 251).

[**2**] Р. Фейнман. Фейнмановские лекции по физике. Книга 4 (кинетика, теплота, звук). Москва, Изд-во Мир, 1967.