Явления с запаздыванием отклика

В.А. Зорич

Аннотация

В математике есть целый пласт задач, где приходится иметь дело с функциями и уравнениями с так называемым *запаздывающим аргументом*. Не погружаясь в теорию, приведём здесь лишь некоторые примеры таких задач, имеющие общее происхождение. Они вполне содержательны, наглядны и вместе с тем в математическом отношении настолько доступны студенту первого-второго курса мехмата (да и не только мехмата), что могут быть использованы в лекциях и упражнениях по математическому анализу.

I. Два вводных слова.

Охотник и стрельба с упреждением
(перемещение птицы и учёт конечности скорости пули).
Звук от высоко летящего самолёта и текущее положение самолёта.
Молния и запоздалый гром.
Огромность скорости света
(предмет на земле там, где мы его видим).
Скорость света всё же конечна
(с этим приходится не только считаться, но и воочию сталкиваться).
Звёздное небо. Скольких его объектов уже не стало, пока свет от них дошёл до нас!

II. Наблюдаем удалённый источник света (волн).

Пусть источник света (например, какой-то заряд) перемещается, находясь на большом расстоянии R от наблюдателя. Пусть о — условная точка, в окрестности которой происходит движение, и пусть R_0 — расстояние от наблюдателя до неё. Тогда $R \approx R_0 \gg 1$.

Введём следующую систему ортогональных координат: точка о — начало, ось z идёт вдоль направления от наблюдателя к о, плоскость x, y перпендикулярна этому направлению.

Пусть $(x, y, z)(\tau)$ — закон движения заряда в этих координатах.

Считаем, что величины $x(\tau), y(\tau), z(\tau)$ малы по сравнению с R_0, поэтому $R(\tau)$, то есть расстояние от наблюдателя до точки $(x, y, z)(\tau)$, с большой точностью совпадает с $R_0 + z(\tau)$.

Время $\Delta = R(\tau)/c$ распространения света от источника к наблюдателю, *время запаздывания сигнала*, можно вычислять по формуле $\Delta \approx (\ R_0 + z(\tau)\ )/c$.

Отсюда связь времени (момента) наблюдения t, и времени (момента) τ самого события: $t = \tau + (\ R_0 + z(\tau)\ )/c$, то есть $t = \tau + \Delta$.

В момент наблюдения t источник уже ушёл из положения $(x, y, z)(\tau)$, но в момент t мы смотрим именно в точку $(x, y, z)(\tau)$.

Пусть $\mathbf{e}(\tau)$ — единичный вектор этого направления.

Изменение направления вектора $\mathbf{e}(\tau)$ (через его вторую производную) играет ключевую роль в вопросах распространения и приёма электромагнитных волн (сигналов). Само же изменение направления вектора $\mathbf{e}(\tau)$ по существу связано лишь с движением точки $(x, y)(\tau)$ по плоскости (x, y), которая почти ортогональна направлению наблюдения. Соответствующие компоненты единичного вектора $\mathbf{e}(\tau)$ суть $(x/R, y/R)(\tau)$ или $(x/R_0, y/R_0)(\tau)$, поскольку $R \approx R_0 \gg 1$.

Подводя итог проведённым рассмотрениям, выпишем явно связь истинного закона движения объекта (источника) $(x, y, z)(\tau)$ и закона его движения $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})(t)$ с точки зрения наблюдателя, получающего с задержкой информацию о положении объекта (источника, заряда):

$(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})(t) = (x, y, z)(\tau), \quad$ если $\quad t = \tau + (\ R_0 + z(\tau)\ )/c$,

то есть, если $ct = c\tau + R_0 + z(\tau)$.

III. Наблюдаем принимаемый сигнал.

Движущийся с ускорением (например, колеблющийся) удалённый заряд излучает электромагнитную волну, которая в определённом диапазоне частот воспринимается даже глазом (видимый свет). Не вникая в детали, которые можно найти в учебниках физики (например, в увлекательной книге [1], откуда заимствован рассматриваемый пример), отметим, что принимаемый наблюдателем сигнал с точностью до множителя определяется величиной второй производной по t составляющих $(x/R, y/R)(\tau)$ введённого выше единичного вектора $\mathbf{e}(\tau)$.

Обратим внимание на то, что производную надо искать не по τ, а по местному времени t наблюдателя, которое, как было сказано, связано с τ соотношением $ct = c\tau + R_0 + z(\tau)$.

Прежде, чем приступать к такому дифференцированию, сделаем несколько упрощающих дело наблюдений, связанных с конкретными особенностями параметров задачи.

При дифференцировании $(x/R)(\tau)$ по t, имеем $\frac{d(x/R)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dx}{dt} - \frac{x}{R^2}\frac{dR}{dt}$.

Но $R(\tau) \approx (\ R_0 + z(\tau)\ ) \approx R_0 \gg 1$, поэтому с допустимой точностью можно считать, что $\frac{d(x/R)}{dt} \approx \frac{1}{R}\frac{dx}{dt} \approx \frac{1}{R_0}\frac{dx}{dt}$.

То же относится и к производной $\frac{d(y/R)}{dt}$.

Далее

$\frac{1}{R_0}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{R_0}\frac{dx}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{R_0}\frac{dx}{d\tau}(\frac{dt}{d\tau})^{-1} = \frac{1}{R_0}\frac{dx}{d\tau}(1 + \frac{1}{c}\frac{dz}{d\tau})^{-1}$

и

$\frac{1}{R_0}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{R_0}\frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{R_0}\frac{dy}{d\tau}(\frac{dt}{d\tau})^{-1} = \frac{1}{R_0}\frac{dy}{d\tau}(1 + \frac{1}{c}\frac{dz}{d\tau})^{-1}$.

Вот здесь сказывается влияние z-компоненты движения источника (заряда). В частности, тогда, когда $1 + \frac{1}{c}\frac{dz}{d\tau} \approx 0$, и первая, и вторая производные оказываются очень большими. Именно в этот момент излучение особенно сильно. Но такая ситуация может быть очень короткой, поэтому такое излучение напоминает вспышку (взрыв). Поскольку $|\frac{dz}{d\tau}|$ характеризует скорость изменения координаты $z(\tau)$, то соотношение $1 + \frac{1}{c}\frac{dz}{d\tau} \approx 0$ означает, что такая ситуация может возникнуть (и возникает) в релятивистской области скоростей, скоростей, близких к скорости света.

Мы здесь действовали формально-математически, не решая уравнение $ct = c\tau + R_0 + z(\tau)$ относительно $\tau = \tau(t)$, написали производную неявной функции $\tau(t)$. Но физики придумали простой и красивый способ увидеть графики функций $x(\tau(t)), y(\tau(t))$ в зависимости от t, зная их как функций от τ. (См. [1], с. 137.)

Опишем эту конструкцию. Это описание позволит читателю воспроизвести её графически. Займёмся функцией $x(\tau)$ и построим график её зависимости $x(\tau(t))$ от t.

В плоскости ортогональных координат (z, x) (ось z горизонтальна, ось x вертикальна) изобразим закон движения точки $(z, x)(\tau)$, отмечая с некоторой частотой соответствующие положению точки моменты времени τ.

Рядом построим вторую систему ортогональных координат с осями (ct, x), причём так, чтобы ось ct была на продолжении горизонтальной оси z, а ось x была бы такой, как и в первой системе координат, лишь сдвинутой в начало второй системы. У нас есть связь $ct = c\tau + R_0 + z(\tau)$.

Опустим константу R_0, что равносильно изменению начала отсчёта времени и что не влияет ни на вычисление производных, ни на вид графиков. Теперь каждой точке $(z, x)(\tau)$ кривой первой системы, ставим в соответствие точку второй системы с координатами $(ct, x) = (c\tau + z(\tau), x)$. Вот, собственно, и всё.

Полезно воспроизвести это описание в картинках, например, чтобы увидеть когда, где и как может возникнуть и возникает описанная выше особенность.

Разумеется, всё то же самое делается с функцией $y(\tau)$, точнее, с кривой $(z, y)(\tau)$.

В результате получаем пространственную кривую (закон движения) (x, y, ct) как функцию параметра ct, где $ct = c\tau + z(\tau)$. Если эту кривую вести в обратном направлении со скоростью c, то её след на плоскости (x, y) как раз даст исходный закон движения $x(\tau), y(\tau)$, развитием которого по времени t и была получена построенная кривая.

Совсем просто и очень поучительно провести описанные построения в конкретном случае, например, когда кривая $(z, x)(\tau)$ — единичная окружность с центром $(0, 1)$. Полезно посмотреть, что и как меняется в графике построенной над осью ct функции x с ростом скорости движения точки по исходной окружности. В частности, что происходит, когда эта скорость приближается к скорости света. Это имеет прямое отношение к описанию так называемого *синхротронного излучения* (см. [1], с. 138).

Литература

[**1**] Р. Фейнман. Фейнмановские лекции по физике. Книга 3 (излучение, волны, кванты). Москва, Изд-во Мир, 1965. (С. 134-153).

Дополнение.

Запаздывание и волны в картинках.

1. Антенна, находящаяся в точке A, передаёт сигнал $\sin \omega t$ (или $f(t)$). Сигнал принимается в точке B, которая находится на расстоянии r от A. Скорость распространения сигнала v. Запишите принимаемый в B сигнал как функцию времени t.

2. В начале o координатной оси ox находится антенна A. Дан график $f(t)$ сигнала, переданного антенной A в промежуток времени $1 \leq t \leq 3$ (две секунды). Сигнал распространяется в положительном направлении оси ox со скоростью v. Изобразите результат распространения сигнала вдоль оси ox в следующие моменты времени $t = 0, 1, 2, 3, 10$, считая, что вне указанного промежутка времени антенна была выключена.

3. График функции $\cos(\omega t - kx)$ (где ω и k константы) при фиксированном значении времени t неподвижен, как на мгновенной фотографии. Если же t меняется, то волна бежит вдоль оси ox. Как быстро?

Величина $\omega t - kx$ называется *фазой волны*. Скорость ω изменения фазы по времени t, измеряемая в радианах в секунду, называется *частотой (циклической, круговой частотой) волны*, а скорость k изменения фазы относительно пространственной переменной x, измеряемая в радианах на метр, называется *волновым числом*.

Очевидно, $k = 2\pi/\lambda$, где λ — *длина волны*.

Частота любого периодического процесса обычно измеряется количеством ν полных циклов в секунду (основная единица измерения 1 Герц — один полный цикл в секунду). Частота ν и циклическая частота ω связаны соотношением $\omega = 2\pi\nu$.

Скорость, с которой перемещается в пространстве фиксированная фаза волны, называется *фазовой скоростью волны*. Проверьте, что в нашем случае (когда ось ox как среда однородна) фазовая скорость распространения волны постоянна и равна $v = \frac{\omega}{k}$.

4. Можно и полезно обсудить близкие понятия. Амплитуда волны. Стоячие волны (струна). Сложение и интерференция волн. Сложение волн близких характеристик. Модуляция сигнала. Фазовая и групповая скорости волн. Проиллюстрировать картинками (графиками) следующую выкладку и определение групповой скорости

$$A\cos(\omega_1 t - k_1 x) + A\cos(\omega_2 t - k_2 x) =$$

$$2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right)\cdot\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t - \frac{k_2 + k_1}{2}x\right) =$$

$$2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right)\cdot\cos\left(\omega t - kx\right) =$$

$$2A_{mod}(t, x)\cdot\cos\left(\omega t - kx\right).$$

$$A_{mod}(t, x) := A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right).$$

Амплитудная модуляция. Максимум огибающей A_{mod} при $\Delta\omega\ t - \Delta k\ x = 0$. Скорость его перемещения $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Цуг волн (волновой пакет, охватываемый огибающей) перемещается со скоростью v_g, которая называется *групповой скоростью* волнового пакета. (Есть анимация в интернете.)

Не погружаясь в детали, поясним, что при распространении волн в неоднородной среде соотношение величин ω и k, вообще говоря, изменяются. Возникающая при этом функциональная связь $\omega = \omega(k)$, называется *дисперсионным соотношением.* В этом случае естественно появляется выражение $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ для групповой скорости волнового пакета.

Таким образом, фазовая скорость $\frac{\omega}{k}$ несущей волны $\cos(\omega t - kx)$ не всегда совпадает с групповой скоростью пакета волн, который выделяет модулирующий множитель. Групповая скорость $\frac{d\omega}{dk}$ здесь это скорость перемещения фазы множителя, определяющего амплитуду сигнала.

Распространяющаяся в евклидовом пространстве плоская монохроматическая волна (с точностью до амплитудного множителя и сдвига по фазе) записывается в виде $\cos(\omega t - \mathbf{kr})$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки пространства, $\mathbf{k}$ — волновой вектор, определяющий направление распространения волны, а $\mathbf{kr}$ — скалярное произведение этих векторов. Множеством в пространстве, где при фиксированном значении t фаза $(\omega t - \mathbf{kr})$ волны одна и та же, очевидно, является плоскость, ортогональная волновому вектору $\mathbf{k}$. С изменением значений t эта плоскость перемещается в направлении волнового вектора. Фронт волны оказывается плоским, что и объясняет сам термин *плоская волна.* По отношению к направлению, определяемому волновым вектором, плоская волна в пространстве сводится к рассмотренной выше волне, распространяющейся вдоль прямой. (Любое возмущение вида $f(t - \mathbf{nr})$ имеет плоский фронт распространения, ортогональный вектору $\mathbf{n}$, и называется *плоской волной.*)

Напомним в заключение, что в квантовой механике (иногда даже называемой *волновой механикой*) все частицы, а не только фотоны или электроны, проявляют волновые свойства, причём частота и волновой вектор соответствующих волн связаны с энергией W и импульсом $\mathbf{p}$ частицы соотношениями

$$W = h\nu = \hbar\omega, \qquad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}.$$

Они называются *соотношениями де-Бройля.* Здесь h — постоянная Планка, а $\hbar := h/2\pi$. Обозначение $\hbar$ введено Дираком. Так нормированная постоянная Планка сокращает многие формулы, позволяя не писать в них всюду ещё и 2π.