МГУ, мех.-мат. факультет

Лекции по математическому анализу

Лектор: проф. В.В.Власов

Последняя редакция: 1 апреля 2020 г.

Предфинальная версия

Ответственный за набор, верстку и редакцию:
Агафонкин Г.А., 202 гр.

2019-2020 гг.

Содержание

Глава 1. Числовые ряды.

§1.1. Понятие числового ряда

Под числовым рядом понимается формальная запись

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots \tag{1}$$

Числа a_k называются *членами числового ряда.*

Определение 1.1.1. *Частичными суммами* ряда (1) называют числа

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \tag{2}$$

где n – натуральное число.

Определение 1.1.2. Говорят, что ряд (1) *сходится*, если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty. \tag{3}$$

В таком случае число S называется *суммой ряда* (1).

Пример 1.1.3. Ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ сходится, так как

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1. \tag{4}$$

Пример 1.1.4. Ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} q^k$, где $|q| < 1$, сходится, так как

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-q}. \tag{5}$$

Теорема 1.1.5. (Критерий Коши). *Ряд* (1) *сходится тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для любых номеров $n > m > N$ выполнено*

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon. \tag{6}$$

► Так как

$$\sum_{k=m+1}^{n} a_k = S_n - S_m,$$

утверждение теоремы следует из критерия Коши сходимости числовой последовательности. ◄

Следствие 1.1.6. (Необходимое условие сходимости). *Если ряд* (1) *сходится, то необходимо*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0. \tag{7}$$

► Достаточно положить в критерии Коши $n = m + 1$. ◄

Пример 1.1.7. Гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится. Действительно,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\right| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

и для завершения доказательства достаточно положить в отрицании критерии Коши $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $n = 2m$.
Отметим также, что в приведенном примере $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$, поэтому условие (1.1.6) не является достаточным.

Предложение 1.1.8. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится к сумме* S*, то все его остатки* $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ *сходятся к суммам* R_n *и для любого* n *верно равенство* $S = S_n + R_n$*. Обратно: если хотя бы один остаток ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, то и весь ряд сходится.*

► Обозначим частичные суммы ряда r_n через ρ_{nk}, тогда по определению $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_{nk} = R_n$. Очевидно также, что $S_{n+m} = S_n + \rho_{nm}$. Отсюда имеем:

$$\lim_{k\to\infty}\rho_{nk} = \lim_{k\to\infty}(S_{n+k} - S_n) = S - S_n,$$

поэтому ряд r_n сходится к числу $R_n = S - S_n$.
Обратно: пусть для некоторого n ряд r_n сходится к числу R_n. Тогда по определению $\lim\limits_{k\to\infty}(S_{n+k}-S_n) = \lim\limits_{k\to\infty} S_{n+k} - S_n = R_n$, откуда $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n+k} = S_n + R_n$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ◄

§1.2. Знакопостоянные ряды

Определение 1.2.1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *знакопостоянным*, если все его члены неотрицательны (неположительны).

Для удобства далее под знакопостоянным рядом понимается ряд из неотрицательных членов.

Предложение 1.2.2. *Знакопостоянный ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.*

► Так как все члены $a_n \geqslant 0$, последовательность частичных сумм возрастает, ибо $S_n = S_{n-1} + a_n \geqslant S_{n-1}$. По теореме Вейерштрасса ограниченность монотонно возрастающей последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ равносильна существованию конечного предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, что по определению означает сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. ◄

Признаки сходимости знакопостоянных рядов.

Теорема 1.2.3. (Первый признак сравнения). *Пусть* $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ *для всех натуральных* k*. Тогда:*

(1) *если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

(2) *если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходится.*

►
(1) Применим критерий Коши к сходящемуся ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$: по $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N, что для любых $n > m > N$ выполнено $\sum\limits_{k=m+1}^{n} b_k$. Но $\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k \leqslant \sum\limits_{k=m+1}^{n} b_k < \varepsilon$, поэтому по критерию Коши сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.
(2) Аналогичными рассуждениями из отрицания критерия Коши для расходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. ◄

Следствие 1.2.4. *Если существуют положительные константы d_1, d_2 такие, что для всех натуральных k выполнено $d_1 a_k \leqslant b_k \leqslant d_2 a_k$, то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.*

► Так как $a_k \leqslant \frac{1}{d_1} b_k$, из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. А так как $b_k \leqslant d_2 a_k$, из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Таким образом, сходимость одного ряда равносильна сходимости другого. ◄

Следствие 1.2.5. *Если $a_k = b_k + \overline{o}\,(b_k)$ при $k \to \infty$, то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.*

► Выберем такое N, что для всех $k > N$ $|\overline{o}\,(b_k)| \leqslant \frac{1}{2} b_k$. Тогда $\frac{1}{2} b_k \leqslant a_k \leqslant \frac{3}{2} b_k$, и утверждение следует из (1.2.4). ◄

Теорема 1.2.6. (Второй признак сравнения). *Пусть $a_k, b_k > 0$ и для всех натуральных k выполнено $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{b_{k+1}}{b_k}$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.*

► Перемножая неравенства для $k = 1, 2, \ldots, n-1$, имеем:

$$\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_n}{b_1}$$

для любого натурального n. Отсюда $a_n \leqslant \frac{a_1}{b_1} b_n$, и утверждение следует из (1.2.3). ◄

Замечание. В силу (1.1.8) все утверждения о сходимости верны и для рядов, суммирование которых начинается не с 1, а с некоторого натурального N_0.

Теорема 1.2.7. (Признаки Д'Аламбера и Коши в предельной форме). *Пусть $a_k > 0$ и существует конечный предел:*
(1) *(Д'Аламбер)* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = p$.
(2) *(Коши)* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = p$.

Тогда при $p < 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а при $p > 1$ – расходится.

► Обозначим $\lambda = \dfrac{p+1}{2}$.

Согласно определению предела, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер k_0, что для всех $k > k_0$ выполнено $\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k} - p\right| < \varepsilon$ в (1) и $|\sqrt[k]{a_k} - p| < \varepsilon$ во (2).

Если $p < 1$, тогда $\lambda = p + \dfrac{1-p}{2} < 1$. Положим $\varepsilon = \dfrac{1-p}{2}$, тогда при $k > k_0$ для (1) имеем

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < p + \frac{1-p}{2} = \lambda = \frac{\lambda^{k+1}}{\lambda^k},$$

а для (2) – соответственно

$$\sqrt[k]{a_k} < p + \frac{1-p}{2} = \lambda = \sqrt[k]{\lambda^k} \iff a_k < \lambda^k.$$

Для $p > 1$ примем $\lambda = p - \dfrac{p-1}{2} > 1$, и, положив $\varepsilon = \dfrac{p-1}{2}$, при $k > k_0$ аналогично для (1) имеем

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > p - \frac{p-1}{2} = \lambda = \frac{\lambda^{k+1}}{\lambda^k},$$

а для (2) – соответственно

$$\sqrt[k]{a_k} > p - \frac{p-1}{2} = \lambda = \sqrt[k]{\lambda^k} \iff a_k > \lambda^k.$$

Но ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda^k$ сходится при $|\lambda| < 1$ и расходится при $|\lambda| > 1$, поэтому по (1.2.6) для (1) и по (1.2.3) для (2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится при $p < 1$ и расходится при $p > 1$. ◄

Замечание. При $p = 1$ признак ответа не дает, и ряд может как сходиться, так и расходиться. Примеры:

(1) Гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ расходится по (1.1.7), при этом $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{k+1} = 1$;

(2) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ сходится по (1.2.3), ибо для всякого k имеем $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k(k-1)}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k-1)}$ сходится по (1.1.3). Однако $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{k}\sqrt[k]{k}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k^2}{(k+1)^2} = 1$.

Теорема 1.2.8. (Интегральный признак Коши). *Пусть на луче $[1, +\infty)$ функция f непрерывна, положительна и монотонно убывает. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

► Поскольку $f(x)$ монотонно убывает на $[1, +\infty)$, имеем $f(k) \geqslant \int_k^{k+1} f(x)dx \geqslant f(k+1)$, откуда

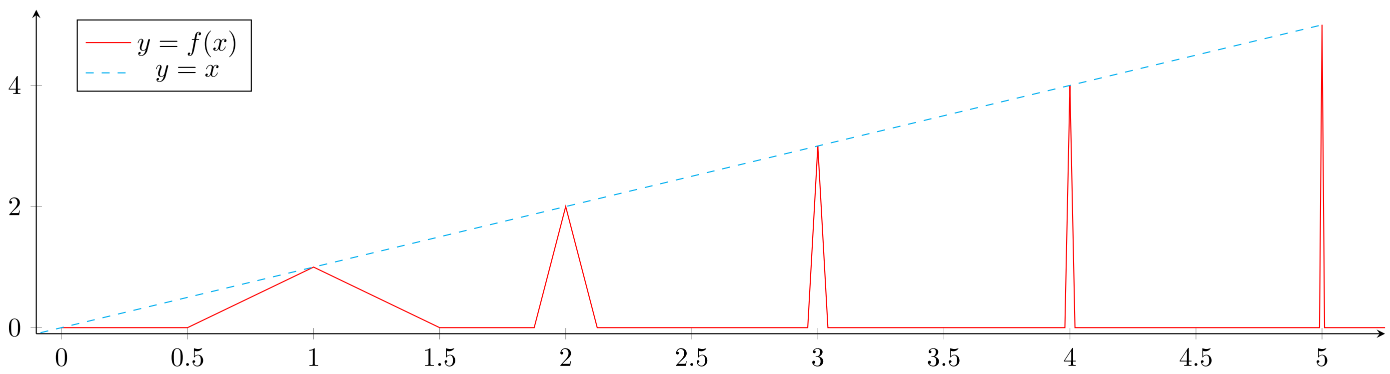
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int_1^{n+1} f(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k).$$

Следовательно, ограниченность последовательности частичных сумм S_k равносильна ограниченности последовательности интегралов $\int_1^{n+1} f(x)dx$. А так как $f(x) > 0$, утверждение теоремы следует из (1.2.2) и аналогичного ему утверждения для несобственных интегралов. ◄

Пример 1.2.9. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^s}$ сходится одновременно с интегралом $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^s}dx$. Поэтому при $s > 1$ ряд сходится, а при $s \leqslant 1$ ряд расходится.

Замечание. Условие монотонности существенно! Рассмотрим пример:

$$f(x) = \begin{cases} -|2n^3(x-n)| + n, \ |x-n| \leqslant 0.5n^{-3}, \ n \in \mathbb{N} \\ 0 \text{ else.} \end{cases}$$



Функция f задана кусочно-линейно, ее график состоит из треугольников с вершинами в целых точках. Площадь $n-$того треугольника: $S_n = \frac{1}{2}\left(n \cdot \frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{2n^2}$. Следовательно,

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} S_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}.$$

Этот ряд сходится, однако ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k$ расходится.

Теорема 1.2.10. (Признак Раабе в допредельной форме). *Пусть* $a_k > 0$.

(1) *Если существует такое* $p > 1$, *что для достаточно больших* k *справедливо* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant 1 - \frac{p}{k}$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*

(2) *Если для достаточно больших* k *выполнено* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1 - \frac{1}{k}$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

▶

(1) Пусть $b_k = \frac{1}{k^r}$, где $1 < r < p$. Тогда по (1.2.9) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. С другой стороны, при $k \to \infty$ имеем:

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-r} = 1 - \frac{r}{k} + \bar{o}\left(\frac{1}{k}\right),$$

поэтому, так как $r < p$, для достаточно больших k

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} > 1 - \frac{p}{k} \Longrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{b_{k+1}}{b_k},$$

и по (1.2.6) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

(2) Пусть $b_k = \frac{1}{k-1}$, $k > 1$. Имеем:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant \frac{k-1}{k} = \left(\frac{1}{k}\right) \div \left(\frac{1}{k-1}\right) = \frac{b_{k+1}}{b_k},$$

и по (1.2.6) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. ◀

Теорема 1.2.11. (Признак Раабе в предельной форме) *Пусть $a_k > 0$ и существует конечный предел*

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = p.$$

Тогда при $p > 1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а при $p < 1$ – расходится.

► Если $p > 1$, выберем r такое, что $1 < r < p$. Тогда при достаточно больших k имеем

$$k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) > r \Longrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1 - \frac{r}{k},$$

и по (1.2.10) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.
Если $p < 1$, то для достаточно больших k имеем

$$k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) < 1 \Longrightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1 - \frac{1}{k},$$

и по (1.2.10) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. ◄

Замечание. При $p = 1$ признак ответа не дает. Примеры:
(1) Гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, но $\lim\limits_{k\to\infty} k\left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$;
(2) Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ln^2 k}$ сходится вместе с $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{y^2}dy$. Однако при $k \to \infty$ из разложения Тейлора для $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ имеем:

$$\ln k = \ln(k+1) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \Longrightarrow \ln^2 k = \ln^2(k+1) + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(k+1)}{k}\right),$$

откуда

$$k\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = k\left(1 - \frac{k\ln^2 k}{(k+1)\ln^2(k+1)}\right) = k\left(1 - \frac{k}{k+1}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln(k+1)}\right) \xrightarrow[k\to\infty]{} 1.$$

Теорема 1.2.12. (Признак Гаусса). *Пусть $a_k > 0$ и при $k \to \infty$ справедливо $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \alpha - \frac{\beta}{k} + \gamma_k$, где $\gamma_k = \overline{o}\left(\frac{1}{k\ln k}\right)$. Тогда:*
(1) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если $\alpha < 1$ или $\alpha = 1,\ \beta > 1$;
(2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, если $\alpha > 1$ или $\alpha = 1,\ \beta \leqslant 1$.

► Если $\alpha \neq 1$, перед нами признак Д'Аламбера; если $\alpha = 1, \beta \neq 1$ – признак Раабе.
Единственный неразобранный случай – когда $\alpha = \beta = 1$.
Пусть $\frac{a_{k+1}}{a_k} = 1 - \frac{1}{k} + \gamma_k$. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)\ln k}$.
$\frac{1}{(k-1)\ln k} > \frac{1}{k\ln k}$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ расходится по (1.2.8), поэтому по (1.2.3) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(k-1)\ln k}{k\ln(k+1)} = \frac{k-1}{k} - \frac{k-1}{k}\cdot\frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln(k+1)} = 1 - \frac{1}{k} - \frac{k-1}{k\ln(k+1)}\cdot\left(\frac{1}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) =$$
$$= 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k\ln(k+1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2\ln(k+1)}\right) = 1 - \frac{1}{k} - \frac{1}{k\ln(k+1)} + \overline{o}\left(\frac{1}{k\ln k}\right),$$

откуда при достаточно больших k

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} - \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{1}{k\ln(k+1)} + \bar{o}\left(\frac{1}{k\ln k}\right) = \frac{1}{k\ln k}\left(\frac{\ln k}{\ln(k+1)} + \bar{o}(1)\right) > 0,$$

и по (1.2.6) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. ◄

Теорема 1.2.13. (Признак Куммера). *Пусть $a_k > 0$, $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, причем для достаточно больших k существует константа $C > 0$ такая, что*

$$a_k \leqslant C\left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right).$$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

► Оценим частичные суммы ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqslant C \cdot \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k} - \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right) = C\left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) < C \cdot \frac{a_1}{b_1},$$

откуда по (1.2.2) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ◄

§1.3. Знакопеременные ряды

Определение 1.3.1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится *абсолютно*, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

Предложение 1.3.2. *Из абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует его сходимость.*

► Воспользуемся критерием Коши для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$: по $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N, что для любых номеров $n > m > N$ выполнено $\sum\limits_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$. Тогда при тех же условиях для любых номеров $n > m > N$ выполнено $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon$, откуда следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. ◄

Определение 1.3.3. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится *условно*, если он сходится, но не абсолютно сходится.

Признаки сходимости знакопеременных рядов.

Теорема 1.3.4. (Признак Лейбница). *Пусть последовательность чисел $a_k > 0$ монотонно убывает к 0 при $k \to \infty$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ сходится и $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right| < a_{n+1}$.*

► Если $n = 2k$, то

$$S_n = S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \geqslant S_{2k-2} = S_{n-2},$$

ибо все скобки неотрицательны. С другой стороны,

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} \leqslant a_1,$$

поэтому по теореме Вейерштрасса существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = S$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} + \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = S + 0 = S.$$

По определению предела последовательности по $\varepsilon > 0$ выберем такие индексы N_1 и N_2, что для всех $n > N_1$ выполнено $|S_{2n} - S| < \varepsilon$, а для $n > N_2$ аналогично $|S_{2n+1} - S| < \varepsilon$. Обозначив за N большее из чисел N_1, N_2, получим, что для всех $n > N$ верны обе оценки, что влечет сходимость частичных сумм $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, а следовательно, и ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$, к S.

Получим оценку частичных сумм:

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} - (a_{2k} - a_{2k-1}) \leqslant S_{2k-1} \Longrightarrow S_{2k} \leqslant S_{2k+2} < S < S_{2k+1} \leqslant S_{2k-1} \Longrightarrow \begin{cases} 0 < S - S_{2k} < a_{2k+1} \\ 0 < S_{2k+1} - S < a_{2k+2} \end{cases}$$

В любом случае $|S - S_n| < a_{n+1}$.

◄

Замечание. Отметим, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}$ – гармонический ряд, который расходится. Поэтому условие (1.3.2) не является достаточным.

Лемма 1.3.5. (Лемма Абеля). *Пусть $p \geqslant 1$, последовательность $\{a_k\}_{k=p}^{\infty}$ монотонна, а последовательность $\{b_k\}_{k=p}^{\infty}$ такова, что $\left|\sum\limits_{k=p}^{i} b_k\right| \leqslant B$, где $p \leqslant i \leqslant n$. Тогда $\left|\sum\limits_{k=p}^{n} a_k b_k\right| \leqslant B\left(|a_p| + 2|a_n|\right)$.*

► Обозначим $B_i = \sum\limits_{k=p}^{i} b_k$. Тогда $b_k = B_k - B_{k-1}$, откуда

$$\sum_{k=p}^{n} a_k b_k = a_p B_p + a_{p+1}(B_{p+1} - B_p) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1}) =$$

$$= (a_p - a_{p+1})B_p + (a_{p+2} - a_{p+1})B_{p+1} + \ldots + (a_{n-1} - a_n)B_n + a_n B_n = \sum_{k=p}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_n B_n,$$

из чего заключаем, что

$$\left|\sum_{k=p}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=p}^{n-1}|a_k - a_{k+1}|\,|B_k| + |a_n|\,|B_n| \leqslant B\left(\sum_{k=p}^{n-1}|a_k - a_{k+1}| + |a_n|\right).$$

Если последовательность $\{a_k\}_{k=p}^{\infty}$ убывает, то $\sum\limits_{k=p}^{n-1}|a_k - a_{k+1}| = a_p - a_n$; если возрастает, то $\sum\limits_{k=p}^{n-1}|a_k - a_{k+1}| = a_n - a_p$.

В любом случае

$$\sum_{k=p}^{n-1}|a_k - a_{k+1}| = |a_n - a_p| \Longrightarrow \sum_{k=p}^{n} a_k b_k \leqslant B\left(|a_n - a_p| + |a_n|\right) \leqslant B\left(|a_p| + 2|a_n|\right).$$

◄

Теорема 1.3.6. (Признаки Дирихле и Абеля). *Пусть:*

(1) *(Дирихле) частичные суммы ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *ограничены константой* A*, а числа* b_k *монотонно стремятся к 0;*

(2) *(Абель) ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а последовательность* $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ *монотонна и ограничена константой* B*.*

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

►
(1) По условию для любых $i > m$ выполнено

$$\left|\sum_{k=m}^{i} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{i} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{i} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{m-1} a_k\right| \leqslant 2A,$$

поэтому по лемме Абеля $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leqslant 2A\left(|b_m| + 2\,|b_n|\right)$ для любых $n > m$.

По определению предела по $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{6A}$ найдем такой номер N, что для всех $n > N$ выполнено $|b_n| < \dfrac{\varepsilon_0}{6A}$, тогда при тех же условиях для любых $n > m > N$ выполнено

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leqslant 2A\left(\frac{\varepsilon_0}{6A} + \frac{\varepsilon_0}{3A}\right) = \varepsilon_0,$$

откуда по критерию Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

(2) По критерию Коши по $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{3B}$ найдем такой номер N, что для всех $n > m > N$ выполнено $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| < \dfrac{\varepsilon_0}{3B}$, тогда при тех же условиях для всех $n > m > N$ по лемме Абеля $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon_0}{3B}\left(|b_m| + 2\,|b_n|\right) \leqslant \dfrac{\varepsilon_0}{3B}(B + 2B) = \varepsilon_0$, откуда по критерию Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится. ◄

Пример 1.3.7. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k}$ сходится по признаку Дирихле. Действительно, $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ монотонно, а

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \frac{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx \sin\frac{x}{2}\right| = \frac{1}{\left|2\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right)\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Пример 1.3.8. Ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{\sin kx \cos\frac{\pi}{k}}{\ln\ln k}$ сходится по признаку Абеля. Действительно, $\cos\dfrac{\pi}{n}$ монотонна и ограничена по модулю единицей, а ряд $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{\ln\ln k}$ сходится по признаку Дирихле (аналогично предыдущему примеру).

Пример 1.3.9. Исследуем на сходимость при $\alpha > 0$ ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha - (-1)^n}$.

$$\frac{1}{1 - (-1)^n n^{-\alpha}} = 1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \Longrightarrow \frac{(-1)^n}{n^\alpha - (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha\left(1 - (-1)^n n^{-\alpha}\right)} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \left(\frac{1}{n^{2\alpha}} + \bar{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right).$$

Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ сходится по признаку Лейбница (1.3.4), а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}} + \bar{o}\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)$ по (1.2.5) сходится при $\alpha < \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, исходный ряд сходится при $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

§1.4. Перестановки рядов

Определение 1.4.1. Пусть $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - биекция. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{\varphi(k)}$ называется *перестановкой* ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Теорема 1.4.2. (Коши). *Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно. Тогда любая его перестановка $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^*$ также сходится абсолютно, и суммы исходного и переставленного ряда совпадают.*

► Абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^*$ следует из (1.2.2), ибо $\sum\limits_{k=1}^{n} |u_k^*| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty$ по условию.

Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, $S_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k^*$. Поскольку остатки сходящегося ряда $\sum\limits_{k=n}^{\infty} |u_k|$ стремятся к 0, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, тогда при тех же условиях $|S - S_N| = \left|\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} u_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Выберем M такое, что $\{u_1, ..., u_N\} \subseteq \{u_1^*, ..., u_M^*\}$, тогда для всех $m > M$ выполнено $|S_m^* - S_N| \leqslant \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} |u_k| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, откуда

$$|S - S_m^*| = |(S - S_N) + (S_N - S_m^*)| \leqslant |S - S_N| + |S_N - S_m^*| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^*$ сходится к S. ◄

Теорема 1.4.3. (Римана). *Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится условно, то для любого B, конечного или бесконечного, существует перестановка этого ряда, сходящаяся к B.*

► Обозначим $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательности соответственно положительных и модулей неположительных членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$; примем также формальные равенства $(P) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k$, $(Q) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q_k$.

Поскольку p_k и q_k – члены сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, очевидно, они имеют своим пределом 0. Однако ряды (P) и (Q) расходятся. В самом деле, для частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ справедливы соотношения $S_n = P_l - Q_m$ и $S_n^* = P_l + Q_m$, где l и m – количество положительных и отрицательных чисел среди первых n членов ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, а $S_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n} |u_k|$. Предположим, что один из рядов (P) и (Q) сходится. Тогда из первого соотношения следует сходимость другого ряда, а из второго – сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$, что противоречит условию. Сделовательно, оба ряда (P) и (Q), а следовательно, и все их остатки, расходятся.

Пользуясь указанным замечанием, построим вначале перестановку ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, сходящуюся к некоторому конечному B:

(1) сначала возьмем $p_1, \ldots, p_{n_1}$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k > B, \text{ но } \sum_{k=1}^{n_1 - 1} p_k \leqslant B;$$

(2) затем возьмем $q_1, ..., q_{m_1}$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k < B, \text{ но } \sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1 - 1} q_k \geqslant B;$$

(3) затем вновь возьмем $p_{n_1+1}, ..., p_{n_2}$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k > B, \text{ но} \sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} p_k \leqslant B$$

и так далее (на каждом шаге берем не менее 1 члена).
Очевидно, что частичная суммы полученной перестановки отличаются от B по модулю не более, чем на величину последнего добавленного в нее члена, поэтому, так как p_k и q_k имеют своим пределом 0, эта перестановка действительно сходится к B.
Теперь рассмотрим случай $B = +\infty$. Проведем перестановку схожим образом с предыдущим случаем:
(1) сначала возьмем $p_1, ..., p_{n_1}$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k > 1, \text{ но } \sum_{k=1}^{n_1-1} p_k \leqslant 1;$$

(2) затем возьмем $p_{n_1+1}, ..., p_{n_2}$ так, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k > 2, \text{ но} \sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} p_k \leqslant 2$$

и так далее (на каждом шаге берем не менее 1 члена).
При таком построении частичные суммы стремятся к $+\infty$, так как при добавлении q_k они не могут быть меньше k более, чем на $q_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, поэтому построенная перестановка действительно сходится к $+\infty$.
Случай $B = -\infty$ рассматривается аналогично. ◀

§1.5. Теоремы о произведениях числовых рядов

Теорема 1.5.1. (Коши). *Пусть ряды* $(U) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *и* $(V) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *сходятся к* U *и* V *соответственно. Если ряды* (U) *и* (V) *сходятся абсолютно, то ряд* $(W) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{i_k} v_{j_k}$*, составленный из попарных произведений членов рядов* (U) *и* (V)*, взятых в произвольном порядке, сходится абсолютно, и его сумма равна* $W = U \cdot V$*.*

► Обозначим $U^* = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k|$, $V^* = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |v_k|$, $\nu_n = \max\{i_1, j_1, i_2, j_2, ..., i_n, j_n\}$. Тогда очевидно

$$\sum_{k=1}^{n} |w_k| = \sum_{k=1}^{n} |u_{i_k} v_{j_k}| \leqslant (|u_1| + |u_2| + ... + |u_{\nu_n}|) \cdot (|v_1| + |v_2| + ... + |v_{\nu_n}|7) \leqslant U^* \cdot V^*,$$

откуда по (1.2.2) следует абсолютная сходимость ряда (W).
Чтобы найти сумму ряда (W), перегруппируем его члены (по (1.4.2) это не изменит суммы):

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1) + ... + \left(v_k \sum_{i=1}^{k-1} u_i + u_kv_k + u_k \sum_{j=1}^{k-1} v_j \right) + \ldots$$

При такой нумерации частичные суммы $W_n = U_nV_n \xrightarrow[n\to\infty]{} U \cdot V$. ◀

Теорема 1.5.2. (Мертенса). *Пусть ряды* $(U) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ *и* $(V) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ *сходятся к* U *и* V *соответственно. Если ряд* (U) *сходится абсолютно, то ряд* $(W) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{i=1}^{k-1} u_i v_{k-i} \right)$ *сходится к* $W = U \cdot V$*.*

► Обозначим $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|u_k| = U^*$.

По условию частичные суммы ряда (V) можно записать как $V_m = V - \nu_m$, где $\nu_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Тогда нетрудно видеть, что частичная сумма W_n представима как

$$W_n = u_1V_1 + u_2V_{n-1} + ... + u_nV_1 = U_nV - (u_1\nu_n + u_2\nu_{n-1} + ... + u_n\nu_1) = U_nV - \eta_n.$$

Для завершения доказательства осталось показать, что $\eta_n = u_1\nu_n + u_2\nu_{n-1} + ... + u_n\nu_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Воспользуемся тем, что $\nu_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$. Поскольку сходящаяся последовательность ограничена, выберем константу $M > 0$ такую, что для всех k выполнено $|\nu_k| \leqslant M$. Далее, из определения предела по $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N, что для всех $n > N$ выполнено $|\nu_n| < \varepsilon$.

Перепишем выражение для η_n с учетом этих замечаний:

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} u_{n-k}\nu_k \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} u_{n-k}\nu_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{N} u_{n-k}\nu_k\right| + \left|\sum_{k=N+1}^{n} u_{n-k}\nu_k\right| = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Оценим величины Σ_1 и Σ_2.

Поскольку ряд (U) сходится абсолютно, начиная с некоторого $N_1 \geqslant N$ для всякого $n > N_1$ выполнено $\sum\limits_{k=n-N}^{n}|u_k| \leqslant \varepsilon$.

Отсюда имеем оценку на Σ_1:

$$\Sigma_1 = \left|\sum_{k=1}^{N} u_{n-k}\nu_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N}|u_{n-k}||\nu_k| \leqslant M\sum_{k=1}^{N}|u_{n-k}| = M\sum_{k=n-N}^{n}|u_k| \leqslant M\varepsilon.$$

Оценка на Σ_2 также следует из абсолютной сходимости ряда (U):

$$\Sigma_2 = \left|\sum_{k=N+1}^{n} u_{n-k}\nu_k\right| \leqslant \sum_{k=N+1}^{n}|u_{n-k}||\nu_k| \leqslant \varepsilon\sum_{k=N+1}^{n}|u_{n-k}| \leqslant U^*\varepsilon.$$

Таким образом, $\eta_n \leqslant \varepsilon\,(M + U^*) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, откуда $W_n \xrightarrow[n\to\infty]{} U \cdot V$. ◄

§1.6. Бесконечные произведения

Наряду с числовыми рядами рассматривают бесконечные произведения – формальные записи вида

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \cdots$$

Определение 1.6.1. Произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится*, если существует конечный ненулевой предел частичных произведений $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$.

Предложение 1.6.2. (Необходимое условие сходимости). *Если произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *сходится к* P, *то необходимо* $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = 1$.

►

$$p_k = \frac{P_k}{P_{k-1}} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} p_k = \lim_{k\to\infty}\frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{P}{P} = 1.$$

◄

Предложение 1.6.3. *Пусть* $p_k > 0$. *Тогда произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln p_k$ *сходятся или расходятся одновременно, причем в случае сходимости* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} p_k = \exp\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln p_k\right)$.

► Для частичных произведений P_n имеем:

$$\ln P_n = \ln \prod_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} \ln p_k \Longrightarrow P_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \ln p_k\right).$$

В силу непрерывности и строгой монотонности экспоненты отсюда напрямую следуют оба утверждения предложения. ◄

Теорема 1.6.4. *Пусть все* a_k *одного знака. Тогда произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходятся или расходятся одновременно.*

► По (1.6.3) сходимость произведения $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ равносильна сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1+a_k)$, откуда необходимо $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Но числа a_k и $\ln(1+a_k)$ одного знака, поэтому из канонического предела $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\ln(1+a_k)}{a_k} = 1$ по (1.2.4) ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1+a_k)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходятся или расходятся одновременно. ◄

Теорема 1.6.5. *Пусть для всех* k $a_k > -1$ *и сходится один из рядов* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$. *Тогда сходимость другого ряда равносильна сходимости произведения* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$.

► Какой бы из рядов не сходился, в любом случае $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, откуда из разложения Тейлора

$$\ln(1+a_k) = a_k - \frac{1}{2}a_k^2 + \overline{o}\left(a_k^2\right) \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{a_k - \ln(1+a_k)}{a_k^2} = \frac{1}{2},$$

и так как $\ln(1+x) < x$ для $x > -1, x \neq 0$, в силу (1.2.4) ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k - \ln(1+a_k))$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходятся или расходятся одновременно.

Если оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходятся, то из проведенных рассуждений сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1+a_k)$, а значит, и $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$.
Обратно, пусть сходится $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$, тогда сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1+a_k)$, поэтому из сходимости одного из рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ следует сходимость другого. ◄

Замечание. Произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ может сходиться, даже если оба ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ расходятся.
Пример: пусть $a_{2k-1} = -\dfrac{1}{\sqrt{k}}$,, а $a_{2k} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} + \dfrac{1}{k}$. Тогда ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k^2} + \dfrac{2}{k}\right)$, очевидно, расходятся, однако произведение

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_{2k-1})(1+a_{2k}) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$$

сходится в силу (1.6.4) к некоторому числу P, откуда для частичных произведений $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ имеем:

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} P_{2k} = P; \\ \lim\limits_{k\to\infty} P_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(P_{2k}\cdot(1+a_{2k+1})\right) = P\cdot 1 = P. \end{cases},$$

и рассуждениями, аналогичными проведенным при доказательстве теоремы (1.3.4), заключаем, что $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = P$, то есть произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ сходится.

Глава 2. Функциональные последовательности и ряды

§2.1. Понятие равномерной сходимости

Определение 2.1.1. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ функций, определенных на множестве X, сходится к функции $\varphi(x)$:
(1) *поточечно* (обозначение: $f_n(x)\to\varphi(x)$), если при фиксированном $x\in X$ для всякого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что для всех $n>N$ выполнено $|f_n(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$;
(2) *равномерно* (обозначение: $f_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)$), если для всякого $\varepsilon>0$ существует номер N такой, что для всех $n>N$ неравенство $|f_n(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$ выполнено для всех $x\in X$.

Теорема 2.1.2. (sup-критерий равномерной сходимости). *Для того, чтобы последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходилась к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-\varphi(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

► Пусть $f_n(x)\rightrightarrows\varphi(x)$, тогда по определению по $\varepsilon>0$ найдем такое N, что для всех $n>N$ неравенство $|f_n(x)-\varphi(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнено для всех $x\in X$. Тогда, очевидно,

$$\sup_{x\in X}|f_n(x)-\varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

откуда по определению предела $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-\varphi(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Обратно: пусть $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-\varphi(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. По определению предела по $\varepsilon>0$ найдем такое N, что для всех $n>N$ выполнено $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$. Тогда при тех же условиях, очевидно,

$$|f_n(x)-\varphi(x)| \leqslant \sup_{x\in X}|f_n(x)-\varphi(x)| < \varepsilon$$

выполнено для любого $x\in X$, и мы вписываемся в определение равномерной сходимости. ◄

Замечание. Из равномерной сходимости последовательности функций, безусловно, следует поточечная, однако обратное неверно.
Контрпример: пусть $X=[0,1]$, а $f_n(x)=x^n$. Тогда

$$f_n(x)\to\varphi(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1\\ 1, & x=1\end{cases},$$

но сходимость не равномерная, ибо $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-\varphi(x)| = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq 0$.

Теорема 2.1.3. (Критерий Коши равномерной сходимости). *Последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к предельной конечной в каждой точке функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > m > N$ неравенство $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$.*

► Если $f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$, то по определению по $\varepsilon > 0$ найдем такое N, что для всех $n > m > N$ неравенства $|f_n(x) - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|f_m(x) - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнены для всех $x \in X$. Отсюда имеем:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_m(x) - \varphi(x)| + |f_n(x) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. По условию в каждой точке $x_0 \in X$ в силу критерия Коши для последовательностей существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = \varphi(x_0)$, поэтому $f_n(x) \to \varphi(x)$ на X. Далее, устремляя в неравенстве из условия один из номеров (например, m) к $+\infty$, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для всех $n > N$ неравенство $|f_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$, то есть мы вписались в определение равномерной сходимости. ◄

Теорема 2.1.4. (Признак Дини). *Пусть функции $f_n(x)$ определены и непрерывны на компакте $D \subseteq \mathbb{R}$, и в каждой точке $x \in D$ их значения образуют возрастающую последовательность. Если предельная функция $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ существует и непрерывна на D, то сходимость $f_n(x)$ к $\varphi(x)$ будет равномерной.*

► Обозначим $r_n(x) = \varphi(x) - f_n(x)$. По $\varepsilon > 0$ для каждого $x \in D$ выберем индекс $n(x)$ такой, что

$$0 < r_n(x) < \varepsilon.$$

В силу непрерывности это неравенство верно и в некоторой окрестности $U_{n(x)}$ точки x.
Из открытого покрытия компакта D множествами $U_{n(x)}$ по лемме Бореля-Лебега можно выделить конечное подпокрытие

$$\left\{U_{n(x_1)}, ..., U_{n(x_m)}\right\}.$$

Положим $M = \max\{n(x_1), ..., n(x_m)\}$, тогда в силу убывания в каждой точке $x \in D$ последовательности $\{r_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ для всех $x \in D$ и $n > M$ имеем

$$0 \leqslant r_n(x) = \varphi(x) - f_n(x) < \varepsilon,$$

то есть мы вписались в определение равномерной сходимости. ◄

§2.2. Равномерная сходимость функциональных рядов

Под функциональным рядом понимается формальная запись

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots,$$

где функции $u_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, определены на некотором множестве $X \subseteq \mathbb{R}$.

Определение 2.2.1. *Частичные суммы* ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ суть функции $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$, где $n \in \mathbb{N}$.

Определение 2.2.2. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится *равномерно* на множестве X к функции $S(x)$, если последовательность частичных сумм $S_n(x)$ сходится к $S(x)$ равномерно на этом множестве.

Теорема 2.2.3. (Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда). *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > m > N$ неравенство $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$.*

► Поскольку $\left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right| = S_n(x) - S_m(x)$, утверждение теоремы следует из (2.1.3). ◄

Лемма 2.2.4. *Пусть ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ *сходятся равномерно на множестве* X, *а* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *ограничены на этом множестве. Тогда ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(x)u_k(x) + \beta(x)v_k(x))$ *сходится равномерно на* X.

► Обозначим через A и B такие константы, что для всех $x \in X$ выполнено $|\alpha(x)| \leqslant A$ и $|\beta(x)| \leqslant B$.
Применим критерий Коши: по $\varepsilon > 0$ найдем такое N, что для всех $n > m > N$ неравенства $\left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2A}$ и $\left|\sum_{k=m+1}^{n} v_k(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2B}$ выполнены для всех $x \in X$. Тогда при тех же условиях для всех $n > m > N$ неравенство

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} (\alpha(x)u_k(x) + \beta(x)v_k(x))\right| \leqslant |\alpha(x)| \left|\sum_{k=m+1}^{n} u_k(x)\right| + |\beta(x)| \left|\sum_{k=m+1}^{n} v_k(x)\right| < A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} + B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in X$, и по критерию Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha(x)u_k(x) + \beta(x)v_k(x))$ сходится равномерно на X. ◄

Признаки сходимости функциональных рядов.

Теорема 2.2.5. (Мажорантный признак Вейерштрасса). *Если функции* $u_k(x)$ *удовлетворяют на множестве* X *неравенствам* $|u_k(x)| \leqslant \alpha_k$, *где* α_k *– члены сходящегося ряда, то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *сходится абсолютно и равномерно на* X.

► Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ применим критерий Коши: по $\varepsilon > 0$ найдем такое N, что для всех $n > m > N$ выполнено $\sum_{k=m}^{n} \alpha_k < \varepsilon$.
Тогда при тех же условиях для всех $n > m > N$ неравенство

$$\left|\sum_{k=m}^{n} u_k(x)\right| < \sum_{k=m}^{n} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=m}^{n} \alpha_k < \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in X$, поэтому по критерию Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно (и абсолютно) на X. ◄

Теорема 2.2.6. (Признаки Дирихле и Абеля). *Пусть:*
(1) *(Дирихле) частичные суммы ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *в совокупности – при любых* x *и* n *– ограничены константой* A, *а функции* $b_k(x)$ *сходятся к 0 равномерно на множестве* X *и при каждом* x *образуют монотонную последовательность;*
(2) *(Абель) ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ *сходится равномерно на множестве* X, *а функции* $b_k(x)$ *ограничены в совокупности константой* B *и при каждом* x *образуют монотонную последовательность.*
Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ *сходится равномерно на* X.

►Зафиксируем произвольный $x \in X$.
(1) По условию для любых $i > m$ выполнено

$$\left|\sum_{k=m}^{i} a_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{i} a_k(x) - \sum_{k=1}^{m-1} a_k(x)\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{i} a_k(x)\right| + \left|\sum_{k=1}^{m-1} a_k(x)\right| \leqslant 2A,$$

поэтому по лемме Абеля $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2A\left(|b_m(x)| + 2\,|b_n(x)|\right)$ для любых $m > n$.
В силу равномерной сходимости по $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{6A}$ найдем такой номер N, что для всех $n > N$ выполнено $|b_n(x)| < \dfrac{\varepsilon_0}{6A}$, тогда при тех же условиях для любых $n > m > N$ выполнено

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2A\left(\frac{\varepsilon_0}{6A} + \frac{\varepsilon_0}{3A}\right) = \varepsilon_0,$$

откуда по критерию Коши в силу произвольного выбора x ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится равномерно.

(2) По критерию Коши по $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{3B}$ найдем такой номер N, что для всех $n > m > N$ выполнено $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k(x)\right| < \dfrac{\varepsilon_0}{3B}$, тогда при тех же условиях для всех $n > m > N$ по лемме Абеля $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon_0}{3B}\left(|b_m(x)| + 2\,|b_n(x)|\right) \leqslant \dfrac{\varepsilon_0}{3B}(B + 2B) = \varepsilon_0$,
откуда по критерию Коши в силу произвольного выбора x ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ сходится. ◀

Теорема 2.2.7. (Признак Дини). *Пусть функции $u_k(x)$ определены и непрерывны на компакте $D \in \mathbb{R}$ и принимают на нем строго положительные значения. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится в каждой точке $x \in D$ к непрерывной на D функции, то сходимость ряда будет равномерной на D.*

► Следует напрямую из (2.1.4) применительно к последовательности частичных сумм $S_n(x)$. ◀

Пример 2.2.8. Исследуем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k}$ на множествах $X_1 = [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ и $X_2 = [0, \pi]$.

(1) На множестве X_1 ряд сходится равномерно по признаку Дирихле. Действительно, поскольку $\dfrac{1}{k}$ не зависит от x, монотонное стремление к 0 будет еще и равномерным, а в силу оценки из (1.3.7)

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leqslant \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

(2) На множестве X_2 равномерной сходимости нет. Действительно,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin\left(k \cdot \frac{1}{n}\right)}{k}\right| = \left|\frac{\sin \frac{n+1}{n}}{n+1} + \ldots + \frac{\sin \frac{2n}{n}}{2n}\right| \geqslant \frac{\sin 1}{n+1} + \ldots + \frac{\sin 1}{2n} \geqslant n \cdot \frac{\sin 1}{2n} = \frac{\sin 1}{2},$$

и для завершения доказательства достаточно положить в отрицании критерия Коши $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $m = 2n$ и $x = \dfrac{1}{n} \in X_2$.

§2.3. Предельный переход в равномерно сходящихся рядах

Теорема 2.3.1. *Пусть x_0 – предельная точка X и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на X к функции $S(x)$. Если для всякого k существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} u_k(x) = \alpha_k$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится и справедлив предельный переход:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lim_{x\to x_0} u_k(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) = \lim_{x\to x_0} S(x).$$

► Сначала установим сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$. В силу равномерной сходимости по $\varepsilon>0$ найдем такой номер N, что для всех $n>m>N$ неравенство $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n}u_k(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнено для всех $x\in X$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $x\to x_0$, получаем:

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\left(\lim_{x\to x_0}u_k(x)\right)\right|=\left|\sum_{k=m+1}^{n}\alpha_k\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

поэтому по критерию Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ сходится к некоторому числу A.
По определению сходимости по $\varepsilon>0$ найдем такой номер N, что для всех $n>N$ выполнены неравенства

$$\left|A-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right|<\frac{\varepsilon}{3}\text{ и }\left|S(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

причем второе – при всех $x\in X$.
Далее, по определению предела функции, по $\varepsilon=\dfrac{\varepsilon}{3n}>0$ найдем такое $\delta>0$, что для всех $x\in X$ таких, что $|x-x_0|<\delta$, выполнено

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(u_k(x)-\alpha_k)\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|u_k(x)-\alpha_k|<\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{3n}=\frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом, при тех же условиях для всех $x\in X$ таких, что $|x-x_0|<\delta$,

$$|S(x)-A|\leqslant\left|S(x)-\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right|+\left|A-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right|<\varepsilon,$$

и мы вписались в определение предела функции. ◄

Следствие 2.3.2. *Пусть функции $u_k(x)$ определены и непрерывны на множестве X. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится на X равномерно, то его сумма будет непрерывной на X функцией.*

► Достаточно положить в (2.3.1) $\alpha_k=u_k(x_0)$. ◄

Следствие 2.3.3. *Пусть x_0 – предельная точка X, а последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на X к функции $\varphi(x)$. Если для всякого k существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}f_k(x)$, то существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ и справедлив предельный переход:*

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{k\to\infty}f_k(x)\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0}f_k(x)\right).$$

В частности, если функции $f_k(x)$ непрерывны на X, то и $\varphi(x)$ также непрерывна на X.

► Положим $u_1(x)=f_1(x)$ и для $k\geqslant 2$ $u_k(x)=f_k(x)-f_{k-1}(x)$. Тогда $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$, и утверждение следует напрямую из (2.3.1) и (2.3.2). ◄

Пример 2.3.4. Следствие (2.3.2) позволяет строить примеры функций, непрерывных на всей числовой прямой, но не дифференцируемых ни в одной ее точке. Приведем один из таких примеров, приписываемый Вейерштрассу:

$$\omega(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\sin 8^k x$$

Рассмотрим для произвольного x разность

$$\omega(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left[\sin 8^k(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^k x\right].$$

При $k > n$ число $8^k \cdot 2^{-3n-1} = 2^{3(k-n)-1}$ будет целым и четным, поэтому для него

$$\sin 8^k(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^k x = 0.$$

Значит, достаточно рассматривать члены ряда вплоть до n.
При $k = n$:

$$2^{-n} \left[\sin 8^n(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^n x\right] = 2^{-n} \left[\sin\left(8^n x \pm \frac{\pi}{2}\right) - \sin 8^n x\right] = 2^{-n+1} \sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(8^n x \pm \frac{\pi}{4}\right),$$

и для каждого значения x можно выбрать знак $+$ или $-$ так, что $\left|\cos\left(8^n x \pm \frac{\pi}{4}\right)\right| \geqslant \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Это следует из того, что

$$\left|\cos\left(8^n x \pm \frac{\pi}{4}\right)\right| = \left|\cos\left(8^n x \mp \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(8^n x \mp \frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

а среди чисел $|\sin\alpha|$ и $|\cos\alpha|$ по крайней мере одно не меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
При $k < n$ воспользуемся классическим неравенством $|\sin\alpha - \sin\beta| \leqslant |\alpha - \beta|$:

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} \left[\sin 8^k(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^k x\right]\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left(2^{-k} \cdot 8^k \cdot 2^{-3n-1}\pi\right) = 2^{-3n-1}\pi \sum_{k=1}^{n-1} 4^k = 2^{-3n-1}\pi \cdot \frac{4-4^n}{1-4} < 2^{-n} \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Итого при соответствующем выборе знака:

$$|\varphi(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \varphi(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \left[\sin 8^k(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^k x\right]\right| \geqslant \left|2^{-n} \left[\sin 8^n(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^n x\right]\right| -$$
$$- \left|\sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} \left[\sin 8^k(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \sin 8^k x\right]\right| > 2^{-n+1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-n} \cdot \frac{\pi}{6} = 2^{-n}\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$$

Отсюда имеем:

$$\left|\frac{\omega(x \pm 2^{-3n-1}\pi) - \omega(x)}{\pm 2^{-3n-1}\pi}\right| > \left(1 - \frac{\pi}{6}\right)\frac{2^{2n+1}}{\pi} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

поэтому в силу произвольного выбора x функция $\omega(x)$ не имеет производной ни в одной точке x.

§2.4. Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании

Теорема 2.4.1. *Пусть функции $f_k(x)$ определены и дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, на котором последовательность их производных $\{f'_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно. Если последовательность функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$, то она сходится равномерно к дифференцируемой на этом отрезке функции $\varphi(x)$ и справедливо равенство:*

$$\varphi'(x) = \lim_{k\to\infty} f'_k(x).$$

► Для доказательства равномерной сходимости применим критерий Коши: по $\varepsilon > 0$ найдем такой номер N, что для всех $n > m > N$ выполнены неравенства

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \varepsilon \text{ и } |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon,$$

причем второе – при всех $x \in [a, b]$. Для удобства обозначим $F(x) = f_m(x) - f_n(x)$. По теореме Лагранжа конечных приращений на интервале (x, x_0) найдется точка ξ такая, что

$$F(x) - F(x_0) = F'(\xi)(x - x_0),$$

откуда заключаем, что для всех $x \in [a, b]$ выполнено

$$|F(x)| \leqslant |F(x) - F(x_0)| + |F(x_0)| = |F'(\xi)||x - x_0| + |F(x_0)| < \varepsilon(b - a + 1),$$

и по критерию Коши последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $\varphi(x)$.
Для фиксированной точки $c \in [a, b]$ рассмотрим последовательность функций $g_k(x) = \dfrac{f_k(x) - f_k(c)}{x - c}$. Тогда при прежних условиях на n и m оценим $G(x) = g_n(x) - g_m(x) = \dfrac{1}{x - c}\,(F(x) - F(c))$.
По теореме Лагранжа для функции $F(x)$ на интервале (c, x) существует точка η такая, что

$$G(x) = \frac{F'(\eta)(x - c)}{x - c} = F'(\eta) \Longrightarrow |G(x)| = |F'(\eta)| < \varepsilon.$$

Эта оценка справедлива для всех x из $X = [a, b] \setminus \{c\}$. Значит, по критерию Коши последовательность $\{g_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится на X. Кроме того, для всех k существуют пределы $\lim\limits_{x \to c} g_k(x) = f_k'(c)$ (в концах отрезка речь идет об односторонних производных). Таким образом, мы вписались в условия следствия (2.3.3), и возможен предельный переход:

$$\lim_{k \to \infty} f_k'(c) = \lim_{k \to \infty} \left(\lim_{x \to c} g_k(x)\right) = \lim_{x \to c} \left(\lim_{k \to \infty} g_k(x)\right) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \varphi'(x).$$

В силу произвольного выбора c заключаем, что установленное равенство верно на всем отрезке $[a, b]$. ◄

Следствие 2.4.2. *Пусть функции $u_k(x)$ определены и дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, на котором ряд из производных $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ сходится равномерно. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке $x_0 \in [a, b]$, то он сходится равномерно к дифференцируемой на этом отрезке функции и справедливо равенство:*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x).$$

► Достаточно применить (2.4.1) к последовательностям частичных сумм рядов. ◄

Теорема 2.4.3. *Пусть функции $f_k(x)$ определены и ннтегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$. Если на этом отрезке $f_k(x) \rightrightarrows \varphi(x)$, то $\varphi(x)$ также интегрируема по Риману на $[a, b]$ и справедливо равенство:*

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

► В силу равномерной сходимости по $\varepsilon > 0$ найдем такое N, что для всех $n > N$ неравенство

$$|\varphi(x) - f_n(x)| < \varepsilon \Longleftrightarrow f_n(x) - \varepsilon < \varphi(x) < f_n(x) + \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in [a, b]$. Сравним верхние и нижние суммы Дарбу функций $\varphi(x)$ и $f_n(x)$:

$$\begin{cases} \varphi(x) < f_n(x) + \varepsilon \Longrightarrow \overline{S_T}(\varphi) \leqslant \overline{S_T}(f_n) + \varepsilon(b - a) \\ f_n(x) - \varepsilon < \varphi(x) \Longrightarrow \underline{S_T}(\varphi) \geqslant \underline{S_T}(f_n) - \varepsilon(b - a) \end{cases}$$

Полученные неравенства верны для любого разбиения T.
Но по определению интегрируемости для $f_n(x)$ существует такое разбиение T^*, что $\overline{S_{T^*}}(f_n) - \underline{S_{T^*}}(f_n) < \varepsilon$. Тогда имеем:

$$\overline{S_{T^*}}(\varphi) - \underline{S_{T^*}}(\varphi) \leqslant \left[\overline{S_{T^*}}(f_n) + \varepsilon(b - a)\right] - \left[\underline{S_{T^*}}(f_n) - \varepsilon(b - a)\right] < \varepsilon(1 + 2(b - a)),$$

и по усиленному критерию Дарбу $\varphi(x)$ интегрируема на $[a, b]$, откуда немедленно следует

$$\int_a^b f_n(x)dx - \varepsilon(b - a) \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx \leqslant \int_a^b f_n(x)dx + \varepsilon(b - a) \Longrightarrow \left|\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \leqslant \varepsilon(b - a),$$

и по определению предела
$$\int_a^b \varphi(x)dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)dx.$$
◄

Следствие 2.4.4. *Пусть функции $u_k(x)$ определены и ннтегрируемы по Риману на отрезке $[a,b]$. Если на этом отрезке ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно, то его сумма $S(x)$ также интегрируема по Риману на $[a,b]$ и справедливо равенство:*
$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

► Достаточно применить (2.4.3) к последовательностям частичных сумм рядов. ◄

§2.5. Степенные ряды

Определение 2.5.1. *Степенным рядом* называют функциональный ряд вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, где $z\in\mathbb{C}$.

Теорема 2.5.2. (Первая теорема Абеля). *Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в точке $z_0\neq 0$, то для всех $q>0$, $q<|z_0|$ он сходится абсолютно и равномерно в круге $|z|\leqslant q$.*

► В силу сходимости ряда в точке z_0 существует константа $M>0$ такая, что для всех k выполнено
$$|c_k z_0^k|\leqslant M.$$
Тогда, учитывая, что $|z|\leqslant q<|z_0|$, имеем:
$$|c_k z^k| = |c_k z_0^k|\cdot\left|\frac{z}{z_0}\right|^k \leqslant M\left(\frac{q}{|z_0|}\right)^k.$$
Но ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\frac{q}{|z_0|}\right)^k$ сходится по признаку Коши, поэтому по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится абсолютно и равномерно при $|z|\leqslant q$. ◄

Замечание. Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ сходится в точке $z_0\neq 0$, то во всем круге $|z|<|z_0|$ равномерной сходимости может не быть.
Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}z^k$, сходящийся в точке $z=-1$ по признаку Лейбница. Если имеет место равномерная сходимость в круге $|z|<1$, то по критерию Коши по $\varepsilon>0$ можно найти такое N, что для всех $n>m>N$ неравенство $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k}z^k\right|<\varepsilon$ должно быть выполнено при всех z таких, что $|z|<1$. Переходя к пределу при $z\to 1$, получаем:
$$\left|\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k}\right|\leqslant\varepsilon,$$
что неверно в силу расходимости гармонического ряда. Следовательно, во всем круге $|z|<1$ равномерной сходимости нет.

Определение 2.5.3. *Радиус сходимости* степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ - это число $R = \sup|z|$ по всем z, для которых этот ряд сходится. При этом естественным полагается, что $0 \leqslant R \leqslant +\infty$.

Теорема 2.5.4. (Формула Коши-Адамара). *Радиус сходимости ряда* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *может быть найден по формуле*

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}.$$

► Обозначим $A = \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$

(1) Покажем, что $R \leqslant \dfrac{1}{A}$. Если $R = 0$, это очевидно. Пусть $R > 0$, тогда зададимся числом $r:\ 0 < r < R$. По определению радиуса сходимости ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k r^k$ сходится, поэтому выберем константу $M > 0$, ограничивающую в совокупности общий член этого ряда. Тогда очевидно $r\sqrt[k]{|c_k|} = \sqrt[k]{|c_k r^k|} < \sqrt[k]{M}$.
Переходя к пределу при $k \to \infty$, имеем

$$A = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \leqslant \frac{1}{r} \cdot \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{M} = \frac{1}{r} \Longrightarrow r \leqslant \frac{1}{A}$$

для всех $r < R$. Значит, и $R \leqslant \dfrac{1}{A}$.

(2) Покажем, что $R \geqslant \dfrac{1}{A}$. Если $R = +\infty$ это очевидно. Пусть $R < +\infty$, тогда для всех $r > R$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k r^k$ расходится. И тем более расходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$, откуда по признаку Коши

$$\varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k| r^k} = A \cdot r \geqslant 1 \Longrightarrow r \geqslant \frac{1}{A}$$

Значит, и $R \geqslant \dfrac{1}{A}$. ◄

Лемма 2.5.5. (О трех радиусах сходимости). *Радиусы сходимости рядов*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} z^{k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$$

совпадают.

► Обозначим радиусы сходимости этих рядов за R_1, R_2 и R_3 соответственно.
По формуле Коши-Адамара:

$$R_1 = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}};$$

$$R_2 = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\dfrac{|c_k|}{k+1}}} = \frac{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k+1}}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = R_1;$$

$$R_3 = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k|c_k|}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = R_1.$$

◄

Замечание. При одинаковом радиусе сходимости поведение рядов на границе может быть разным. Рассмотрим пример:

$$(A) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad (B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} z^k, \quad (C) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} z^k$$

По (2.5.5) радиусы сходимости всех трех рядов равны 1, однако на границе $|z| = 1$ ряд (A) расходится во всех точках окружности, ряд (B) сходится при $z = -1$ и расходится при $z = 1$, а ряд (C) сходится на всей окружности $|z| = 1$.

Теорема 2.5.6. *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, *где* $x \in \mathbb{R}$, *имеет радиус сходимости* $R > 0$. *Тогда:*
(1) *сумма ряда* $S(x)$ *бесконечно дифференцируема на интервале сходимости* $(-R, R)$;
(2) *для всякого* t *из интервала сходимости* $S(x)$ *интегрируема по Риману на* $[0, t]$.

►Воспользуемся первой теоремой Абеля.

(1) Для всякого $r < R$ по (2.5.2) ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ сходится абсолютно и равномерно при $|x| \leqslant r$. То же касается и рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)...(k-m+1) c_k z^{k-m},$$

радиус сходимости которых равен R по (2.5.5) (доказывается по индукции). Осталось применить теоремы (2.3.2) и (2.4.2).
(2) По $t \in (-R, R)$ возьмем r такое, что $|t| < r < R$. По (2.4.4) $S(x)$ интегрируема по Риману на $[-r, r]$, а следовательно, и на $[0, t] \subseteq [-r, r]$. ◄

Теорема 2.5.7. (Вторая теорема Абеля). *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *сходится в точке* $w \neq 0$. *Тогда при* $z = \alpha w$, *где* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ *сходится равномерно.*

► Требуется исследовать на равномерную сходимость по α ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (\alpha w)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(c_k w^k \cdot \alpha^k \right)$ на $[0, 1]$.

Числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k w^k$ сходится (и, следовательно, равномерно сходится), а последовательность $\left\{\alpha^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ монотонна при каждом значении α и ограничена в совокупности константой 2 на $[0, 1]$.

Следовательно, по признаку Абеля ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k (\alpha w)^k$ сходится равномерно на $[0, 1]$. ◄

§2.6. Ряды Тейлора-Маклорена

Определение 2.6.1. Функция $f(x)$ называется *аналитической* в точке x_0, если в некоторой окрестности x_0 имеет место разложение функции в степенной ряд:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k.$$

Предложение 2.6.2. *Для аналитической в точке* x_0 *функции* $f(x)$ *разложение в степенной ряд единственно.*

► По (2.4.2)

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)...(k-n+1) c_k (x - x_0)^{k-n}.$$

При $x = x_0$ отсюда получаем $c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, поэтому коэффициенты c_n определены однозначно функцией $f(x)$. ◄

Определение 2.6.3. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

Лемма 2.6.4. (Критерий сходимости ряда Тейлора к функции). *Пусть в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема. Тогда в этой окрестности ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ сходится к функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда*

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

► В самом деле, сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ к $f(x)$ равносильна условию

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \Longleftrightarrow f(x) - S_n(x) = r_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

◄

Теорема 2.6.5. (Достаточное условие аналитичности). *Пусть в окрестности U точки x_0 функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема, а $C > 0$ – такая константа, что для всех k в U выполнено $|f^{(k)}(x)| \leqslant C$. Тогда в окрестности U функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора.*

► По условию в U имеет место разложение Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x),$$

где $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ - остаточный член в форме Лагранжа. Кроме того, в U имеет место оценка

$$|r_n(x)| \leqslant C\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Но при фиксированном x ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится по признаку Д'Аламбера, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} C\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0,$$

и по (2.6.4) $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора в U. ◄

Ряды Тейлора некоторых элементарных функций в окрестности нуля.

Пример 2.6.6. Экспоненциальная функция (условие (2.6.4) считаем известным):

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

По признаку Д'Аламбера при любом значении x этот ряд сходится, поэтому его радиус сходимости равен $+\infty$.

Пример 2.6.7. Синус и косинус (условие (2.6.4) считаем известным):

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

По признаку Д'Аламбера при любом значении x этот ряд сходится, поэтому его радиус сходимости равен $+\infty$.

Пример 2.6.8. Логарифмическая функция:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Докажем это равенство при $|x| < 1$. В самом деле, при $|t| < 1$ справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t}.$$

По (2.5.2) этот ряд сходится равномерно на каждом отрезке $|t| \leqslant x < 1$, поэтому по (2.4.4) на любом отрезке внутри $(-1, 1)$ возможно почленное интегрирование:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x (-1)^k t^k dt\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1}\bigg|_0^x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Отметим также, что при $x = 1$ имеем ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, который сходится по признаку Лейбница, а при $x = -1$ – расходящийся гармонический ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k}$. Поэтому радиус сходимости ряда Тейлора функции $\ln(1+x)$ равен 1, а само разложение в ряд справедливо на промежутке $(-1, 1]$.

Пример 2.6.9. Степенная функция $(1+x)^m$:

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k.$$

Найдем вначале радиус сходимости этого ряда. Обозначим для удобства $b_k(x) = \dfrac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} x^k$, тогда

$$\frac{|b_{k+1}(x)|}{|b_k(x)|} = \left|\frac{m(m-1)\cdots(m-k)x^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{m(m-1)\cdots(m-k+1)x^k}\right| = \left|\frac{m-k}{k+1} x\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x|.$$

Следовательно, по признаку Д'Аламбера ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geqslant 1$, поэтому его радиус сходимости равен 1.

Теперь проверим, что при $|x| < 1$ выполнено условие (2.6.4). Для этого запишем остаточный член разложения Тейлора в интегральной форме:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x m(m-1)\cdots(m-n)(1+t)^{m-n-1}(x-t)^n dt = \frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!} \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n (1+t)^{m-1} dt.$$

Представим $\left(\dfrac{x-t}{1+t}\right)^n = x^n \left(\dfrac{1-\frac{t}{x}}{1+t}\right)^n$. Поскольку числа t и x одного знака и $|t| \leqslant |x| < 1$, имеем оценку:

$$0 \leqslant \frac{1-\frac{t}{x}}{1+t} \leqslant \frac{1-\frac{t}{x}}{1-|t|} \leqslant 1,$$

откуда заключаем, что

$$|R_n(x)| \leqslant \left|\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{n!} x^n\right| \left|\int_0^x (1+t)^{m-1} dt\right|.$$

Но по доказанному выше ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{m(m-1)\cdots(m-k)}{k!} x^k\right|$ сходится при $|x| < 1$, следовательно, общий член этого ряда, а вместе с ним и $R_n(x)$, стремится к 0 при $n \to \infty$. Таким образом, условия (2.6.4) выполнено, а вместе с ним и равенство функции $(1+x)^m$ своему ряду Тейлора при $|x| < 1$.

Проверка сходимости в концевых точках пока остается открытой.

Глава 3. Равномерная сходимость по параметру

§3.1. Семейства функций, зависящих от параметра

Определение 3.1.1. Пусть X – произвольное множество, Y – подмножество $\mathbb{R}^n$.
Семейством функций $f(x,y) : X \times Y \to \mathbb{R}$, зависящих от параметра y , называют множество $\{f(x,y)\}_{y\in Y}$. При каждом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x,y)$ является функцией переменной x.

Определение 3.1.2. Пусть y_0 – точка прикосновения Y. Говорят, что семейство $f(x,y)$ функций сходится на множестве X при $y \to y_0$ к функции $\varphi(x)$:
(1) *поточечно* (обозначение: $f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \varphi(x)$), если при фиксированном $x \in X$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$, выполнено $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$;
(2) *равномерно* (обозначение: $f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \varphi(x)$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$.

Теорема 3.1.3. (Критерий Коши равномерной сходимости). *Семейство функций $f(x,y)$ сходится к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X при $y \to y_0$ тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая $\delta > 0$, что для всех y', y'' таких, что $|y' - y_0| < \delta$ и $|y'' - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x,y') - f(x,y'')| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$.*

► Если $f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \varphi(x)$, то по определению по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для всех y', y'' таких, что $|y' - y_0| < \delta$ и $|y'' - y_0| < \delta$, неравенства $|f(x,y') - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|f(x,y'') - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнены для всех $x \in X$. Отсюда имеем:

$$|f(x,y') - f(x,y'')| \leqslant |f(x,y') - \varphi(x)| + |f(x,y'') - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Докажем достаточность. По условию в каждой точке $x_0 \in X$ в силу критерия Коши для функций существует конечный предел $\lim\limits_{y\to y_0} f(x_0,y) = \varphi(x_0)$, поэтому $f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \varphi(x)$ на X. Далее, устремляя в неравенстве из условия $y' \to y_0$, получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех y'' таких, что $|y''-y_0| < \delta$, неравенство $|f(x,y'') - \varphi(x)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$, то есть мы вписались в определение равномерной сходимости. ◄

Теорема 3.1.4. (sup-критерий равномерной сходимости). *Для того, чтобы семейство функций $f(x,y)$ сходилось к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X при $y \to y_0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{x\in X} |f(x,y) - \varphi(x)| \xrightarrow[y\to y_0]{} 0.$$

► Пусть $f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} \varphi(x)$, тогда по определению по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x,y) - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнено для всех $x \in X$. Тогда, очевидно,

$$\sup_{x\in X} |f(x,y) - \varphi(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

откуда по определению предела $\sup\limits_{x\in X} |f(x,y) - \varphi(x)| \xrightarrow[y\to y_0]{} 0$.
Обратно: пусть $\sup\limits_{x\in X} |f(x,y) - \varphi(x)| \xrightarrow[y\to y_0]{} 0$. По определению предела по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$ выполнено $\sup\limits_{x\in X} |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Тогда при тех же условиях, очевидно,

$$|f(x,y) - \varphi(x)| \leqslant \sup_{x\in X} |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

выполнено для любого $x \in X$, и мы вписываемся в определение равномерной сходимости. ◄

Теорема 3.1.5. *Пусть семейство функций $f(x,y)$ сходится к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X при $y \to y_0$. Тогда для всякой последовательности $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов из Y, не содержащей y_0 элементом, но сходящейся к y_0, последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{f(x,y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно к $\varphi(x)$ на множестве X.*

► В силу равномерной сходимости по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x,y) - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнено для всех $x \in X$.
Пусть последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы, тогда существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполнено $|y_n - y_0| < \delta$. Тогда при тех же условиях для всех $n > N$ неравенство $|f(x,y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in X$, и мы вписались в определение равномерной сходимости. ◄

Следствие 3.1.6. *Пусть $x_0 \in X$ и семейство функций $f(x,y)$ сходится к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно на множестве X при $y \to y_0$. Тогда:*
(1) *если для всякого $y \in Y$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$, то существует конечный предел*

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right);$$

(2) *если для всякого $y \in Y$ $f(x,y)$ непрерывна в точке x_0, то и $\varphi(x)$ непрерывна в x_0.*

► Для произвольной последовательности $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (3.1.5), утверждение следует из (2.3.3). ◄

Теорема 3.1.7. (Обобщенная теорема Дини). *Пусть при любом $y \in Y$ функция $f(x,y)$ непрерывна по x на компакте X и при возрастании y к y_0, монотонно возрастая, стремится к предельной функции $\varphi(x)$, также непрерывной на X. Тогда это стремление будет равномерным на X.*

► Выделим из Y возрастающую последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям (3.1.5), тогда по (2.1.4) $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \{f(x,y_k)\}_{k=1}^{\infty} \rightrightarrows \varphi(x)$ на множестве X. По определению это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n > N$ неравенство

$$|\varphi(x) - f(x,y_n)| < \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in X$. Тогда для $y > y_n$ по условию $f(x,y) > f(x,y_n)$, поэтому для всех y таких, что $|y - y_0| < |y_n - y_0|$ неравенство

$$|\varphi(x) - f(x,y)| < |\varphi(x) - f(x,y_n)| < \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in X$, и мы вписались в определение равномерной сходимости. ◄

§3.2. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Теорема 3.2.1. *Пусть функция $f(x,y)$ определена на $[a,b] \times Y$ и при каждом значении y интегрируема по x на $[a,b]$. Если семейство функций $f(x,y)$ сходится к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно на $[a,b]$ при $y \to y_0$, то $\varphi(x)$ также интегрируема на $[a,b]$ и справедливо равенство*

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

► Для произвольной последовательности $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (3.1.5), интегрируемость $\varphi(x)$ следует из (2.4.3).
В силу равномерной сходимости по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x,y) - \varphi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ выполнено для всех $x \in [a,b]$. Тогда при тех же условиях

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b \varphi(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x,y) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon(b-a),$$

откуда по определению предела следует условие теоремы. ◀

Лемма 3.2.2. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$. Тогда интеграл*

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

есть непрерывная на $[c, d]$ функция.

▶ Зафиксируем $y_0 \in [c, d]$.
По теореме Кантора о равномерной непрерывности функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна на компакте $[a, b] \times [c, d]$. В частности, из равномерной непрерывности по y по определению следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y - y_0| < \delta$, неравенство $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$ выполнено для всех $x \in [a, b]$.
Следовательно, $f(x, y) \xrightarrow[y \to y_0]{} f(x, y_0)$ на $[a, b]$, и по (3.2.1) справедливо равенство:

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b f(x, y_0)dx = I(y_0).$$

В силу произвольного выбора y_0 функция $I(y)$ непрерывна на всем отрезке $[c, d]$. ◀

Теорема 3.2.3. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, а $u(y)$ и $v(y)$ – такие непрерывные функции, что для всех $y \in [c, d]$ значения $u(y)$ и $v(y)$ лежат на отрезке $[a, b]$. Тогда интеграл*

$$I(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)dx$$

есть непрерывная на $[c, d]$ функция.

▶ Зафиксируем $y_0 \in [c, d]$. Тогда:

$$I(y) = \int_{u(y_0)}^{v(y_0)} f(x, y)dx + \int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x, y)dx - \int_{u(y_0)}^{u(y)} f(x, y)dx.$$

Первый интеграл по (3.2.2) при $y \to y_0$ стремится к $I(y_0)$, остальные два допускают оценку

$$\begin{cases} \left| \displaystyle\int_{v(y_0)}^{v(y)} f(x, y)dx \right| \leqslant M|v(y) - v(y_0)| \\ \left| \displaystyle\int_{u(y_0)}^{u(y)} f(x, y)dx \right| \leqslant M|u(y) - u(y_0)| \end{cases},$$

где $M = \max |f(x, y)|$, и – в силу непрерывности функций $u(y)$ и $v(y)$ – стремятся к 0 при $y \to y_0$.
Таким образом, $I(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} I(y_0)$ для любого $y_0 \in [c, d]$. ◀

Лемма 3.2.4. *Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна вместе с производной $f'_y(x, y)$ в прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$. Тогда интеграл*

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

имеет производную по параметру y, выражаемую формулой:

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx.$$

► По формуле Лагранжа конечных приращений

$$\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}=f'_y(x,y+\theta\Delta y),$$

где $0<\theta<1$, откуда имеем:

$$\left|\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}-f'_y(x,y)\right|=\left|f'_y(x,y+\theta\Delta y)-f'_y(x,y)\right|\leqslant\sup_{|y_2-y_1|<\Delta y}|f'_y(x,y_2)-f'_y(x,y_1)|\xrightarrow[|\Delta y|\to 0]{}0$$

в силу теоремы Кантора о равномерной непрерывности.
Стало быть,

$$\frac{I(y+\Delta y)-I(y)}{\Delta y}=\int_a^b\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}dx\xrightarrow[|\Delta y|\to 0]{}\int_a^b f'_y(x,y)dy.$$

◄

Теорема 3.2.5. (Формула Лейбница). *Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна вместе с производной $f'_y(x,y)$ в прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$, а $u(y)$ и $v(y)$ – такие дифференцируемые функции, что для всех $y\in[c,d]$ значения $u(y)$ и $v(y)$ лежат на отрезке $[a,b]$. Тогда интеграл*

$$I(y)=\int_{u(y)}^{v(y)}f(x,y)dx$$

имеет производную по параметру y, выражаемую формулой:

$$I'(y)=\int_{u(y)}^{v(y)}f'_y(x,y)dx+v'(y)\cdot f(v(y),y)-u'(y)\cdot f(u(y),y).$$

► Зафиксируем $y_0\in[c,d]$. Тогда:

$$I(y)=\int_{u(y_0)}^{v(y_0)}f(x,y)dx+\int_{v(y_0)}^{v(y)}f(x,y)dx-\int_{u(y_0)}^{u(y)}f(x,y)dx.$$

Первый интеграл в точке y_0 по (3.2.4) имеет производную, равную $I'(y)=\displaystyle\int_{u(y_0)}^{v(y_0)}f'_y(x,y_0)dx$. Для второго интеграла (значение которого в точке y_0 равно 0) по теореме о среднем имеем:

$$\frac{1}{y-y_0}\int_{v(y_0)}^{v(y)}f(x,y)dx=\frac{v(y)-v(y_0)}{y-y_0}\cdot f(v(\mu),y),$$

где $v(\mu)$ содержится между $v(y_0)$ и $v(y)$. Отсюда производная второго интеграла в точке y_0 равна

$$\lim_{y\to y_0}\left(\frac{1}{y-y_0}\int_{v(y_0)}^{v(y)}f(x,y)dx\right)=\lim_{y\to y_0}\left(\frac{v(y)-v(y_0)}{y-y_0}\cdot f(v(\mu),y)\right)=v'(y_0)\cdot f(v(y_0),y_0).$$

Аналогично, производная третьего интеграла в точке y_0 равна $-u'(y_0)\cdot f(u(y_0),y_0)$.
Объединяя результаты, получаем искомую формулу. ◄

Теорема 3.2.6. *Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$. Тогда интеграл*

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$$

интегрируем по параметру y на отрезке $[c,d]$ и справедливо равенство:

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

► Интегрируемость напрямую следует из (3.2.2). Осталось обосновать возможность перестановки повторных интегралов. Рассмотрим функцию $\varphi(x,y) = \int_c^y f(x,t)dt$, причем $\varphi(x,c) = 0$. Она непрерывна по (3.2.3), ее частная производная по y равна $\varphi'_y(x,y) = f(x,y)$ и непрерывна по условию. Значит, по (3.2.4):

$$\left(\int_a^b \varphi(x,y)dx\right)' = \int_a^b \varphi'_y(x,y)dx = \int_a^b f(x,y)dx,$$

откуда

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_c^d dy \left(\int_a^b \varphi(x,y)dx\right)' = \int_a^b \varphi(x,d)dx - \int_a^b \varphi(x,c)dx = \int_a^b \varphi(x,d)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

◄

§3.3. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Везде далее предполагается, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ имеет единственную особенность в верхнем пределе интегрирования, то есть $f(x,y)$ определена на $[a,b) \times Y$ и при каждом фиксированном y интегрируема как функция от x на любом отрезке $[a,\xi] \subset [a,b)$.

Определение 3.3.1. Говорят, что н.и. $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится на множестве Y:
(1) *поточечно*, если при фиксированном $y \in Y$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\xi_0 < b$, что для всех ξ таких, что $\xi_0 < \xi < b$, выполнено $\left|\int_\xi^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon$;
(2) *равномерно*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\xi_0 < b$, что для всех ξ таких, что $\xi_0 < \xi < b$, неравенство $\left|\int_\xi^b f(x,y)dx\right| < \varepsilon$ выполнено для всех $y \in Y$.

Теорема 3.3.2. (Критерий Коши равномерной сходимости). *Н.и. $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на множестве Y тогда и только тогда, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое ξ_0, что для всех ξ', ξ'' таких, что $\xi_0 < \xi' < \xi'' < b$, неравенство $\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)dx\right| < \varepsilon$ выполнено для всех $y \in Y$.*

► Аналогично доказательствам (2.1.3) и (3.1.3). ◄

Теорема 3.3.3. (sup-критерий равномерной сходимости). *Для того, чтобы н.и. $\int_a^b f(x,y)dx$ сходился равномерно на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_\xi^b f(x,y)dx\right| \xrightarrow[\xi\to b-0]{} 0.$$

► Аналогично доказательствам (2.1.2) и (3.1.4). ◄

Пример 3.3.4. Н.и. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^y}dx$ сходится на $Y = (1,+\infty)$ поточечно, но не равномерно, ибо

$$\sup_{y>1}\left|\int_\xi^{+\infty} \frac{1}{x^y}dx\right| = \sup_{y>1} \frac{x^{1-y}}{1-y}\bigg|_\xi^{+\infty} = \sup_{y>1} \frac{\xi^{1-y}}{1-y} = +\infty.$$

Признаки сходимости н.и., зависящих от параметра.

Теорема 3.3.5. (Мажорантный признак Вейерштрасса). *Пусть функция $f(x,y)$ удовлетворяет на множестве $[a,b)\times Y$ неравенству $|f(x,y)|\leqslant g(x)$. Если н.и. $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ сходится, то н.и. $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ сходится абсолютно и равномерно на Y.*

► Для н.и. $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ применим критерий Коши: по $\varepsilon>0$ найдем такое $\xi_0<b$, что для всех ξ',ξ'' таких, что $\xi_0<\xi'<\xi''<b$, выполнено $\displaystyle\int_{\xi'}^{\xi''} g(x)dx<\varepsilon$. Тогда при тех же условиях для всех ξ',ξ'' таких, что $\xi_0<\xi'<\xi''<b$, неравенство

$$\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)dx\right|\leqslant\int_{\xi'}^{\xi''}|f(x,y)|\,dx\leqslant\int_{\xi'}^{\xi''} g(x)dx<\varepsilon$$

выполнено для всех $y\in Y$, поэтому по критерию Коши н.и. $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно (и абсолютно) на Y. ◄

Теорема 3.3.6. (Признаки Дирихле и Абеля). *Пусть при всех $y\in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема на любом подотрезке промежутка $[a,b)$, а функция $g(x,y)$ монотонна по x на $[a,b)$. Тогда н.и.*

$$\int_a^b f(x,y)g(x,y)dx$$

сходится равномерно на Y, если:

(1) *(Дирихле) интеграл $\displaystyle\int_a^\xi f(x,y)dy$ равномерно ограничен константой A при всех $\xi\in[a,b)$ и $y\in Y$, а семейство функций $g(x,y)$ сходится к 0 на множестве Y равномерно при $x\to b$;*

(2) *(Абель) н.и. $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, а функция $g(x,y)$ равномерно ограничена константой B при всех $x\in[a,b)$ и $y\in Y$.*

► Проверим истинность критерия Коши. Для этого оценим интеграл

$$\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)g(x,y)dx$$

при $a\leqslant\xi'<\xi''<b$. По второй теореме о среднем для всякого $y\in Y$ на интервале (ξ',ξ'') найдется такая точка $\eta(y)$, что выполнено равенство

$$\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)g(x,y)dx=g(\xi',y)\int_{\xi'}^{\eta(y)} f(x,y)dx+g(\xi'',y)\int_{\eta(y)}^{\xi''} f(x,y)dx.$$

Отсюда:

(1) $\displaystyle\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)g(x,y)dx\right|\leqslant 2A\left(|g(\xi',y)|+|g(\xi'',y)|\right)\xrightarrow[\xi'\to b]{}0$ в силу равномерной сходимости семейства $g(x,y)$;

(2) $\displaystyle\left|\int_{\xi'}^{\xi''} f(x,y)g(x,y)dx\right|\leqslant B\left(\left|\int_{\xi'}^{\eta(y)} f(x,y)dx\right|+\left|\int_{\eta(y)}^{\xi''} f(x,y)dx\right|\right)\xrightarrow[\xi'\to b]{}0$ в силу критерия Коши для равномерно сходящегося н.и. $\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$.

В любом случае по критерию Коши имеем равномерную на Y сходимость н.и. $\displaystyle\int_a^b f(x,y)g(x,y)dx$. ◄

Теорема 3.3.7. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области $[a,b)\times[c,d]$. Если н.и. $I(y)=\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$, то он представляет собой непрерывную на $[c,d]$ функцию.*

► Рассмотрим семейство функций $I(\xi, y) = \int_a^\xi f(x,y)dx$. По условию $I(\xi, y) \xrightarrow[\xi \to b]{} I(y)$ на отрезке $[c,d]$. По (3.2.3) при всех $\xi \in [a,b)$ функция $I(\xi, y)$ непрерывна по y на $[c,d]$, следовательно, по (3.1.6) и предельная функция $I(y)$ также непрерывна на $[c,d]$. ◄

Теорема 3.3.8. *Пусть в области $[a,b) \times [c,d]$ своей непрерывности функция $f(x,y)$ принимает неотрицательные значения, а н.и. $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится и непрерывен на $[c,d]$. Тогда его сходимость на $c,d]$ равномерная.*

► Достаточно применить к упомянутому семейству функций $I(\xi, y)$ обобщенную теорему Дини (3.1.7). ◄

§3.4. Теоремы о дифференцировании и интегрировании по параметру

Теорема 3.4.1. (Формула Лейбница). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна вместе со своей производной $f'_y(x,y)$ в области $[a,b) \times [c,d]$. Если на $[c,d]$ н.и. $I(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ сходится, а н.и. $J(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно, то $I(y)$ имеет производную по параметру y, причем $I'(y) = J(y)$.*

► Зададимся последовательностью $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k = b$, и обозначим $I_k(y) = \int_a^{\xi_k} f(x,y)dx$.
Так как $f(x,y)$ и $f'_x(x,y)$ непрерывны на $[a,\xi_k]\times[c,d]$, из (3.2.5) следует, что функции $I_k(y)$ непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$ и

$$I'_k(y) = \int_a^{\xi_k} f'_y(x,y)dx.$$

Из сходимости на $[c,d]$ н.и. $I(y)$ следует сходимость к нему последовательности $\{I_k(y)\}_{k=1}^{+\infty}$ во всех точках $[c,d]$.
Наконец, вновь по (3.2.5)

$$I'_k(y) = \int_a^{\xi_k} f'_y(x,y)dx,$$

и по условию имеем равномерную сходимость последовательности $\{I'_k(y)\}_{k=1}^{+\infty}$ к $J(y)$.
Стало быть, по (2.4.1) н.и. $I(y)$ имеет производную по y, равную

$$I'(y) = \lim_{k\to\infty} \left(\int_a^{\xi_k} f(x,y)dx \right)' = \lim_{k\to\infty} \int_a^{\xi_k} f'_y(x,y)dx = \int_a^b f'_y(x,y)dx.$$

◄

Теорема 3.4.2. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области $[a,b) \times [c,d]$. Если н.и. $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$, то он представляет собой интегрируемую на $[c,d]$ функцию и справедливо равенство:*

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

► Существование интеграла в левой части равенства напрямую следует из (3.3.7), существование внутреннего интеграла в правой части очевидно, поэтому необходимо обосновать существование внешнего интеграла в правой части и само равенство.
Введём функцию $\varphi(t,y) = \int_a^t f(x,y)dx$, причем $\varphi(a,y) = 0$.

Заметим, что сама функция $\varphi(t,y)$ и ее производная $\varphi'_t(t,y) = f(t,y)$ непрерывны на $[a,t]\times[c,d]$ при всех $t<b$, поэтому по (3.2.4)

$$\left(\int_c^d \varphi(t,y)dy\right)' = \int_c^d \varphi'_t(t,y)dy = \int_c^d f(t,y)dy,$$

откуда

$$\int_a^b dt\int_c^d f(t,y)dy = \int_a^b dt\left(\int_c^d \varphi(t,y)dy\right)' = \int_c^d \varphi(b,y)dy - \int_c^d \varphi(a,y)dy = \int_c^d \varphi(b,y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

◄

Лемма 3.4.3. *Пусть семейство функций $f(x,y)$ определено на множестве $[a,b)\times Y$, и на каждом подотрезке $[a,b)$ равномерно стремится к предельной функции $g(x)$ при $y\to y_0$.*
Если н.и. $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, то н.и. $\int_a^b g(x)dx$ сходится на Y, и справедлива формула:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

► Вновь рассмотрим семейство функций $\varphi(\xi,y) = \int_a^\xi f(x,y)dx$. К нему применима теорема (3.2.1), согласно которой

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(\xi,y) = \int_a^\xi \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^\xi g(y)dy.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\xi\to b}\varphi(\xi,y) = \int_a^b f(x,y)dx,$$

причем стремление равномерное на Y. По (3.1.6)

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{\xi\to b}\varphi(\xi,y)\right) = \lim_{\xi\to b}\left(\lim_{y\to y_0}\varphi(\xi,y)\right) = \lim_{\xi\to b}\int_a^\xi g(y)dy = \int_a^b g(y)dy.$$

◄

Теорема 3.4.4. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в области $[a,b)\times[c,d)$, а н.и. $\int_a^b f(x,y)dx$ и $\int_c^d f(x,y)dy$ сходятся равномерно (один по y, другой по x) в любом конечном промежутке.*
Если сходится один из повторных интегралов

$$\int_c^d dy\int_a^b |f(x,y)|dx \text{ или } \int_a^b dx\int_c^d |f(x,y)|dy,$$

то другой интеграл также сходится и справедливо равенство

$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

► Без ограничения общности н.и. $\int_a^b dx\int_c^d |f(x,y)|dy$ сходится. По условию для любого $\eta<d$ н.и. $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,\eta]$, поэтому по (3.4.2)

$$\int_c^\eta dy\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx\int_c^\eta f(x,y)dy.$$

Введем функцию $h(x,\eta) = \displaystyle\int_c^\eta f(x,y)dy$. По (3.2.2) $h(x,\eta)$ непрерывна (а, следовательно, и интегрируема) на любом отрезке $[c,\eta] \subset [c,d)$.
С другой стороны,

$$|h(x,\eta)| \leqslant \int_c^\eta |f(x,y)|dy \leqslant \int_c^d |f(x,y)|dy,$$

и из сходимости н.и. $\displaystyle\int_a^b dx \int_c^d |f(x,y)|dy$ по признаку Вейерштрасса следует равномерная на $[a,b)$ сходимость н.и. $\displaystyle\int_a^b h(x,\eta)dx$.
Наконец, по условию $h(x,\eta) \xrightarrow[\eta\to d]{} \displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$ на $[a,\xi] \subset [a,b)$.
Следовательно, по (3.4.3)

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_a^b \lim_{\eta\to d} h(x,\eta)dx = \lim_{\eta\to d}\int_a^b h(x,\eta)dx =$$
$$= \lim_{\eta\to d}\int_a^b dx \int_c^\eta f(x,y)dy = \lim_{\eta\to d}\int_c^\eta dy \int_a^b f(x,y)dx = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

◄

Теорема 3.4.5. *Если функция $f(x,y)$ в своей области непрерывности $[a,b) \times [c,d)$ принимает неотрицательные значения, а оба н.и. $\displaystyle\int_a^b f(x,y)dx$ и $\displaystyle\int_c^d f(x,y)dy$ существуют и непрерывны. Тогда если существует один из повторных интегралов*

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx \text{ или } \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy,$$

то существует и другой, причем равный первому.

► В самом деле, равносильность требований настоящей теоремы и (3.4.4) напрямую следует из (3.3.8). ◄

§3.5. Вычисление некоторых именных интегралов

Пример 3.5.1. *Интеграл Дирихле*:

$$D(m) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin mx}{x} dx.$$

В силу нечетности по m достаточно рассмотреть случай $m > 0$, а затем продлить ответ по нечетности.
Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I(m) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x} \sin mx dx \ (\alpha > 0)$$

и проверим для него условия правила Лейбница (3.4.1).
(1) $f(x,m) = \dfrac{e^{-\alpha x}}{x}\sin mx$ и $f'_m(x,m) = e^{-\alpha x}\cos mx$ непрерывны при $x \geqslant 0$ и любом m;
(2) $I(m)$ сходится при всех m, поскольку

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin mx dx\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|e^{-\alpha x}\right| |m| \left|\frac{\sin mx}{mx}\right| dx \leqslant |m| \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \left|\frac{m}{\alpha}\right|;$$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos mx dx$ сходится равномерно по m по признаку Вейерштрасса, поскольку

$$\left|e^{-\alpha x}\cos mx\right| \leqslant e^{-\alpha x},$$

а н.и. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$ сходится.
Значит, по (3.4.1)

$$I'(m) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos mx dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+m^2}(\text{проинтегрировали по частям}) \Longrightarrow I(m) = \arctan\frac{m}{\alpha} + C.$$

Подставляя $m = 0$, находим $C = 0$ и, окончательно, $I(m) = \arctan\dfrac{m}{\alpha}$.
Теперь зафиксируем m и рассмотрим $I = I(\alpha)$. По признаку Абеля $I(\alpha)$ сходится равномерно при $\alpha \geqslant 0$, поэтому по (3.3.7) $I(\alpha)$ непрерывен в 0, поэтому можно доопределить $I(\alpha)$ в точке 0 по непрерывности:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin mx}{x}dx = I(0) = \lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0}\arctan\frac{m}{\alpha} = \frac{\pi}{2}.$$

Итого,

$$D(m) = \frac{\pi}{2}\cdot \operatorname{sgn}(m).$$

Пример 3.5.2. *Интеграл Эйлера-Пуассона*:

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Положив $x = ut$, где $u > 0$, получим:

$$K = u\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dt.$$

Умножим обе части на e^{-u^2} и проинтегрируем по u:

$$K\cdot\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = K^2 = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}udu\int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2}dt = \int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2}udu = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Обоснуем законность перестановки интегралов сначала при $u \geqslant u_0 > 0$, $t \geqslant 0$. В самом деле, $f(u,t) = ue^{-(1+t^2)u^2}$ непрерывна при $u \geqslant u_0 > 0, t \geqslant 0$, а интегралы

$$\int_{u_0}^{+\infty} ue^{-(1+t^2)u^2}du = \frac{1}{2(1+t^2)}e^{-(1+t^2)u_0} \text{ и } \int_0^{+\infty} ue^{-(1+t^2)u^2}dt = K\cdot e^{-u^2}$$

непрерывны по t и u в указанных промежутках. Таким образом, по (3.4.5) доказано, что

$$\int_{u_0}^{+\infty}du\int_0^{+\infty} ue^{-(1+t^2)u^2}dt = \int_0^{+\infty}dt\int_{u_0}^{+\infty} ue^{-(1+t^2)u^2}du.$$

Осталось перейти в равенстве к пределу при $u_0 \to 0$, что справа можно сделать под знаком интеграла по (3.4.3).

Пример 3.5.3. *Интегралы Френеля*:

$$J_1 = \int_0^{+\infty}\sin x^2dx,\ J_2 = \int_0^{+\infty}\cos x^2dx.$$

Вычислим первый интеграл; второй вычисляется аналогично.
Положив $x^2 = t$, получим

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-\alpha t}dt\ (\alpha > 0).$$

Заметим, что $\dfrac{1}{\sqrt{t}} = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}du$ (из интеграла Эйлера-Пуассона). Подставив в $J(\alpha)$, получим:

$$J(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\sin tdt\int_0^{+\infty} e^{-tu^2}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+u^2)t}\sin tdt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(\alpha+u^2)^2}.$$

Законность перестановки порядка интегрирования для $f(u,t) = e^{-(\alpha+u^2)t}\sin t$ проверяется аналогично предыдущему. Переходя к пределу при $\alpha \to 0$ по непрерывности (справа можно переходить под знаком интеграла), получаем:

$$2J_1 = J(0) = \lim_{\alpha\to 0} J(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(\alpha+u^2)^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \lim_{\alpha\to 0} \frac{du}{1+(\alpha+u^2)^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

и окончательно

$$J_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Такой же результат будет и для J_2.

Теорема 3.5.4. (Формулы Фруллани) *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $x \geqslant 0$. Тогда:*
(1) *если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$, то справедлива формула*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln\frac{\beta}{\alpha};$$

(2) *если для всякого $A > 0$ сходится интеграл $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, то справедлива формула*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(0) \ln\frac{\beta}{\alpha};$$

(3) *если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ и для всякого $A > 0$ сходится интеграл $\displaystyle\int_0^{A} \frac{f(x)}{x} dx$, то справедлива формула*

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = f(+\infty) \ln\frac{\alpha}{\beta}.$$

► Проведем доказательство первой формулы; остальные выводятся аналогично.
Пусть $0 < a < b < +\infty$. Тогда существует интеграл

$$\int_a^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = \int_a^b \frac{f(\alpha x)}{x} dx - \int_a^b \frac{f(\beta x)}{x} dx = \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(u)}{u} du - \int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(u)}{u} du = \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(u)}{u} du - \int_{b\alpha}^{b\beta} \frac{f(u)}{u} du,$$

а тогда

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = \lim_{a\to 0} \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(u)}{u} du - \lim_{b\to+\infty} \int_{b\alpha}^{b\beta} \frac{f(u)}{u} du.$$

По первой теореме о среднем существуют точки $\xi \in [a\alpha, a\beta]$ и $\eta \in [b\alpha, b\beta]$ такие, что

$$\int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(u)}{u} du = f(\xi) \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{du}{u} = f(\xi) \ln\frac{\beta}{\alpha} \text{ и } \int_{b\alpha}^{b\beta} \frac{f(u)}{u} du = f(\eta) \int_{b\alpha}^{b\beta} \frac{du}{u} = f(\eta) \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Но так как $\xi \to 0$ при $a \to 0$, а $\eta \to +\infty$ при $b \to +\infty$, имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

◄

§3.6. Эйлеровы интегралы

Эйлеров интеграл 2-го рода (гамма-функция)

Определение 3.6.1. *Гамма-функция* $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,\ x > 0.$

Замечание. На отрезке $[A, B] \subset (0, +\infty)$ при $0 < t < 1$ имеем

$$t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{A-1}e^{-t},$$

а при $t > 1$ – соответственно

$$t^{x-1}e^{-t} \leqslant t^{B-1}e^{-t},$$

и по признаку Вейерштрасса $\Gamma(x)$ сходится равномерно на любом отрезке $[A, B] \subset (0, +\infty)$ (и, следовательно, непрерывна на всем луче). Аналогично проверяется равномерная сходимость

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} \ln t dt$$

на любом подотрезке $[A, B] \subset (0, +\infty)$, что обосновывает законность дифференцирования по параметру x.
Вообще, по индукции таким образом доказывается, что $\Gamma(x)$ бесконечно дифференцируема на $(0, +\infty)$.

Теорема 3.6.2. (Формула приведения для Γ-функции).

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

►

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \frac{t^x e^{-t}}{x}\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{x}(-e^{-t})dt = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}dt = \frac{1}{x} \cdot \Gamma(x + 1) \Longrightarrow \Gamma(x + 1) = x\Gamma(x).$$

◄

Замечание. Поскольку

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1,$$

для натуральных n имеем $\Gamma(n + 1) = n!$. Поэтому можно рассматривать Γ-функцию как непрерывный аналог функции $n!$.
В силу непрерывности Γ-функции $\Gamma(x + 1) \approx 1$ при $x \to 0$.

Теорема 3.6.3. (Формула Стирлинга). *При* $n \to \infty$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

►
(1) Заменой переменной $t = x(1 + s)$ перепишем $\Gamma(x + 1)$ в виде

$$\Gamma(x + 1) = \int_{-1}^{+\infty} x^x(1 + s)^x e^{-x(1+s)}xds = x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{+\infty}(1 + s)^x e^{-xs}ds = x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{+\infty} e^{-x(s-\ln(1+s))}ds.$$

Рассмотрим функцию $f(s) = s - \ln(1 + s)$ на луче $s > -1$. Ее производная:

$$f'(s) = 1 - \frac{1}{1 + s} = \frac{s}{1 + s},$$

поэтому $f(s)$ убывает на $(-1, 0)$ и возрастает на $(0, +\infty)$. Кроме того, $f(0) = 0$ и при стремлении аргумента как к -1, так и к $+\infty$ значение функции $f(s)$ стремится к $+\infty$. Поэтому имеет место биекция между $s \in (-1, +\infty)$ и $u \in (-\infty, +\infty)$, задаваемая формулой

$$\frac{u^2}{2} = s - \ln(1 + s)$$

(при условии, что знаки u и s совпадают). Продифференцировав равенство по u, получим:

$$u = \left(1 - \frac{1}{1 + s}\right)\frac{ds}{du}(u)\frac{ds}{du}(u) = \frac{u}{s} + u,\ s \neq 0.$$

(2) Из разложени Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $\ln(1+s)$ имеем:

$$\ln(1+s) = s - \frac{1}{2} \cdot \frac{s^2}{(1+\theta s)^2},\ 0 < \theta < 1,$$

откуда

$$\frac{u^2}{2} = s - \ln(1+s) = \frac{s^2}{2(1+\theta s)^2}.$$

Но знаки u и s совпадают; следовательно, совпадают знаки u и $1+\theta s > 0$, поэтому можно извлечь корень:

$$u = \frac{s}{1+\theta s} \Longrightarrow \frac{u}{s} = 1 - \theta u \Longrightarrow \frac{ds}{du}(u) = \frac{u}{s} + u = 1 + (1-\theta)u,\ s \neq 0.$$

Условие $s \neq 0$ равносильно условию $u \neq 0$. Однако в силу существования предела $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{ds}{du}(u) = 1$, можно доопределить по непрерывности $\dfrac{ds}{du}(0) = 1$, откуда для всех u имеет место оценка

$$\left| \frac{ds}{du}(u) - 1 \right| \leqslant |u|.$$

(3) Перейдем в выражении для $\Gamma(x+1)$ от переменной s к переменной u:

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-x(s-\ln(1+s))} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\frac{u^2}{2}} \left(\frac{ds}{du} - 1 + 1 \right) du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\frac{u^2}{2}} du + A(x),$$

где

$$|A(x)| < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\frac{u^2}{2}} \left| \frac{ds}{du} - 1 \right| du < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\frac{u^2}{2}} |u| du.$$

Первый интеграл сводится к известному нам интегралу Эйлера-Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{2}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\frac{2}{x}}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}.$$

Второй же интеграл вычисляется как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x\frac{u^2}{2}} |u| du = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x\frac{u^2}{2}} u du = \int_{0}^{+\infty} e^{-x\frac{v}{2}} dv = \frac{2}{x} \int_{0}^{+\infty} e^{-w} dw = \frac{2}{x}.$$

Таким образом,

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{-x(s-\ln(1+s))} ds = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} + R \text{ , где } |R| < \frac{2}{x},$$

и, окончательно,

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1} e^{-x} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{x}} + R \right) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e} \right)^x (1 + R') \text{ , где } |R'| < \sqrt{\frac{2}{\pi x}}.$$

В частности, при $x \to +\infty$ имеем $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x} \left(\dfrac{x}{e} \right)^x$, а при $x = n \in \mathbb{N}$ – искомую формулу. ◀

Эйлеров интеграл 1-го рода (бета-функция)

Определение 3.6.4. *Бета-функция* $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt$, $p, q > 0$.

Замечание.
(1) При $p, q \geqslant 1$ интеграл является собственным.
(2) Заменой переменных $t = 1 - s$ имеем $B(p,q) = B(q,p)$.
(3) Заменой переменных $t = \dfrac{s}{1+s}$ имеем

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{p-1}}{(1+s)^{p+q}} ds.$$

(4) При всех t для $p \geqslant p_0 > 0$, $q \geqslant q_0 > 0$ выполняется $t^{p-1}(1-t)^{q-1} \leqslant t^{p_0-1}(1-t)^{q_0-1}$, поэтому интеграл сходится равномерно на указанном множестве по признаку Вейерштрасса.

Теорема 3.6.5. (Формула приведения для B-функции).

$$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q).$$

►

$$B(p+1,q)=\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}dt=\frac{-t^p(1-t)^q}{q}\bigg|_0^1+\frac{p}{q}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^q dt=\frac{p}{q}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}(1-t)dt=$$
$$=\frac{p}{q}\left(\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt-\int_0^1 t^p(1-t)^{q-1}dt\right)=\frac{p}{q}B(p,q)-\frac{p}{q}B(p+1,q),$$

откуда

$$\left(1+\frac{p}{q}\right)B(p+1,q)=\frac{p}{q}B(p,q)\Longrightarrow B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q).$$

◄

Теорема 3.6.6. (Связь бета- и гамма-функции).

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

►

Заменой переменной $t=(k+1)y$, $k>-1$ получим:

$$\frac{\Gamma(p)}{(1+k)^p}=\int_0^{+\infty} y^{p-1}e^{-(1+k)y}dy.$$

Переобозначив p как $p+q$, имеем:

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+k)^{p+q}}=\int_0^{+\infty} y^{p+q-1}e^{-(1+k)y}dy.$$

Умножим обе части на k^{p-1} и проинтегрируем по k на луче $[(0,+\infty)$:

$$\Gamma(p+q)\cdot B(p,q)=\Gamma(p+q)\int_0^{+\infty}\frac{k^{p-1}}{(1+k)^{p+q}}dk=\int_0^{+\infty}k^{p-1}dk\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-(1+k)y}dy=$$
$$=\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-y}dy\int_0^{+\infty}k^{p-1}e^{-ky}dk=\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-y}\cdot\frac{\Gamma(p)}{y^p}dy=\Gamma(p)\int_0^{+\infty}y^{q-1}e^{-y}dy=\Gamma(p)\cdot\Gamma(q).$$

Осталось обосновать законность перестановки интегралов при $k\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$. Сначала ограничимся случаем $p,q>1$. Функция $f(k,y)=y^{p+q-1}\cdot e^{-(1+k)y}\cdot k^{p-1}$ непрерывна при $k\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, а интегралы

$$\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-(1+k)y}k^{p-1}dy=\Gamma(p+q)\frac{k^{p-1}}{(1+k)^{p+q}}\quad\text{и}\quad\int_0^{+\infty}y^{p+q-1}e^{-(1+k)y}k^{p-1}dk=\Gamma(p)y^{q-1}e^{-y}$$

непрерывны по k и y в указанных промежутках. Следовательно, по (3.4.5) перестановка интегралов законна.
В общем случае заведомо $p+1>1$ и $q+1>1$, поэтому по доказанному

$$B(p+1,q+1)=\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)},$$

откуда можно получить искомую формулу при помощи формул приведения (3.6.2) и (3.6.5). ◄

Теорема 3.6.7. (Формула дополнения для Γ-функции). *При* $0<a<1$

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin\pi a}.$$

▶ Воспользуемся формулой (3.6.6):

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = B(a,1-a)\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{1+t}dt = I_1 + I_2.$$

В силу непрерывности

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{t^{a-1}}{1+t}dt.$$

Воспользуемся разложением $\dfrac{1}{1+t} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k$ (ряд сходится равномерно на $[0,1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$) и почленным интегрированием:

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{t^{a-1}}{1+t}dt = \int_0^{1-\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{k+a-1}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{1-\varepsilon}(-1)^k t^{k+a-1}dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left.\frac{t^{k+a}}{k+a}\right|_0^{1-\varepsilon} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(1-\varepsilon)^{k+a}}{k+a}.$$

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{1}{k+a}$ сходится по признаку Лейбница, поэтому по (2.5.7) ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\dfrac{(1-\varepsilon)^{k+a}}{k+a}$ сходится равномерно на $[0,1-\varepsilon]$. Стало быть, по (2.3.1)

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(1-\varepsilon)^{k+a}}{k+a} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{(1-\varepsilon)^{k+a}}{k+a} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+a}.$$

Второй интеграл сводится к первому заменой $t = \dfrac{1}{x}$:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x^{(1-a)-1}}{1+x}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1-a} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a-k}.$$

Итого:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{a+k} - \frac{1}{a-k}\right).$$

Из теории рядов Фурье (см. (4.3.9)) отсюда напрямую будет следовать утверждение теоремы. ◀

Глава 4. Элементы гармонического анализа

§4.1. Финитные функции. Лемма Римана

Под $L_R(A)$ подразумевается класс абсолютно интегрируемых в несобственном смысле функций на множестве A.

Определение 4.1.1. *Носитель* функции $f(x)$ – это замыкание множества, на котором $f(x) \neq 0$.

Определение 4.1.2. Функция $f(x)$ называется *финитной*, если ее носитель является компактом.

Лемма 4.1.3. *Для всякой функции $f(x)$ класса $L_R[a,b]$ существует последовательность $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ финитных ступенчатых функций такая, что*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-\varphi_n(x)|\,dx = 0.$$

► Устроим разбиение T отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ мелкостью $\delta = \dfrac{1}{n}$. Определим

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

и зададим функцию

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} m_i, \ x \in (x_{i-1}, x_i), \ 0 \leqslant i \leqslant n \\ 0, \ x \in (-\infty, a] \cup [b, +\infty) \end{cases}.$$

Выберем $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$. Тогда очевидно, что при $\delta \to 0$ (или, что то же самое, при $n \to \infty$) $|f(\xi_i) - m_i| \to 0$.
Но в таком случае

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(\xi_i) - \varphi_n(\xi_i)}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(\xi_i) - m_i}{n} = 0.$$

◄

Лемма 4.1.4. (Римана). *Пусть функция $f(x)$ класса $L_R[a,b]$. Тогда*

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x) \cos \nu x dx = \lim_{\nu\to\infty} \int_a^b f(x) \sin \nu x dx = 0.$$

► Проведем доказательство первого утверждения; второе доказывается аналогично.
На подотрезке $[\alpha, \beta] \subseteq [a,b]$ введем характеристическую функцию

$$\chi_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} 1, \ x \in [\alpha, \beta] \\ 0, \ x \notin [\alpha, \beta] \end{cases}.$$

Для нее:

$$\int_a^b \chi(x) \cos \nu x dx = \int_\alpha^\beta \cos \nu x dx = \frac{\sin \nu\beta - \sin \nu\alpha}{\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0,$$

поскольку $\dfrac{1}{\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 0$, а $|\sin \nu\beta - \sin \nu\alpha| \leqslant 2$.
Следовательно, теорема верна для всякой характеристической, а, стало быть, и всякой финитной ступенчатой функции. Для произвольной функции $f(x)$ и для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ по (4.1.3) выберем такую финитную ступенчатую функцию $\varphi(x)$, что

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для $\varphi(x)$ существует такое ν_0, что для всех $\nu > \nu_0$ выполнено

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \cos \nu x dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$\left| \int_a^b f(x) \cos \nu x dx \right| \leqslant \left| \int_a^b (f(x) - \varphi(x)) \cos \nu x dx \right| + \left| \int_a^b \varphi(x) \cos \nu x dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

и по определению предела $\lim\limits_{\nu\to\infty} \displaystyle\int_a^b f(x) \cos \nu x dx = 0$. ◄

§4.2. Преобразование Фурье

Определение 4.2.1. Оператор $\mathcal{F}$, ставящий в соответствие функции $f(x)$ класса $L_R(\mathbb{R})$ функцию

$$[\mathcal{F}f](y) = \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x)dx,$$

называется *преобразованием Фурье.*

Теорема 4.2.2. *Пусть функция $f(x)$ класса $L_R(\mathbb{R})$. Тогда:*
(1) *для всех y справедлива оценка*

$$|\hat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx;$$

(2) *функция $\hat{f}(y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$;*
(3) $\lim\limits_{y\to\infty} \hat{f}(y) = 0.$

▶
(1)

$$|\hat{f}(y)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x)dx\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-ixy} f(x)|dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx.$$

(2) Имеем: $|e^{-ixy}f(x)| = |f(x)|$, а интеграл по $\mathbb{R}$ от $|f(x)|$ сходится по условию. Значит, по признаку Вейерштрасса $\hat{f}(y)$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$, и по (3.3.7) представляет собой непрерывную на $\mathbb{R}$ функцию.
(3) Представим $f(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – также класса $L_R(\mathbb{R})$ функции, тогда имеем:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos yx - i\sin yx)(u(x) + iv(x))dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x)\cos yx + v(x)\sin yx)dx - i\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x)\sin yx - v(x)\cos yx)dx,$$

и по лемме Римана $\hat{f}(y) \xrightarrow[y\to\infty]{} 0.$ ◀

Следствие 4.2.3. *Если для функций $f(x)$ и $f_n(x)$ класса $L_R(\mathbb{R})$ выполнено*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|dx = 0,$$

то последовательность $\left\{\hat{f}_n(y)\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$ к функции $\hat{f}(y)$.

▶ Имеем:

$$|[\mathcal{F}f_n](y) - [\mathcal{F}f](y)| = |[\mathcal{F}(f_n - f)](y)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x) - f(x)|dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

причем стремление равномерное, поскольку правая часть неравенства не зависит от параметра y. Значит, и левая часть стремится к 0 равномерно по y при $n \to \infty$, откуда непосредственно следует утверждение следствия. ◀

Определение 4.2.4. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ класса $L_R(\mathbb{R})$. Их *свертка* – это функция

$$(\varphi * \psi)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\psi(x-t)dt.$$

Теорема 4.2.5. *Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ класса $L_R(\mathbb{R})$, непрерывны и ограничены на $\mathbb{R}$. Тогда свертка $(\varphi * \psi)(x)$ также непрерывна, ограничена и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, причем*

$$[\mathcal{F}(\varphi * \psi)](y) = [\mathcal{F}\varphi](y) \cdot [\mathcal{F}\psi](y).$$

► Пусть функция $\psi(x)$ ограничена на $\mathbb{R}$ константой M. Тогда

$$|\varphi(t)\psi(x-t)| \leqslant M|\varphi(t)|,$$

и в силу абсолютной интегрируемости на $\mathbb{R}$ функции $\varphi(t)$ по признаку Вейерштрасса свертка $(\varphi*\psi)(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $\mathbb{R}$, откуда по (3.3.7) следует ее непрерывность.
Ограниченность свертки также следует из абсолютной интегрируемости на $\mathbb{R}$ функции $\varphi(t)$:

$$|(\varphi*\psi)(x)| = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\psi(x-t)dt\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)\psi(x-t)|dt \leqslant \frac{N}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|dt.$$

Докажем абсолютную интегрируемость свертки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|(\varphi*\psi)(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty}dx\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\psi(x-t)dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)\psi(x-t)|\,dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|dt\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x-t)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|dt\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(s)|ds.$$

Перестановка интегралов законна, так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)\psi(x-t)|dt$$

по доказанному сходится равномерно на $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)\psi(x-t)|dx = |\varphi(t)|\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x-t)|dx$ сходится равномерно на любом конечном отрезке по признаку Вейерштрасса, а повторный интеграл существует из последнего равенства цепочки.
Наконец, проверим свойство преобразования Фурье:

$$[\mathcal{F}(\varphi*\psi)](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixy}(\varphi*\psi)(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixy}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\psi(x-t)dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-t)e^{-ixy}dx \overset{x=t+s}{=\!=\!=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{-ity}dt\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+}\infty\psi(s)e^{-isy}ds = [\mathcal{F}\varphi](y)\cdot[\mathcal{F}\psi](y).$$

Законность перестановки интегралов проверяется аналогично. ◄

Теорема 4.2.6. *Пусть функция $f(x)$ вместе со своей производной класса $L_R(\mathbb{R})$. Тогда*

$$[\mathcal{F}f'](y) = (iy)[\mathcal{F}f](y).$$

► Из абсолютной интегрируемости на $\mathbb{R}$ функций $f(x)$ и $f'(x)$ следует существование конечного предела

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f'(x)dx = \int_0^{+\infty}f'(x)dx.$$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty}f(x) = f(0) + \lim_{x\to+\infty}\int_0^x f'(x)dx = A.$$

Покажем, что $A=0$. Если, например, $A>0$, то существует такое число a, что для всех $x>a$ выполнено $f(x)>\dfrac{A}{2}$, откуда по признаку сравнения несобственных интегралов (аналогичному (1.2.3)) имеем расходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx,$$

что противоречит условию. Значит, $A=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Аналогично $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$. Тогда имеем:

$$[\mathcal{F}f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixy}f'(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ixy}f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{iy}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ixy}f(x)dx = (iy)[\mathcal{F}f](y).$$

◄

Следствие 4.2.7. *Пусть функция $f(x)$ вместе со своими производными вплоть до $f^{(n)}$ класса $L_R(\mathbb{R})$. Тогда для всех $k \leqslant n$*

$$[\mathcal{F}f^{(k)}](y) = (iy)^k[\mathcal{F}f](y).$$

► Индуктивно следует из (4.2.6) ◄

Следствие 4.2.8. *Пусть функция $f(x)$ вместе со своими производными вплоть до $f^{(n)}$ класса $L_R(\mathbb{R})$ и непрерывны. Тогда имеет место оценка*

$$|[\mathcal{F}f](y)| \leqslant \frac{M}{|y|^n},$$

где $M = \sup\limits_{\mathbb{R}} |[\mathcal{F}f^{(n)}](y)| < +\infty$.

► $[\mathcal{F}f^{(n)}](y)$ ограничена на $\mathbb{R}$ по (4.2.2), поэтому $M = \sup\limits_{\mathbb{R}} |[\mathcal{F}f^{(n)}](y)| < +\infty$. Отсюда по (4.2.6) имеем:

$$[\mathcal{F}f^{(n)}](y) = (iy)^n[\mathcal{F}f](y) \Longrightarrow |[\mathcal{F}f](y)| = \frac{|[\mathcal{F}f^{(n)}](y)|}{|y|^n} \leqslant \frac{M}{|y|^n}.$$

◄

§4.3. Ряды Фурье. Условия сходимости в точке

Определение 4.3.1. Пусть функция $f(x)$ 2π - периодическая и класса $L_R[-\pi, \pi]$. Ее *тригонометрический ряд Фурье* – это функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

где коэффициенты a_k, $k \geqslant 0$, и b_k, $k \geqslant 1$, определяются как

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt\ ,\ \ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt.$$

Определение 4.3.2. *Ядром Дирихле* порядка n называется тригонометрический многочлен

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt.$$

Лемма 4.3.3.
(1) *Для частных сумм $S_n(f, x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ справедливо выражение*

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)D_n(s)ds.$$

(2) *Если t не кратно 2π, то*

$$D_n(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]}{\sin\frac{t}{2}}.$$

►
(1) Подставим выражения для a_k и b_k в частичную сумму ряда Фурье:

$$S_n(f,x) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\cos kt\cos kx + \sin kt \sin kx\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(t-x)dt \overset{s=t-x}{=\!=\!=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)D_n(s)ds.$$

(2) В самом деле,

$$D_n(t)\cdot 2\sin\frac{t}{2}=\sin\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{n}2\cos kt\sin\frac{t}{2}=\sin\frac{t}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right]=\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right],$$

и если t не кратно 2π, то можно поделить на $2\sin\dfrac{t}{2}\neq 0$. ◀

Замечание. Ядро Дирихле – четная функция. Поэтому формулу для частичных сумм ряда Фурье можно видоизменить:

$$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+s)D_n(s)ds=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+s)D_n(s)ds+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+s)D_n(s)ds=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left[f(x+s)+f(x-s)\right]D_n(s)ds.$$

А так как $\displaystyle\int_0^{\pi}D_n(s)ds=\frac{\pi}{2}$, то для произвольного числа A имеет место равенство

$$S_n(f,x)-A=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+s)+f(x-s)-2A]D_n(s)ds.$$

Теорема 4.3.4. (Принцип локализации Римана). *Сходимость или расходимость ряда Фурье в точке, а также значение суммы ряда при условии сходимости определяются значениями функции из сколь угодно малой окрестности этой точки.*

▶ Зафиксируем число δ такое что $0<\delta<\pi$. Представим частную сумму $S_n(f,x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 согласно (4.3.3) как

$$S_n(f,x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x_0+s)D_n(s)ds=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(x_0+s)D_n(s)ds+\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}f(x_0+s)D_n(s)ds+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}f(x_0+s)D_n(s)ds\right].$$

Введем функцию

$$g(s)=\begin{cases}\dfrac{f(x_0+s)}{2\sin\frac{s}{2}}, & s\in[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]\\ 0, & s\in(-\delta,\delta)\end{cases},$$

тогда два интеграла в квадратных скобках можно выразить как

$$\rho_n=\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right]g(s)ds,$$

и по лемме Римана (4.1.4) $\rho_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Таким образом, при больших n

$$S_n(f,x_0)\sim\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(x_0+s)D_n(s)ds,$$

и факты сходимости или расходимости в точке x_0, а также значение суммы в этой точке при условии сходимости определяются только значениями функции на отрезке $[x_0-\delta,x_0+\delta]$. В силу произвольного выбора δ теорема доказана. ◀

Следствие 4.3.5. *Если значения функций $f(x)$ и $g(x)$ класса $L_R[-\pi,\pi]$ на некотором отрезке $[\alpha,\beta]$ совпадают, то в каждой точке интервала (α,β) ряды Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ сходятся или расходятся одновременно, а если они сходятся, то к одной и той же сумме.*

▶ Действительно, это всего лишь переформулировка основного принципа локализации. ◀

Теорема 4.3.6. (Признак Дини). *Пусть функция $f(x)$ класса $L_R[-\pi,\pi]$ и при некотором A в точке x_0 сходится интеграл*

$$\int_0^{\pi}|f(x_0+s)+f(x_0-s)-2A|\frac{ds}{s}.$$

Тогда ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится к A в точке x_0.

► Из условия принадлежности $f(x)$ классу $L_R[-\pi,\pi]$ ясно, что интеграл имеет единственную особенность при $s=0$. Исследуем ее.
При $0 \leqslant s \leqslant \pi$ справедливо неравенство

$$\sin\frac{s}{2} \geqslant \frac{s}{\pi},$$

откуда немедленно следует

$$|f(x_0+s)+f(x_0-s)-2A|\frac{1}{2\sin\frac{s}{2}} \leqslant |f(x_0+s)+f(x_0-s)-2A|\frac{\pi}{2s},$$

и из условия по признаку сравнения несобственных интегралов функция

$$g(s) = |f(x_0+s)+f(x_0-s)-2A|\frac{1}{2\sin\frac{s}{2}}$$

класса $L_R[0,\pi]$. Тогда имеем:

$$S_n(f,x_0)-A = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x_0+s)+f(x_0-s)-2A]\frac{1}{2\sin\frac{s}{2}}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right]ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(s)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)s\right]ds,$$

откуда по лемме Римана (4.1.4) $S_n(f,x_0)-A \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, и мы вписались в определение предела. ◄

Следствие 4.3.7. *Пусть функция $f(x)$ класса $L_R[-\pi,\pi]$ непрерывна или терпит разрыв I рода в точке x_0. Если при малых положительных значениях s существуют положительные константы M и α такие, что*

$$\begin{cases} |f(x_0+s)-f(x_0+0)| \leqslant Ms^\alpha \\ |f(x_0-s)-f(x_0-0)| \leqslant Ms^\alpha \end{cases},$$

то ряд Фурье для функции $f(x)$ сходится к $A = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ в точке x_0.

► Из условия

$$|f(x_0+s)+f(x_0-s)-2A| \leqslant |f(x_0+s)-f(x_0+0)| + |f(x_0-s)-f(x_0-0)| \leqslant 2Ms^\alpha,$$

откуда, поскольку $\alpha>0$, утверждение следует из (4.3.6). ◄

Следствие 4.3.8. *Ряд Фурье кусочно-дифференцируемой на отрезке $[-\pi,\pi]$ функции $f(x)$ сходится в каждой точке x_0 интервала $(-\pi,\pi)$ к значению*

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

а в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ – к значению

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

► Действительно, для такой функции условие (4.3.7) очевидным образом выполнено. ◄

Пример 4.3.9. Рассмотрим ряд Фурье для функции $f(x)=\cos ax$ на отрезке $[-\pi,\pi]$, где a – нецелое число. Поскольку $f(x)$ четна, коэффициенты b_k ряда Фурье равны 0. В свою очередь,

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos at\cos kt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(a-k)t+\cos(a+k)t]\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(a-k)\pi}{a-k}+\frac{\sin(a+k)\pi}{a+k}\right) = (-1)^k\frac{\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a-k}+\frac{1}{a+k}\right).$$

А по (4.3.8) в каждой точке отрезка ряд Фурье для $f(x)$ сходится к значению функции в этой точке, то есть

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{\sin a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^\infty (-1)^k\left(\frac{1}{a-k}+\frac{1}{a+k}\right).$$

Положим $x = 0$, тогда получим:

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{a-k} + \frac{1}{a+k}\right).$$

Это равенство использовалось при доказательстве (3.6.7).

§4.4. Метод Фейера суммирования рядов Фурье

Определение 4.4.1. Пусть функция $f(x)$ класса $L_R[\pi, \pi]$, а $S_n(f,x)$ – частичные суммы ее ряда Фурье. Тогда суммы

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x)$$

называются *суммами Фейера* функции $f(x)$.

Определение 4.4.2. *Ядром Фейера* порядка n называется функция

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t).$$

Лемма 4.4.3.
(1) *Для сумм Фейера $\sigma_n(f,x)$ функции $f(x)$ справедливо выражение*

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)F_n(s)ds.$$

(2) *Если t не кратно 2π, то*

$$F_n(t) = \frac{1}{2(n+1)}\cdot\left(\frac{\sin\left[(n+1)\,\frac{t}{2}\right]}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \geqslant 0.$$

►Воспользуемся результатами (4.3.3).
(1) Подставим выражения для $S_k(f,x)$ в частичную сумму ряда Фурье:

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)D_k(s)ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(s)ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+s)F_n(s)ds.$$

(2) В самом деле,

$$2\sin^2\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \sum_{k=0}^{n}\sin\frac{t}{2}\sin\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(\cos kt - \cos{(k+1)t}) = \sin^2\left[(n+1)\frac{t}{2}\right],$$

и если t не кратно 2π, то можно поделить на $2\sin^2\dfrac{t}{2} \neq 0$. ◄

Замечание. Заметим, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\sum_{k=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)dt = \frac{1}{(n+1)\pi}\sum_{k=0}^{n}\pi = 1,$$

поэтому для любой функции $f(x)$ класса $L_R[-\pi, \pi]$ справедливо

$$\sigma_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+s) - f(x)\right]F_n(s)ds.$$

Лемма 4.4.4. *Для любого $\delta \in (0, \pi)$*

$$\lim_{n\to\infty}\max_{t\in[\delta,\pi]} F_n(t) = 0.$$

▶ В самом деле,

$$\max_{t\in[\delta,\pi]} F_n(t) = \max_{t\in[\delta,\pi]} \frac{1}{2(n+1)}\cdot\left(\frac{\sin\left[(n+1)\frac{t}{2}\right]}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

◀

Теорема 4.4.5. (Фейера). *Последовательность сумм Фейера 2π-периодической непрерывной на всей оси функции $f(x)$ сходится равномерно по x к $f(x)$.*

▶ Из непрерывности $f(x)$ на $\mathbb{R}$ следует существование константы M такой, что для всех x выполнено

$$|f(x) < M.$$

Оценим разность $\sigma_n(f,x) - f(x)$:

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x+t) - f(x)\right]F_n(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|F_n(t)dt.$$

По теореме Кантора о равномерной непрерывности $f(x)$ равномерно непрерывна на компакте $[-\pi,\pi]$, а в силу периодичности – и на всей прямой $\mathbb{R}$. По определению это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого t такого, что $|t| < \delta$, неравенство

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

выполнено для любого $x \in \mathbb{R}$. Выберем $\delta \leqslant \pi$, тогда в силу замечания

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x+t) - f(x)|F_n(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}F_n(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

По (4.4.4) найдем такое N, что для всех $n > N$ выполнено

$$\max_{t\in[\delta,\pi]} F_n(t) < \frac{\varepsilon}{8M},$$

тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|F_n(t)dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left(|f(x+t)| + |f(x)|\right)F_n(t)dt \leqslant \frac{2M}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}F_n(t)dt \leqslant \frac{2M}{\pi}\int_{0}^{\pi}F_n(t)dt < \frac{2M}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon\pi}{8M} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Аналогично

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}|f(x+t) - f(x)|F_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда окончательно для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для всех $n > N$ неравенство

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t) - f(x)|F_n(t)dt < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$, и мы вписались в определение равномерной сходимости. ◀

§4.5. Теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании рядов Фурье

Теорема 4.5.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и кусочно-непрерывно диференцируема на $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда если*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) \text{ – ряд Фурье функции } f(x),$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-ka_k\sin kx + kb_k\cos kx) \text{ – ряд Фурье производной } f'(x).$$

► Пусть ряд Фурье функции $f'(x)$ имеет вид

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

тогда по определению

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)dt = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{\pi} = 0;$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos ktdt = \frac{1}{\pi} f(t)\cos kt\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin ktdt = kb_k;$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin ktdt = \frac{1}{\pi} f(t)\sin kt\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos ktdt = -k\alpha_k.$$

◄

Теорема 4.5.2. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) - \text{ее ряд Фурье.}$$

Тогда справедлива формула

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k}\sin kx + \frac{b_k}{k}(1 - \cos kx) \right),$$

причем сходимость ряда равномерная по x.

► Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0 x}{2}.$$

Она непрерывна на $[-\pi, \pi]$ вместе со своей производной

$$F'(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$$

и, кроме того,

$$F(\pi) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt - \pi a_0 = 0.$$

Следовательно, ее ряд Фурье

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

сходится к ней равномерно по x на отрезке $[-\pi, \pi]$ (см. (4.6.2)). Найдем его коэффициенты.

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos ntdt = \frac{1}{\pi} F(t)\frac{\sin nt}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right]\sin ntdt = -\frac{b_n}{n}.$$

Аналогично $B_n = \dfrac{a_n}{n}$. Чтобы найти A_0, подставим в ряд Фурье $x = 0$ и заметим, что $F(0) = 0$:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k = 0 \Longrightarrow \frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Окончательно,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{a_0 x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{k}\sin kx + \frac{b_k}{k}(1 - \cos kx) \right).$$

◄

§4.6. Зависимость скорости сходимости ряда Фурье от гладкости функции

Лемма 4.6.1. *Если $\alpha > 0$ и $n \geqslant 1$, то*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

► Действительно,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}} < \int_{n}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}} \bigg|_{n}^{+\infty} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

◄

Теорема 4.6.2. *Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ непрерывные производные вплоть до $f^{(m-1)}(x)$ и кусочно-непрерывную производную $f^{(m)}(x)$, причем при $0 \leqslant k \leqslant m-1$*

$$f^{(k)}(-\pi) = f^{(k)}(\pi).$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно по x к функции $f(x)$, причем остаток ряда $R_n(x)$ допускает оценку

$$R_n(x) = \overline{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n^{2m-1}}}\right).$$

► Пусть $a_k^{(m)}$ и $b_k^{(m)}$ – коэффициенты ряда Фурье функции $f^{(m)}(x)$. Тогда по (4.5.1)

$$\begin{cases} a_k^{(m)} = \pm k^m a_k \\ b_k^{(m)} = \pm k^m b_k \end{cases} \text{либо} \begin{cases} a_k^{(m)} = \pm k^m b_k \\ b_k^{(m)} = \pm k^m a_k \end{cases}.$$

По неравенству Коши-Буняковского для всех x имеем:

$$|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k^{(m)}| + |b_k^{(m)}|}{k^m} \leqslant \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(|a_k^{(m)}| + |b_k^{(m)}|\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}}.$$

Используем очевидное неравенство $(\alpha+\beta)^2 \leqslant 2\left(\alpha^2+\beta^2\right)$ и лемму (4.6.1):

$$|R_n(x)| \leqslant \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} 2\left[\left(a_k^{(m)}\right)^2 + \left(b_k^{(m)}\right)^2\right]} \cdot \sqrt{\frac{1}{2m-1} \cdot \frac{1}{n^{2m-1}}} = \frac{\eta_n}{\sqrt{n^{2m-1}}},$$

где

$$\eta_n = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} 2\left[\left(a_k^{(m)}\right)^2 + \left(b_k^{(m)}\right)^2\right]}{2m-1}}.$$

В силу неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(a_k^{(m)}\right)^2 + \left(b_k^{(m)}\right)^2\right] \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f^{(m)}(x)\right]^2 dx < \infty,$$

следовательно, остатки этого ряда стремятся к 0, откуда немедленно следует

$$\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Longrightarrow R_n(x) = \overline{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n^{2m-1}}}\right).$$

По (4.3.8) ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ поточечно на $[-\pi, \pi]$, а полученная оценка на остаточный член, не зависящая от x, позволяет говорить и о равномерной сходимости по x.

◄

Глава 5. Элементы функционального анализа

§5.1. Линейные нормированные пространства: определение и примеры

Определение 5.1.1. Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется *нормированным*, если на нем задана функция $\|\cdot\| : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, называемая *нормой*, удовлетворяющая аксиомам:

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|;$$
$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|;$$
$$\|x\| \geqslant 0, \text{ причем } \|x\| = 0 \iff x = \theta \in \mathcal{L}$$

для любых векторов x, y и скаляра α.

§5.2. Пространства со скалярным произведением

Определение 5.2.1. Пусть $\mathcal{L}$ – векторное пространство.
Скалярное произведение – это функция $\langle \cdot\,, \cdot \rangle : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая аксиомам:

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle};$$
$$\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle;$$
$$\langle x, x \rangle \geqslant 0, \text{ причем } \langle x, x \rangle = 0 \iff x = \theta \in \mathcal{L}$$

для любых x, y, z из $\mathcal{L}$ и λ, μ из $\mathbb{C}$.

Теорема 5.2.2. (Неравенство Коши-Буняковского). *Для любых векторов x, y пространства со скалярным произведением верно*

$$|\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

► Пусть $z = \lambda x + \mu y$. Тогда:

$$0 \leqslant \langle z, z \rangle = \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \overline{\lambda} \langle x, x \rangle + \lambda \overline{\mu} \langle x, y \rangle + \mu \overline{\lambda} \langle y, x \rangle + \mu \overline{\mu} \langle y, y \rangle.$$

Положим $\lambda = \langle y, y \rangle$, а $\mu = -\langle x, y \rangle$, тогда

$$\langle y, y \rangle \left[\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - \overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} \right] = \langle y, y \rangle \left[\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} \right] \geqslant 0.$$

Если $y = \theta$, то условие теоремы верно. Иначе из полученного неравенства следует, что

$$\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leqslant \langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} = |\langle x, y \rangle|^2.$$

◄

Следствие 5.2.3. *Всякое линейное пространство со скалярным произведением является нормированным, причем норма может быть задана формулой*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

► Проверим аксиомы нормы.
(1) $\|x\| \geqslant 0$ и $\|x\| = 0 \iff x = \theta$ по третьей аксиоме;
(2) $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle x, y \rangle} = |\alpha| \|x\|$;
(3) По (5.2.2):

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \leqslant \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Следовательно, перед нами действительно норма. ◄

Определение 5.2.4. Полное линейное нормированное пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым.*

Определение 5.2.5. Система векторов $\left\{e_i \middle| \, i \in I\right\}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется *ортонормированной*, если для любых индексов i, j справедливо $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Теорема 5.2.6. (Неравенство Бесселя). *Для любого вектора x гильбертова пространства $\mathcal{H}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

где векторы e_k образуют ортонормированную систему.

► Оценим расстояние между x и частичными суммами ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$:

$$0 \leqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle - \left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, x \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle =$$

$$= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} \left|\langle x, e_k \rangle\right|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left|\langle x, e_k \rangle\right|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \left|\langle x, e_k \rangle\right|^2.$$

Эта оценка верна для любого n, а значит, переходя к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|\langle x, e_k \rangle\right|^2 \leqslant \|x\|^2$. ◄

Определение 5.2.7. Коэффициенты $c_k = \langle x, e_k \rangle$ называются *коэффициентами Фурье* вектора x по ортонормированной системе $\left\{e_i \middle| \, i \in I\right\}$.

Определение 5.2.8. Ортонормированная система $\left\{e_i \middle| \, i \in I\right\}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ называется *замкнутой*, если для любого $x \in \mathcal{H}$ верно *равенство Парсеваля*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

§5.3. Сепарабельные пространства. Теорема Рисса-Фишера

Определение 5.3.1. Линейное нормированное пространство $\mathcal{L}$ называется *сепарабельным*, если в нем существует всюду плотное множество Y, то есть для любого $x \in \mathcal{L}$ по всякому ε можно найти элемент $y \in Y$ такой, что $\|x - y\| < \varepsilon$.

Определение 5.3.2. Система векторов $\left\{\varphi_i \middle| \, i \in I\right\}$ сепарабельного пространства $\mathcal{L}$ называется полной, если для всякого $x \in \mathcal{L}$ существует конечная линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k \varphi_k$ такая, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} c_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$$

для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$.

Теорема 5.3.3. *В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ ортонормированная система замкнута тогда и только тогда, когда она полна.*

► Пусть система $\{e_i \mid i \in I\}$ замкнута, тогда для любого $x \in \mathcal{H}$ последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ сходится к x, то есть для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что выполнено неравенство

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| < \varepsilon,$$

и по определению система $\{e_i \mid i \in I\}$ полна.
Обратно, пусть ортонормированная система $\{e_i \mid i \in I\}$ полна, тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация $S_N = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k e_k$ такая, что

$$\varepsilon^2 > \|x - S_N\|^2 = \langle x - S_N, x - S_N \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, S_N \rangle - \langle S_N, x \rangle + \langle S_N, S_N \rangle =$$
$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{c_k} \langle x, e_k \rangle + c_k \overline{\langle x, e_k \rangle} \right) + \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{N} |c_k - \langle x, e_k \rangle|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_k \rangle|^2 \geqslant \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\langle x, e_k \rangle|^2,$$

и по определению предела ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ сходится к x, то есть выполнено равенство Парсеваля и система $\{e_i \mid i \in I\}$ замкнута. ◄

Теорема 5.3.4.

<To be continued>

Глава 6. Дополнительные главы

§6.1. Аппроксимационные теоремы Вейерштрасса

Теорема 6.1.1. *Пусть $f(x)$ – непрерывная 2π-периодическая функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой тригонометрический многочлен $T_n(x)$, что*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon.$$

► Рассмотрим суммы Фейера $\sigma_n(f, x)$. Согласно определению они являются тригонометрическими полиномами, а по (4.4.5) для любого $\varepsilon > 0$ найдется сумма Фейера $\sigma_n(f, x)$ такая, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - \sigma_n(f, x)| < \varepsilon.$$

Следовательно, ее и можно взять в качестве $T_n(x)$. ◄

Теорема 6.1.2. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой алгебраический многочлен $P_n(x)$, что*

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

► Сначала предположим, что $[a, b] = [0, \pi]$. Четным образом продлим функцию $f(x)$ на отрезок $[-\pi, 0]$, а затем на всю вещественную ось с периодом 2π. Получим четную непрерывную 2π-периодическую функцию, совпадающую с $f(x)$ на отрезке $[0, \pi]$.
Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. По (5.1.1) найдется тригонометрический многочлен $T_m(x)$ такой, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Каждая из функций $\sin kx$ и $\cos kx$ является аналитической и потому раскладывается в степенной ряд. Значит, и $T_m(x)$ раскладывается в степенной ряд

$$T_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

сходящийся при всех x. Но по (2.5.2) на любом конечном отрезке этот ряд сходится равномерно. Следовательно, существует такое n, что

$$\sup_{x\in[0,\pi]} |T_m(x) - (c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Обозначим $P_n = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$, тогда заключаем, что

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant |f(x) - T_m(x)| + |T_m(x) - P_n(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - T_m(x)| + \sup_{x\in[0,\pi]} |T_m(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\sup_{x\in[0,\pi]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Пусть теперь отрезок $[a, b]$ произвольный. Вновь зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию

$$F(t) = f\left(a + \frac{t}{\pi}(b-a)\right),$$

определенную при $t \in [0, \pi]$. Для нее по доказанному существует многочлен $Q_n(t)$ такой, что

$$\sup_{t\in[0,\pi]} \left| f\left(a + \frac{t}{\pi}(b-a)\right) - Q_n(t) \right| < \varepsilon.$$

Полагая $x = a + \dfrac{t}{\pi}(b-a)$, а $P_n(x) = Q_n\left(\pi \cdot \dfrac{x-a}{b-a}\right)$, получаем, что

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

◀

§6.2. Дельтаобразные семейства функций

Определение 6.2.1. Семейство $\left\{\Delta_\alpha \middle| \ \alpha \in A\right\}$ функций $\Delta_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, зависящих от параметра $\alpha \in A$, называется *дельтаобразным* при $\alpha \to \omega$, если:
(a) все функции семейства неотрицательны на $\mathbb{R}$;
(b) для любой функции Δ_α семейства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_\alpha(x)dx = 1;$$

(c) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\alpha\to\omega} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Delta_\alpha(x)dx = 1.$$

Пример 6.2.2. Пусть $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неотрицательная интегрируемая на $\mathbb{R}$ финитная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1.$$

При $\alpha > 0$ построим функции

$$\Delta_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

Тогда при $\alpha \to 0+$ семейство $\{\Delta_\alpha\}$ является дельтаобразным.

Пример 6.2.3. Рассмотрим последовательность функций

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} (1-x^2)^n \div \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx, \ |x| \leqslant 1 \\ 0, \ |x| > 1 \end{cases}.$$

Для него свойства (a) и (b) очевидным образом верны, остается проверить свойство (c) при $n \to \infty$. Заметим, что

$$0 \leqslant \int_{\varepsilon}^{1} (1-x^2)^n dx \leqslant \int_{\varepsilon}^{1} (1-\varepsilon^2)^n dx = (1-\varepsilon^2)^n (1-\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

откуда следует свойство (c). Значит, построенное семейство $\{\Delta_n\}$ является дельтаобразным при $n \to \infty$.

Пример 6.2.4. Рассмотрим последовательность функций

$$\Delta_n(x) = \begin{cases} \cos^{2n} x \div \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx, \ |x| \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0, \ |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Снова свойства (a) и (b) выполнены, и нужно проверить свойство (c) при $n \to \infty$. Заметим, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{1}{2} B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n} > \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2n},$$

а, с другой стороны,

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \leqslant \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \varepsilon dx < \frac{\pi}{2} (\cos\varepsilon)^{2n},$$

откуда имеем

$$0 \xleftarrow[n\to\infty]{} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2n} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx < \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx < \frac{\pi}{2} (\cos\varepsilon)^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

откуда

$$\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

что и доказывает свойство (c). Значит, построенное семейство $\{\Delta_n\}$ является дельтаобразным при $n \to \infty$

Теорема 6.2.5. *Пусть $f(x)$ определена, равномерно непрерывна и ограничена константой M на всей числовой оси, а $\left\{\Delta_\alpha \middle| \ \alpha \in A\right\}$ – дельтаобразное семейство функций при $\alpha \to \omega$. Если свертка $(f * \Delta_\alpha)(x)$ существует для каждого $\alpha \in A$, то при $\alpha \to \omega$ $(f * \Delta_\alpha)(x)$ сходится равномерно по x к функции $f(x)$.*

► В силу равномерной непрерывности по $\varepsilon > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что для любого t такого, что $|t| < \delta$, неравенство

$$|f(x-t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда в силу симметричности свертки для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем:

$$|(f * \Delta_\alpha)(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\Delta_\alpha(t)dt - f(x) \right| \overset{(b)}{=\!=} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f(x-t) - f(x)\right) \Delta_\alpha(t)dt - f(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)| \Delta_\alpha(t)dt + \left[\int_{-\infty}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)| \Delta_\alpha(t)dt + \int_{\delta}^{\infty} |f(x-t) - f(x)| \Delta_\alpha(t)dt \right] <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \Delta_\alpha(t)dt + 2M \left[\int_{-\infty}^{-\delta} \Delta_\alpha(t)dt + \int_{\delta}^{\infty} \Delta_\alpha(t)dt \right] \overset{(b)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{2} + 2M \left[\int_{-\infty}^{-\delta} \Delta_\alpha(t)dt + \int_{\delta}^{\infty} \Delta_\alpha(t)dt \right].$$

Но по (c) при $\alpha \to \omega$ выражение в квадратных скобках стремится к 0, поэтому, начиная с какого-то момента, его можно сделать меньше $\dfrac{\varepsilon}{4M}$. Тогда при всех $x \in \mathbb{R}$

$$|(f * \Delta_\alpha)(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и мы вписались в определение равномерной сходимости. ◄

Замечание. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b] \subset [0,1]$. Положим $f(x) = 0$ вне отрезка $[0,1]$ и обозначим $\rho_n = \displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx$. Тогда для дельтаобразного семейства из (5.2.3) имеем:

$$(f * \Delta_n)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\Delta_n(x-t)dt = \frac{1}{\rho}\int_0^1 f(t)(1-(x-t)^2)^n dt = \int_0^1 f(t)\left(\sum_{k=0}^{2n} c_k(t)x^k\right)dt = \sum_{k=0}^{2n}\left(\int_0^1 f(t)c_k(t)dt\right)x^k.$$

То есть $(f * \Delta_n)(x)$ – это алгебраический многочлен, и для отрезка $[a,b] \subset [0,1]$ мы получили другое доказательство теоремы (5.3.2). Остается заметить, что произвольный отрезок можно перевести в подотрезок отрезка $[0,1]$ линейной заменой, при которой многочлен переходит в многочлен, а непрерывность и равномерность приближения сохраняются.

— Конец демо-версии —