МГУ, мех.-мат. факультет

Лекции по математическому анализу – 1

Лектор: проф. В.В.Власов

Последняя редакция: 23 августа 2020 г.

Демо-версия

Ответственный за набор, верстку и редакцию:
Агафонкин Г.А., 3** гр.

2019-2020 гг.

Содержание

Глава 1. Введение в математический анализ.

§1.1. Вещественная прямая. Точная верхняя и нижняя грани.

Вещественные числа образуют поле относительно операций сложения

$$+ \ : \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad (a,b)\mapsto c \overset{\text{def}}{=\!=} a+b$$

и умножения

$$\cdot \ : \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad (a,b)\mapsto c \overset{\text{def}}{=\!=} a\cdot b$$

с вытекающими из определения поля свойствами этих операций:

(1) $a+b\ =\ b+a, \quad a\cdot b\ =\ b\cdot a;$

(2) $(a+b)+c\ =\ a+(b+c), \quad (a\cdot b)\cdot c\ =\ a\cdot(b\cdot c);$

(3) $a+0=a, \quad a\cdot 1\ =\ a;$

(4) $a+(-a)=0, \quad a\cdot a^{-1}\ =\ 1$ при $a\neq 0.$

Эти операции связаны по дистрибутивности: $(a+b)\cdot c\ =\ a\cdot c+b\cdot c$

К аксиомам поля добавляется еще одна, десятая аксиома, уникальная для $\mathbb{R}$:

Аксиома непрерывности. Пусть X и Y – подмножества $\mathbb{R}$ такие, что для любых $x\in X$ и $y\in Y$ верно, что $x\leqslant y$. Тогда существует число c такое, что для всех $x\in X$ и $y\in Y$ имеем $x\leqslant c\leqslant y$.

На вещественной прямой естественным образом вводится линейный порядок $<$ со свойствами:

(1) $a \neq b \implies a < b$ или $b < a$;

(2) $a < b,\ b < c \implies a < c$;

(3) $a < b \implies a + c < b + c$;

(4) $a < b,\ c > 0 \implies a \cdot c < b \cdot c$.

Поле $\mathbb{R}$ нормировано, $\|a\| \stackrel{\text{def}}{=\!=} |a|$ – модуль (абсолютная величина) числа a. Укажем его простейшие свойства:

(1) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

► Поскольку $|a| = \max\{-a, a\}$, имеем:

$$a + b \leqslant a + |b| \leqslant |a| + |b|, \qquad -a - b \leqslant -a + |b| \leqslant |a| + |b|,$$

откуда и $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. ◄

(2) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

► Воспользуемся неравенством (1):

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b| \implies |a| - |b| \leqslant |a - b|$$

и, аналогично, $|b| - |a| \leqslant |a - b|$. Следовательно, $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$. ◄

Для подмножеств вещественной прямой можно выделить следующие их классы.

Определение 1.1.1. Непустое подмножество E множества $\mathbb{R}$ называется ограниченным сверху (снизу), если существует число C такое, что для всех $x \in E$ выполнено $x \leqslant C$ (соответственно, $C \leqslant x$).

Если множество E ограниченно и сверху, и снизу, то говорят, что множество E ограниченно.

Для ограниченных сверху (снизу) множеств вводится понятие точной грани.

Определение 1.1.2. Пусть множество E ограничено сверху. Число M называется точной верхней гранью множества E (обозначение: $M = \sup E$), если выполнены 2 условия:

(1) M ограничивает E сверху, то есть для всякого $x \in E$ верно $x \leqslant M$;

(2) для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ в E существует элемент x такой, что $x > M - \varepsilon$.

Аналогично, если E ограничено снизу, то число m называется точной нижней гранью множества E (обозначение: $m = \inf E$), если:

(1) m ограничивает E снизу, то есть для всякого $x \in E$ верно $m \leqslant x$;

(2) для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ в E существует элемент x такой, что $m + \varepsilon < x$.

Покажем, что определение корректно, то есть для любого ограниченного сверху (снизу) множества существует его точная верхняя (нижняя) грань.

Теорема 1.1.3. *Любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань, а любое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю грань.*

► Проведем доказательство для точной верхней грани, случай точной нижней грани рассматривается аналогично.

Пусть E ограничено сверху. Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех чисел, ограничивающих E сверху, то есть

$$\mathcal{B} \ = \ \{b \mid x \leqslant b \text{ для любого } x \in E\}.$$

Заметим, что $\mathcal{B}$ непусто (в силу определения ограниченного сверху множества) и для любых $x \in E$ и $b \in \mathcal{B}$ имеем $x \leqslant b$. По аксиоме непрерывности существует число M такое, что для всех $x \in E$ и $b \in \mathcal{B}$ выполнено $x \leqslant M \leqslant b$. Легко видеть, что $M \ = \ \sup E$. ◄

В качестве простейшего приложения докажем хорошо известный нам факт.

Лемма 1.1.4. *Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ не ограничено сверху.*

► Предположим обратное. Тогда по доказанному у множества $\mathbb{N}$ существует точная верхняя грань M. Рассмотрим число $M_0 \ = \ M - 1$. По определению точной верхней грани существует такое натуральное $n_0 \in \mathbb{N}$, что

$$M - 1 \ = \ M_0 < n_0.$$

Это условие равносильно тому, что $M < n_0 + 1$, что противоречит определению точной верхней грани. Значит, $\mathbb{N}$ неограничено сверху. ◄

Важным следствием леммы является так называемый

Следствие 1.1.5. (Принцип Архимеда). *Для любых положительных вещественных чисел a и b таких, что $a < b$, существует такое натуральное число m, что $a \cdot m > b$.*

► Рассмотрим число $q \ = \ {}^{b}/_{a}$. Тогда существует натуральное m, что $q < m$ (иначе число q ограничивало бы множество $\mathbb{N}$ сверху, что невозможно) или, что то же самое, $a \cdot m > b$. ◄

§1.2. Системы вложенных отрезков.

Определение 1.2.1. Системой вложенных отрезков будем называть семейство

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_k, b_k], \ldots$$

невырожденных (то есть $a_k \neq b_k$ для всякого k) отрезков вещественной прямой.

Если дополнительно известно, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует натуральное $n \ = \ n(\varepsilon)$ такое, что $b_n - a_n < \varepsilon$, то система вложенных отрезков называется стягивающейся.

Эпитет «стягивающаяся» оправдывается следующей центральной теоремой.

Теорема 1.2.2. *Для любой системы вложенных отрезков $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_k, b_k], \ldots$ ее пересечение*

$$\Omega \ = \ \bigcap_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k] \quad \textit{непусто.}$$

Если система была стягивающейся, то Ω состоит из единственной точки c, причем

$$c \ = \ \sup_n \{a_n\} \ = \ \inf_n \{b_n\}.$$

► Обозначим $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Проверим, что для любых номеров k и n верно $a_k < b_n$.

При $k = n$ это следует из условия невырожденности. Если $k > n$, то имеем цепочку неравенств

$$a_k < a_{k+1} < \ldots < a_n < b_n.$$

Аналогично при $k < n$

$$a_k < b_k < b_{k-1} < \ldots < b_n.$$

Следовательно, для любых $a_k \in A$ и $b_n \in B$ выполнено $a_k < b_n$, и по аксиоме непрерывности существует число c такое, что $a_k \leqslant c \leqslant b_n$ для всех $a_k \in A$ и $b_n \in B$, то есть $c \in \Omega$.

Теперь в предположении стягиваемости исходной системы вложенных отрезков докажем, что c – единственный элемент Ω. Предположим, что существует $c' \in \Omega$, $c' \neq c$. Тогда в определении стягивающейся системы возьмем

$$\varepsilon = \frac{|c - c'|}{2}$$

и для этого значения найдем номер n такой, что $b_n - a_n < \varepsilon$.

Но c и c' – элементы из пересечения, поэтому для любого n верно $|c - c'| \leqslant b_n - a_n$. Сравнивая два неравенства, заключаем, что

$$|c - c'| \leqslant b_n - a_n < \varepsilon = \frac{|c - c'|}{2} \quad \text{– противоречие. Значит, } c = c'.$$

Наконец, так как для любого натурального n верны неравенства

$$a_n \leqslant \sup_n \{a_n\} \leqslant c \leqslant \inf_n \{b_n\} \leqslant b_n$$

и

$$\inf_n \{b_n\} - \sup_n \{a_n\} \leqslant b_n - a_n < \varepsilon \text{ для любого } \varepsilon > 0,$$

можно сделать вывод, что $\inf\limits_n \{b_n\} = \sup\limits_n \{a_n\} = c$. ◄

Важно отметить, что если вместо вложенных отрезков рассматривать интервалы или полуинтервалы, то теорем будет неверна. Легко построить контрпример в этом случае.

Пример 1.2.3. Рассмотрим систему вложенных интервалов

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \supset \left(0, \frac{1}{3}\right) \supset \ldots \supset \left(0, \frac{1}{k}\right) \supset \ldots$$

Из построения видно, что для всякой точки c существует номер $n = n(c)$ такой, что для всех $k > n$

$$c > \frac{1}{k} \implies c \notin \left(0, \frac{1}{k}\right),$$

а следовательно, c не может лежать в пересечении.

§1.3. Леммы Гейне-Бореля о покрытии и Вейерштрасса о предельной точке.

Определение 1.3.1. Говорят, что система $\mathcal{S} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ множеств (I – некоторое индексирующее множество) покрывает множество X, если для всякого элемента $x \in X$ существует $\alpha \in I$ такое, что $x \in A_\alpha$.

Теорема 1.3.2. (Лемма Гейне-Бореля). *Из любого системы $\mathcal{S}$ интервалов, покрывающей отрезок $[a, b]$ вещественной прямой, можно выделить конечную подсистему, его покрывающую.*

► Пусть $I_1 = [a, b]$. Построим систему вложенных отрезков по следующему правилу:

если I_k допускает конечное покрытие интервалами из $\mathcal{S}$, то теорема доказана;

иначе поделим I_k пополам и примем за I_{k+1} ту половину, которая не допускает конечного покрытия.

Полученная система вложенных отрезков $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ будет стягивающейся, поскольку

$$|I_n| \;=\; \frac{|I_1|}{2^n} \;=\; \frac{b-a}{2^n},$$

и $n(\varepsilon)$ можно выбрать равным $\left\lfloor \log_2 \dfrac{b-a}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. По доказанному в пересечении $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ лежит единственная точка c.

Так как точка c лежала в исходном отрезке $[a,b]$, для нее существовал интервал $(\alpha,\beta) \in \mathcal{S}$, ее содержащий. Положим

$$\varepsilon \;=\; \min\{c-\alpha, \beta-c\}$$

и выберем отрезок I_n такой, что $|I_n| < \varepsilon$. Тогда в силу выбора ε получаем, что $I_n \subset (\alpha,\beta)$ – противоречие с тем, что I_n не допускает конечного покрытия. ◀

Определение 1.3.3. Назовем точку p предельной для подмножества E вещественной прямой, если в любой ее окрестности $U_\delta(p) \stackrel{\text{def}}{=\!=} (p-\delta, p+\delta)$ лежит отличная от p точка из E.

Теорема 1.3.4. (Лемма о предельной точке). *Всякое бесконечное ограниченное подмножество E вещественной прямой имеет предельную точку.*

► Так как E ограничено, существует отрезок I, целиком содержащий E. Покажем, что хотя бы одна точка I является предельной для E.

Пусть это не так. Для каждой точки $x \in I$ выберем произвольное $\delta \;=\; \delta(x) > 0$, тогда окрестность $U_\delta(x)$ содержит лишь конечное число точек из E (или не содержит их вовсе). Совокупность всех таких окрестностей по всем $x \in I$ образует покрытие отрезка I, и по лемме Гейне-Бореля из него можно выделить конечное подпокрытие окрестностями $U_{\delta_1}(x_1), \ldots, U_{\delta_n}(x_n)$.

Так как $E \subset I$, выделенное подпокрытие покрывает и множество E. Но в каждой такой окрестности конечное число точек, поэтому и в их объединении их также конечное число. Но множество E бесконечно – противоречие. ◀

§1.4. Конечные, счетные и несчетные множества.

Определение 1.4.1. Пусть A и B – произвольные множества. Отображение $f : A \to B$ называется:

(1) инъективным (инъекцией), если для всяких $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ выполнено $f(a_1) \neq f(a_2)$;

(2) сюръективным (сюръекцией), если для любого $b \in B$ существует $a \in A$ такой, что $f(a) \;=\; b$;

(3) биективным (биекцией, взаимно однозначным), если f одновременно инъективно и сюръективно.

Если между множествами A и B можно установить биекцию f, то говорят, что A и B равномощны.

Легко проверяется, что равномощность задает на классе всех множеств отношение эквивалентности. Определим классы этой эквивалентности.

Определение 1.4.2. Множество A называется:

(1) конечным мощности n, если оно равномощно множеству $X_n \;=\; \{1, 2, \ldots, n\}$;

(2) счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$;

(3) несчетным, если оно не является ни конечным, ни счетным.

Приведем некоторые примеры равномощных множеств и установим биекции между ними.

Пример 1.4.3. Биекция $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ показывает, что множество $2\mathbb{N}$ четных чисел равномощно множеству всех натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Пример 1.4.4. Интервал $U = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ равномощен вещественной прямой, это задается биекцией $f : U \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{tg} x$.

Легко можно показать, что любые два промежутка вещественной прямой (под промежутком подразумевается либо интервал (в том числе вся прямая $\mathbb{R}$), либо полуинтервал (в том числе луч), либо отрезок) равномощны друг другу. Оставим это в качестве упражнения.

Лемма 1.4.5. *Любое бесконечное множество E содержит счетное подмножество.*

► Заметим, что от выкидывания конечного числа элементов свойство множества быть бесконечным сохраняется. Используя это, построим счетное подмножество в E по следующей схеме:

E бесконечно $\implies$ существует $x_1 \in E$;

$E \setminus \{x_1\}$ бесконечно $\implies$ существует $x_2 \in E \setminus \{x_1\}$;

$E \setminus \{x_1, x_2\}$ бесконечно $\implies$ существует $x_3 \in E \setminus \{x_1, x_2\}$;

$\vdots$

$E \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$ бесконечно $\implies$ существует $x_{k+1} \in E \setminus \{x_1, \ldots, x_k\}$;

$\vdots$

Множество $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ и будет искомым. ◄

Лемма 1.4.6. *Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

► Доказательство существенно похоже на доказательство предыдущей леммы. А именно, пусть A – бесконечное подмножество счетного множества $E = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, тогда перечислим его элементы по следующей схеме:

$A \subset E, \quad A \ni a_1 \implies a_1 \in X \implies a_1 = x_{n_1};$

$A \setminus \{a_1\} \subset E, \quad A \setminus \{a_1\} \ni a_2 \implies a_2 \in X \implies a_2 = x_{n_2};$

$A \setminus \{a_1, a_2\} \subset E, \quad A \setminus \{a_1, a_2\} \ni a_3 \implies a_3 \in X \implies a_2 = x_{n_3};$

$\vdots$

$A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \subset E, \quad A \setminus \{a_1, \ldots, a_k\} \ni a_{k+1} \implies a_{k+1} \in X \implies a_{k+1} = x_{n_{k+1}};$

$\vdots$

Таким образом, $A = \{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ и биекция $f : A \to \mathbb{N}$, $x_{n_k} \mapsto k$ устанавливает счетность множества A. ◄

Лемма 1.4.7. *Объединение счетного числа счетных множеств счетно.*

► Пусть $A_n = \{a_{n,k} \mid k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{N}$ – счетные множества. Выпишем их элементы в бесконечную матрицу:

$$\begin{array}{cccccc}
a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,k} & \cdots \\
a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,k} & \cdots \\
a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,k} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,k} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

(в первой строке выписаны элементы A_1, во второй – элементы A_2 и т.д.)

Теперь выпишем элементы матрицы по побочным диагоналям:

$$a_{1,1}; \quad a_{1,2},\ a_{2,1}; \quad a_{1,3},\ a_{2,2},\ a_{3,1}; \quad \ldots$$

Это устанавливает биекцию между объединением множеств A_n и множеством $\mathbb{N}$, которая в явном виде задается как

$$f : \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \to \mathbb{N}, \quad a_{n,k} \mapsto \frac{(n+k-1)(n+k-2)}{2} + n$$

Стало быть, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ счетно. ◄

Используемый в доказательстве метод нумерации элементов счетного объединения счетных множеств называется диагональным методом Кантора.

Следствие 1.4.8. *Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.*

► В самом деле,

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q=1}^{\infty} \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; \text{НОД}(p,q) = 1 \right\},$$

а каждое внутреннее множество счетно как подмножество множества $\mathbb{N}$. ◄

Теорема 1.4.9. *Всякий невырожденный отрезок $[a,b]$, $a \neq b$ вещественной прямой несчетен.*

► Пусть это не так, то есть $[a,b] = I_1 = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Построим систему вложенных отрезков по следующему правилу:

на $k-$том шаге отрезок I_k разделим на 3 равные части и примем за I_{k+1} ту его треть, которая не содержит x_k.

Полученная система вложенных отрезков $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ будет стягивающейся, поскольку

$$|I_n| = \frac{|I_1|}{3^n} = \frac{b-a}{3^n},$$

и $n(\varepsilon)$ можно выбрать равным $\left\lfloor \log_3 \dfrac{b-a}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. По доказанному в пересечении $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ лежит единственная точка $c = x_{n_0}$. Но по построению отрезков $x_{n_0} \notin I_{n_0} \subset I_1 = [a,b]$ – противоречие. Значит, отрезок $[a,b]$ несчетен. ◄

Следствие 1.4.10. *Вещественная прямая $\mathbb{R}$ несчетна.*

► В самом деле, если бы $\mathbb{R}$ была счетна, то любое ее бесконечное подмножество также было бы счетным. Но мы знаем, что, например, отрезки не являются счетными. Значит, и $\mathbb{R}$ само несчетно. ◄

Глава 2. Предел последовательности.

§2.1. Понятие предела.

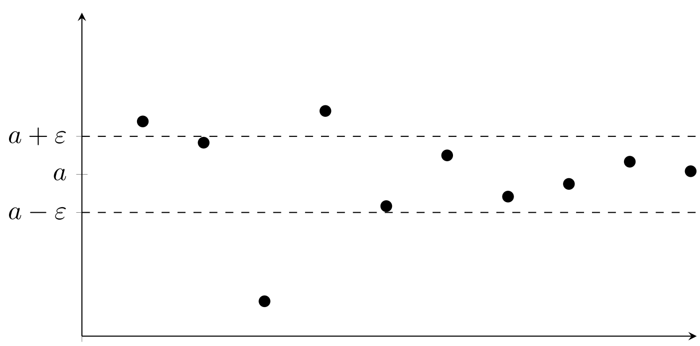
Числовой последовательностью будем называть счетное подмножество $\{a_n\}$ множества натуральных чисел.

Определение 2.1.1. Говорят, что число a является пределом последовательности $\{a_n\}$ при $n \to \infty$

$$(\text{обозначение: } a = \lim_{n\to\infty} a_n),$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$.

Если у последовательности есть предел, она называется сходящейся, иначе – расходящейся.



Интуитивно определение предела полезно представлять так:

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого момента, все члены последовательности $\{a_n\}$ лежат в $\varepsilon-$трубке с центром в a (см. картинку).

Теорема 2.1.2. *Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел a, то он единственен.*

► Пусть $a' \neq a$ – еще один предел для $\{a_n\}$. Запишем, что это значит:

для любого $\varepsilon > 0$ существуют номера $n_1 = n_1(\varepsilon)$, $n_2 = n_2(\varepsilon)$ такие, что

$$\text{для всех } n > n_1 \text{ выполнено } |a_n - a| < \varepsilon, \text{ а для всех } n > n_2 \text{ – соответственно } |a_n - a'| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{|a-a'|}{3} > 0$, а $N = N(\varepsilon) = \max\{n_1, n_2\}$. Тогда:

$$|a - a'| = |(a - a_n) + (a_n - a')| \leqslant |a_n - a| + |a_n - a'| < 2\varepsilon = \frac{2|a-a'|}{3} \quad \text{– противоречие.}$$

◄

Определение 2.1.3. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной (сверху, снизу), если таково множество

$$A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Условие ограниченности удобно записывать так: для всех натуральных n выполнено $|a_n| \leqslant C$, где C – некоторая константа.

Лемма 2.1.4. *Всякая сходящаяся последовательность ограничена.*

► Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Согласно определению, для $\varepsilon = 1$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполнено

$$|a_n - a| < 1 \iff a - 1 < a_n < a + 1.$$

Тогда в качестве универсальных ограничивающих констант выберем числа

$$c = \min\{a-1,\ a_1, a_2, \ldots, a_N\} \quad \text{и} \quad C = \max\{a+1,\ a_1, a_2, \ldots, a_N\},$$

и очевидно, что уже для всех n выполнено $c < a_n < C$. Значит, $\{a_n\}$ ограничена. ◄

Лемма 2.1.5. *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a, то последовательность $\{|a_n|\}$ сходится к числу $|a|$.*

► Вновь запишем определение:

для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$. Но тогда из свойств модулей

$$||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon,$$

откуда следует, что $|a| = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|$. ◄

Важно отметить, что обратное утверждение неверно: если последовательность из модулей сходится, то гарантировать сходимость исходной последовательности нельзя.

Пример 2.1.6. Пусть $a_n = (-1)^n$. Тогда $\{a_n\}$ – расходящаяся (полезно проверить это напрямую, расписав определение), но в то же время $|a_n| \equiv 1$, очевидно, сходится к 1.

Заметим, что построенный контрпример также показывает, что из ограниченности последовательности не следует ее сходимость.

Теорема 2.1.7. (Лемма о сохранении знака). *Пусть $a \neq 0$ – предел последовательности $\{a_n\}$. Тогда существует номер N_0 такой, что для всех $n > N_0$ выполнено*

$$a_n > \frac{a}{2} \cdot \operatorname{sgn} a.$$

► По определению предела для $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполнено

$$|a_n - a| < \frac{|a|}{2} \iff a - \frac{|a|}{2} < a_n < a + \frac{|a|}{2}.$$

Если $a > 0$, то из левого неравенства следует, что $\dfrac{a}{2} < a_n$, а если $a < 0$, то из правого неравенства следует, что $a_n < \dfrac{a}{2}$ при всех $n > N = N_0$. Обобщая, получаем утверждение теоремы. ◄

§2.2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Определение 2.2.1. Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если она сходится к 0.

Теорема 2.2.2. *Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые, а $\{c_n\}$ – ограниченная последовательность. Тогда бесконечно малыми являются последовательности $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$, $\{c_n \cdot \alpha_n\}$ и $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$.*

► Запишем определения предела для $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$:

для любого $\varepsilon > 0$ существуют номера $N_\alpha = N_\alpha(\varepsilon)$, $N_\beta = N_\beta(\varepsilon)$ такие, что

для всех $n > N_\alpha$ выполнено $|\alpha_n - 0| = |\alpha_n| < \varepsilon$, а для всех $n > N_\beta$ – соответственно $|\beta_n| < \varepsilon$.

Обозначив $N = N(\varepsilon) = \max\{N_\alpha, N_\beta\}$, получим, что для всех $n > N$ одновременно $|\alpha_n| < \varepsilon$ и $|\beta_n| < \varepsilon$. А тогда

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < 2\varepsilon,$$

откуда $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ – тоже бесконечно малая.

Далее, пусть C – ограничивающая по модулю последовательность $\{c_n\}$ константа, тогда при $n > N_\alpha$

$$|c_n \cdot \alpha_n| \leqslant C \cdot |\alpha_n| < C \cdot \varepsilon,$$

откуда $\{c_n \cdot \alpha_n\}$ – бесконечно малая.

Наконец, поскольку сходящаяся последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена, из только что доказанного сразу же следует, что $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ – также бесконечно малая. ◀

Центральной теоремой о бесконечно малых является

Теорема 2.2.3. (Лемма о бесконечно малой). *Последовательность $\{a_n\}$ сходится к пределу a, если и только если существует такая бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\}$, что $a_n = a + \alpha_n$.*

► Пусть a – предел $\{a_n\}$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$. Обозначим $\alpha_n = a_n - a$, тогда условие $|\alpha_n| < \varepsilon$ при $n > N$ означает, что $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая.

Теперь пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая такая, что $a_n = a + \alpha_n$. По определению для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N$ выполнено $|\alpha_n| = |a_n - a| < \varepsilon$, поэтому a – предел $\{a_n\}$. ◀

Определение 2.2.4. Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого $A > 0$ существует номер $N = N(A)$ такой, что для всех $n > N$ выполнено $|a_n| > A$.

Для бесконечно большой последовательности говорят также, что ее предел равен ∞.

§2.3. Арифметические свойства пределов. Предельный переход в неравенствах.

Теорема 2.3.1. *Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Тогда:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)$ *существует и равен $a \pm b$;*

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$ *существует и равен $a \cdot b$*

(3) *если $a \neq 0$ и для достаточно больших n выполнено $a_n \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$ существует и равен $\dfrac{b}{a}$.*

► По лемме о бесконечно малой подберем такие бесконечно малые $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, что $a_n = a + \alpha_n$ и $b_n = b + \beta_n$. Тогда:

(1) $\alpha_n \pm \beta_n = (a_n - a) \pm (b_n - b) = (a_n \pm b_n) - (a \pm b)$ – бесконечно малая, поэтому $a \pm b$ – предел $\{a_n \pm b_n\}$;

(2) по (1):
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a \cdot b + a \cdot \beta_n + b \cdot \alpha_n + \alpha_n \cdot \beta_n) = a \cdot b + a \cdot \lim_{n\to\infty}\beta_n + b \cdot \lim_{n\to\infty}\alpha_n + \lim_{n\to\infty}(\alpha_n \cdot \beta_n) = a \cdot b,$$
так как $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ – бесконечно малая;

(3) Заметим, что
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b}{a}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a \cdot b + a \cdot \beta_n - a \cdot b - b \cdot \alpha_n}{a \cdot a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a \cdot \beta_n - b \cdot \alpha_n}{a \cdot a_n} = 0,$$
так как $\{a \cdot \beta_n - b \cdot \alpha_n\}$ – бесконечно малая, а $\left\{\dfrac{1}{a \cdot a_n}\right\}$ – ограничена. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{b}{a}$.

◀

Теорема 2.3.2. (Лемма о зажатой переменной). *Пусть для всех натуральных n выполнено неравенство*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n.$$

Тогда если последовательности $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ сходятся к одному и тому же числу d, то последовательность $\{b_n\}$ также сходится, причем к тому же числу d.

► Для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$ число d является пределом, если и только если:

для любого $\varepsilon > 0$ существуют номера $n_1 = n_1(\varepsilon)$, $n_2 = n_2(\varepsilon)$ такие, что

для всех $n > n_1$ выполнено $|a_n - d| < \varepsilon$, а для всех $n > n_2$ – соответственно $|c_n - d| < \varepsilon$.

Выбрав $N = N(\varepsilon) = \max\{n_1, n_2\}$, получим, что для всех $n > N$

$$d - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < d + \varepsilon \implies |b_n - d| < \varepsilon,$$

что означает, что d – предел для $\{b_n\}$. ◄

Теорема 2.3.3. *Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, причем для всех натуральных n выполнено $a_n \leqslant b_n$. Тогда $a \leqslant b$.*

► Пусть это не так. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b > 0$. По определению предела для $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ выполнено

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| < \frac{a-b}{2} \iff 0 < \frac{a-b}{2} < a_n - b_n < \frac{3(a-b)}{2}.$$

Но отсюда сразу следует, что для всех $n > N$ верно $a_n - b_n > 0 \iff a_n > b_n$ – противоречие. ◄

Заметим, что даже если для всех n верно $a_n < b_n$, утверждать, что $a < b$, нельзя.

Пример 2.3.4. Пусть $a_n = \dfrac{1}{n}$, а $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Тогда очевидно, что обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к одному и тому же числу 0, но в то же время при всех натуральных n верно $a_n < b_n$.

§2.4. Монотонные последовательности. Число Эйлера e.

Определение 2.4.1. Последовательность $\{a_n\}$ называется возрастающей (строго возрастающей, убывающей, строго убывающей), если для всех натуральных n верно $a_n \leqslant a_{n+1}$ (соответственно, $a_n < a_{n+1}$, $a_n \geqslant a_{n+1}$, $a_n > a_{n+1}$).

Теорема 2.4.2. (Вейерштрасса о монотонных последовательностях). *Всякая возрастающая (убывающая) последовательность $\{a_n\}$ имеет предел: конечный, если $\{a_n\}$ ограничена сверху (снизу), и бесконечный иначе.*

► Проведем доказательство для возрастающих последовательностей.

Пусть $\{a_n\}$ – монотонна и ограничена сверху. Тогда существует точная верхняя грань $a = \sup\limits_n\{a_n\}$, для которой выполнены условия:

для всех натуральных n выполнено $a_n \leqslant a$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $a_N > a - \varepsilon$.

Но в силу монотонности неравенство $a_n (\geqslant a_N) > a - \varepsilon$ верно и для всех $n > N$. А так как число $a + \varepsilon > a$ также ограничивает $\{a_n\}$ сверху, заключаем, что для всех $n > N$ верно $|a_n - a| < \varepsilon$, что означает, что a – предел для $\{a_n\}$.

Если же предположить, что $\{a_n\}$ не ограничена сверху, то необходимо выполнено следующее условие:

для любого $A > 0$ существует $N = N(A)$ такой, что $a_N > A$.

И снова в силу монотонности это неравенство будет верно и для всех $n > N$, что означает, что $\{a_n\}$ – бесконечно большая (имеет бесконечный предел). ◄

Следствие 2.4.3. *Монотонная последовательность сходится, если и только если она ограничена.*

Для доказательства следующей теоремы нам потребуется некоторый теоретико-числовой результат.

Лемма 2.4.4. (Теорема Бернулли). *Для любого натурального n и любого $\alpha > -1$ справедливо неравенство*

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n.$$

► Проведем доказательство индукцией по n. При $n = 1$ имеем тривиальный результат $1 + \alpha \geqslant 1 + \alpha$.

Пусть утверждение доказано для некоторого N. Тогда:

$$(1+\alpha)^{N+1} \; = \; (1+\alpha)^N(1+\alpha) \geqslant (1+\alpha N)(1+\alpha) \; = \; 1 + \alpha N + \alpha + \alpha^2 N \geqslant 1 + \alpha(N+1).$$

◄

Теорема 2.4.5. *У последовательности* $a_n \; = \; \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ *существует конечный предел, лежащий на отрезке* $[2, 4]$.

Этот предел мы будем обозначать буквой e.

► Рассмотрим вспомогательную последовательность $b_n \; = \; \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ и докажем следующие утверждения.

(1) Последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает.
В самом деле, по теореме Бернулли

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \; = \; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)} \; = \; \frac{(n+1)^n(n-1)^{n-1}}{n^{n+n-1}} \; = \; \frac{n}{n-1}\left[\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right]^n \; = \; \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \; \geqslant$$
$$\geqslant \frac{n}{n-1}\left(1 - n\cdot\frac{1}{n^2}\right) \; = \; \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} \; = \; 1 \implies \text{для всех } n \geqslant 2 \text{ выполнено } a_n \geqslant a_{n-1}.$$

(2) Последовательность $\{b_n\}$ монотонно убывает.
Аналогично (1),

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} \; = \; \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \; = \; \frac{n^{n+n+1}}{(n+1)^{n+1}(n-1)^n} \; = \; \frac{n-1}{n}\left[\frac{n^2}{(n+1)(n-1)}\right]^{n+1} \; = \; \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \; \geqslant$$
$$\geqslant \frac{n-1}{n}\left(1 + (n+1)\cdot\frac{1}{n^2-1}\right) \; = \; \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n-1} \; = \; 1 \implies \text{для всех } n \geqslant 2 \text{ выполнено } b_n \leqslant b_{n-1}.$$

(3) Последовательность $\{a_n\}$ ограничена.
Действительно, в силу монотонности для всех натуральных n верны неравенства

$$a_n \geqslant a_1 \; = \; 2 \quad \text{и} \quad b_n \leqslant b_1 \; = \; 4.$$

Кроме того, очевидно, что $a_n < b_n$. Это дает оценку $2 \leqslant a_n < b_n \leqslant 4$, верную при всех n.

По теореме Вейерштрасса у последовательности $\{a_n\}$ существует конечный предел. ◄

Заметим, что из проведенных рассуждений видно, что и у последовательности $\{b_n\}$ по теореме Вейерштрасса существует конечный предел; установим, чему он равен:

$$\lim_{n\to\infty} b_n \;=\; \lim_{n\to\infty}\left[a_n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) \;=\; e\cdot 1 \;=\; e.$$

То есть пределы $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ равны. Это, в частности, означает, что число e можно было строить как элемент пересечения стягивающейся системы вложенных отрезков:

$$e \;=\; \bigcap_{k=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right].$$

§2.5. Подпоследовательности. Частичные пределы.

Определение 2.5.1. Пусть $\{a_n\}$ – последовательность, а $\{n_k\}$ – строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Тогда последовательность $\{a_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью в $\{a_n\}$.

Теорема 2.5.2. (Больцано-Вейерштрасса). *Если последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то в ней можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а если неограничена – то бесконечно большую подпоследовательность.*

► Пусть $\{a_n\}$ ограничена. Выберем для $\{a_n\}$ универсальные ограничивающие константы c_1 и C_1. Построим систему вложенных отрезков по следующему правилу:

на $k-$том шаге отрезок $[c_k, C_k]$ разделим на 2 равные части и примем за $[c_{k+1}, C_{k+1}]$ ту его половину, в которой содержится бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$.

Полученная система вложенных отрезков $[c_1, C_1] \supset [c_2, C_2] \supset \ldots$ будет стягивающейся, поскольку

$$C_k - c_k \;=\; \frac{C_1 - c_1}{2^k} \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, в пересечении $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}[c_k, C_k]$ лежит единственная точка $c \;=\; \sup\limits_k c_k \;=\; \inf\limits_k C_k$.

Выберем строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$ так, что $a_{n_k}\in[c_k, C_k]$. Тогда для всех натуральных k выполнено $c_k \leqslant a_{n_k} \leqslant C_k$ и, поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} c_k \;=\; \lim\limits_{k\to\infty} C_k \;=\; c$, по теореме о зажатой функции c – предел и для $\{a_{n_k}\}$.

Теперь предположим, что $\{a_n\}$ неограничена, то есть для любого $A > 0$ существует номер $N \;=\; N(A)$ такой, что $|a_N| > A$. Построим строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$ так, что $|a_{n_k}| > k$, тогда для подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ имеем:

для любого $A > 0$ существует номер $N \;=\; N(A) > A$ такой, что для всех $k > N$ выполнено $|a_{n_k}| > k > N > A$.

Это и означает, что $\{a_{n_k}\}$ – бесконечно большая. ◄

Определение 2.5.3. Число a (или символ ∞) называется частичным пределом последовательности $\{a_n\}$, если в ней существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, сходящаяся к a (соответственно, бесконечно большая подпоследовательность).

Теорема Больцано-Вейерштрасса утверждает, что множество $\mathfrak{H}(\{a_n\})$ всех частичных пределов последовательности $\{a_n\}$ непусто.

Лемма 2.5.4. (Критерий частичного предела). *Число α является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$, если и только если в любой окрестности числа α содержится элемент последовательности.*

► Пусть α – предел некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ в $\{a_n\}$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $K \;=\; K(\varepsilon)$ такой, что для всех $k > K$ выполнено

$$|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon \iff \alpha - \varepsilon < a_{n_k} < \alpha + \varepsilon.$$

То есть лишь конечное число элементов $\{a_{n_k}\}$ (а, значит, и всей последовательности $\{a_n\}$) не лежит в выбранной $\varepsilon-$окрестности числа α. Это равносильно утверждению леммы.

Теперь пусть число α таково, что в любой его $\varepsilon-$окрестности содержится элемент из $\{a_n\}$. Построим строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$ так, что при всех k выполнено

$$|a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \iff \alpha - \frac{1}{k} < a_{n_k} < \alpha + \frac{1}{k}.$$

По теореме о зажатой переменной заключаем отсюда, что существует предел последовательности $\{a_{n_k}\}$, равный α, то есть α – частичный предел. ◀

Лемма 2.5.5. *Последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу a, если и только если она ограничена и $\mathfrak{H}(\{a_n\}) = \{a\}$.*

► Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. По необходимому признаку $\{a_n\}$ ограничена.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для последовательности $\{a_n\}$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что что для всех $n > N$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$.

Выберем строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$, тогда существует номер $K = K(\varepsilon)$ такой, что для всех $k > K$ выполнено $n_k > n_K > N$. А тогда для всех $k > K$ имеем $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, что в силу произвольного выбора ε означает сходимость любой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ к числу a.

Теперь пусть $\{a_n\}$ ограничена и имеет единственный частичный предел a. Выберем универсальные ограничивающие константы $m = \inf\limits_n a_n$ и $M = \sup\limits_n a_n$, тогда в силу предельного перехода выполнено $m \leqslant a \leqslant M$.

Предположим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq a$. Это значит, что существует $\varepsilon-$окрестность точки a, вне которой, то есть на множестве

$$[m, a-\varepsilon] \cup [a+\varepsilon, M],$$

лежит бесконечно много элементов последовательности. Без ограничения общности, это отрезок $[a+\varepsilon, M]$.

Тогда в $\{a_n\}$ можно выделить подпоследовательность, целиком лежащую на отрезке $[a+\varepsilon, M]$, и по теореме Больцано-Вейерштрасса уже из нее можно выделить новую подпоследовательность, сходящуюся к числу $b \in [a+\varepsilon, M]$, очевидно, не равному a – противоречие. ◀

Определение 2.5.6. Точная верхняя грань множества $\mathfrak{H}(\{a_n\})$ называется верхним пределом последовательности $\{a_n\}$

$$(\text{обозначение:} \quad \varlimsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{или} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n),$$

а точная нижняя грань – соответственно нижним пределом

$$(\text{обозначение:} \quad \varliminf_{n\to\infty} a_n \quad \text{или} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n),$$

Теорема 2.5.7. *Верхний и нижний пределы последовательности $\{a_n\}$ являются ее частичными пределами.*

► Проведем доказательство для верхнего предела.

Число α является верхним пределом, если и только если выполнены 2 условия:

для всех $p \in \mathfrak{H}(\{a_n\})$ выполнено $p \leqslant \alpha$ и для любого $\alpha' < \alpha$ существует $p' = p'(\alpha') \in \mathfrak{H}(\{a_n\})$ такое, что $p' > \alpha'$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, положим $\alpha' = \alpha - \varepsilon$ и выберем $p' \in \mathfrak{H}(\{a_n\})$, $p' \in (\alpha', \alpha)$.

Подберем такое δ, что $U_\delta(p') \subset (\alpha', \alpha)$. По критерию частичного предела в $U_\delta(p')$ содержится некоторый элемент исходной последовательности $\{a_n\}$, который, очевидно, содержится и в (α', α).

В силу произвольного выбора ε по тому же критерию заключаем, что α – частичный предел для $\{a_n\}$. ◀

§2.6. Критерий Коши сходимости последовательности.

Определение 2.6.1. Последовательность $\{a_n\}$ называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любых $n > m > N$ выполнено $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Теорема 2.6.2. (Критерий Коши). *Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, если и только если она фундаментальна.*

► Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Запишем определение в следующем виде:

для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что:

для любого $n > N$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$ и для любого $m > N$ выполнено $|a_m - a| < \varepsilon$

(здесь 2 раза записано одно и то же условие). Без ограничения общности, можно выбрать $n > m$, тогда при всех $n > m > N$ имеем

$$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - a| + |a_n - a| < 2\varepsilon,$$

что означает фундаментальность $\{a_n\}$.

Пусть теперь последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна. Докажем следующие утверждения.

(1) $\{a_n\}$ ограничена.

Возьмем $\varepsilon = 1$ и найдем такое N, что для всех $n > m > N$ выполнено $|a_n - a_m| < 1$. Зафиксируем $m = N + 1$, тогда для всех $n > N$ имеем

$$|a_n - a_{N+1}| < 1 \iff a_{N+1} - 1 < a_n < a_{N+1} + 1$$

Тогда в качестве универсальных ограничивающих констант выберем числа

$$c = \min\{a_{N+1} - 1,\ a_1, a_2, \ldots, a_N\} \quad \text{и} \quad C = \max\{a_{N+1} + 1,\ a_1, a_2, \ldots, a_N\},$$

и очевидно, что для всех n выполнено $c < a_n < C$.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из последовательности $\{a_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторому числу a.

(2) $\{a_n\}$ сама сходится к a.

Запишем определение предела для последовательности $\{a_{n_k}\}$:

для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $K = K(\varepsilon)$ такой, что для любых $k > K$ выполнено $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Далее, в определении фундаментальности $\{a_n\}$ обозначим $m = n_k$ и выберем $N_0 = N_0(\varepsilon) = \max\{N, K\}$. Тогда для всех $n > N_0$ имеем

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < 2\varepsilon,$$

откуда следует сходимость $\{a_n\}$ к числу a.

◄

§2.7. Понятие числового ряда. Признак сравнения рядов.

Определение 2.7.1. Числовым рядом называется упорядоченная пара последовательностей

$$\left(\ \{a_k\},\ \{S_k \coloneqq a_1 + \ldots + a_k\}\ \right),$$

где элементы $\{a_k\}$ называются членами числового ряда, а элементы $\{S_k\}$ – частичными суммами числового ряда.

Интуитивно под числовым рядом понимается формальная запись

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \ = \ a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$$

Определение 2.7.2. Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится к сумме S, если S – конечный предел последовательности частичных сумм. Иначе говорят, что ряд расходится.

Теорема 2.7.3. (Критерий Коши). *Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любых $n > N$ и $p > 0$ выполнено*

$$|S_{n+p} - S_n| \ = \ \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

► Тривиальным образом следует из критерия Коши для последовательности частичных сумм. ◄

Теорема 2.7.4. (Признак сравнения). *Пусть $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ – два ряда, причем для любого k выполнено*

$$0 \leqslant a_k \leqslant C b_k.$$

Тогда из сходимости ряда B следует сходимость ряда A, а из расходимости ряда A – расходимость ряда B.

► Докажем первую часть утверждения; вторая доказывается аналогично.

Применим критерий Коши к сходящемуся ряду B:

по $\varepsilon > 0$ найдем номер N, что для любых $n > N$ и $p > 0$ выполнено

$$\sum_{k=n}^{n+p} b_k < \varepsilon.$$

Но по условию $a_k \leqslant C b_k$, поэтому

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k \leqslant C \sum_{k=n}^{n+p} b_k < C\varepsilon,$$

поэтому по критерию Коши ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ◄

Следствие 2.7.5. *Если существуют положительные константы C_1, C_2 такие, что для всех натуральных k выполнено*

$$C_1 a_k \leqslant b_k \leqslant C_2 a_k,$$

то ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

► В самом деле, это следует из оценок

$$a_k \leqslant C_2 b_k \quad \text{и} \quad b_k \leqslant \frac{1}{C_1} a_k$$

по признаку сравнения. ◄

Глава 3. Предел функции.

§3.1. Определения предела функции по Коши и по Гейне, их эквивалентность.

Определение 3.1.1. Число a является пределом функции $f = f(x)$ в точке x_0 в смысле Коши, если

для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всякого x из проколотой окрестности

$$\mathring{U}_\delta(x_0) \overset{\text{def}}{=\!=} (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

значение $f(x)$ лежит в проколотой окрестности $\mathring{U}_\varepsilon(a)$.

Определение 3.1.2. Число a является пределом функции $f = f(x)$ в точке x_0 в смысле Гейне, если

для любой сходящейся к x_0 последовательности $\{x_n\} \subset D(f) \setminus \{x_0\}$ последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

Теорема 3.1.3. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

► Пусть a – предел функции $f = f(x)$ в точке x_0 в смысле Коши. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ из определения Гейне и покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Переформулируем определение предела для последовательности $\{x_n\}$ в следующем виде:

для всякого $\delta > 0$ существует номер $N = N(\delta)$ такой, что для всех $n > N$ выполнено $x_n \in \mathring{U}_\delta(x_0)$.

Из определения Коши тогда для всех $n > N$ имеем $f(x_n) \in \mathring{U}_\varepsilon(a)$, откуда заключаем, что a – предел для $\{f(x_n)\}$.

Теперь пусть a – предел f в точке x_0 в смысле Гейне, но не в смысле Коши. Это значит, что

существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $\delta > 0$ существует $x = x(\delta) \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ такой, что $f(x) \notin \mathring{U}_\varepsilon(a)$.

Возьмем $\delta = \dfrac{1}{n}$, тогда для любого натурального n существует $x_n \in \mathring{U}_{1/n}(x_0)$ такой, что $f(x_n) \notin \mathring{U}_\varepsilon(a)$. Другими словами, последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0, но последовательность $\{f(x_n)\}$ не сходится к a – противоречие. ◄

Обозначение: $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Определение 3.1.4. Число a является пределом функции $f = f(x)$ на плюс-бесконечности

$$(\text{обозначение: } a = \lim_{x\to+\infty} f(x)),$$

если:

(1) существует $A > 0$ такое, что $(A, +\infty) \subset D(f)$;

(2a) (Коши) для любого $\varepsilon > 0$ существует $B = B(\varepsilon)$ такое, что для всех $x > B$ выполнено $f(x) \in \mathring{U}_\varepsilon(a)$;

(2b) (Гейне) для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к $+\infty$, $\{f(x_n)\}$ сходится к a.

§3.2. Простейшие свойства пределов функций. Беск. малые и беск. большие функции.

Лемма 3.2.1. *Если функция $f = f(x)$ имеет предел a (конечный или бесконечный) в точке x_0, то он единственен.*

► Пусть $a' \neq a$ – еще один предел f в точке x_0.

Возьмем произвольную последовательность Гейне $\{x_n\}$, тогда по определению a и a' – пределы последовательности $\{f(x_n)\}$. Но предел последовательности единственен – противоречие. ◀

Лемма 3.2.2. *Если функция $f = f(x)$ имеет конечный предел a в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности точки a.*

► Согласно определению по Коши, для $\varepsilon = 1$ существует $\delta > 0$ такая, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполнено $|f(x) - a| < 1$. Но тогда

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - a| + |a| < 1 + |a|,$$

то есть f ограничена в окрестности $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(a)$. ◀

Лемма 3.2.3. *Если $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то предел $|f|$ в точке x_0 существует и равен $|a|$.*

► Возьмем произвольную последовательность Гейне $\{x_n\}$, для которой согласно определению выполнено $a = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

Из теории последовательностей известно, что в таком случае $|a| = \lim\limits_{n \to \infty} |f(x_n)|$, откуда непосредственно следует сходимость $|f|$ к $|a|$ в точке x_0 в смысле Гейне. ◀

Теорема 3.2.4. (Лемма о сохранении знака). *Пусть $a \neq 0$ – предел функции $f = f(x)$ в точке x_0. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполнено*

$$f(x) > \frac{a}{2} \cdot \operatorname{sgn} a.$$

► По определению предела для $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ выполнено

$$|f(x) - a| < \frac{|a|}{2} \iff a - \frac{|a|}{2} < f(x) < a + \frac{|a|}{2}.$$

Если $a > 0$, то из левого неравенства следует, что $\dfrac{a}{2} < f(x)$, а если $a < 0$, то из правого неравенства следует, что $f(x) < \dfrac{a}{2}$ при всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$. Обобщая, получаем утверждение теоремы. ◀

Определение 3.2.5. Функция $f = f(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0, если ее предел в этой точке равен 0.

Теорема 3.2.6. *Пусть функции $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ – бесконечно малые в точке x_0, а функция $c = c(x)$ – ограничена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}_\gamma(x_0)$ для некоторого γ. Тогда в этой окрестности бесконечно малыми являются функции $\alpha \pm \beta$, $c \cdot \alpha$ и $\alpha \cdot \beta$.*

► Запишем определения предела в точке x_0 для функций α и β:

для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_\alpha = \delta_\alpha(\varepsilon) < \gamma$, $\delta_\beta = \delta_\beta(\varepsilon) < \gamma$ такие, что

для всех $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_\alpha}(x_0)$ выполнено $|\alpha(x) - 0| = |\alpha(x)| < \varepsilon$, а для всех $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_\beta}(x_0)$ – соответственно $|\beta(x)| < \varepsilon$.

Обозначив $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_\alpha, \delta_\beta\}$, получим, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$ одновременно $|\alpha(x)| < \varepsilon$ и $|\beta(x)| < \varepsilon$. А тогда

$$|\alpha(x) \pm \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| < 2\varepsilon,$$

откуда $\alpha \pm \beta$ – тоже бесконечно малая.

Далее, пусть C – ограничивающая по модулю в окрестности x_0 функцию c константа, тогда при $x \in \overset{\circ}{U}_{\delta_\alpha}(x_0)$

$$|c(x) \cdot \alpha(x)| \leqslant C \cdot |\alpha(x)| < C \cdot \varepsilon,$$

откуда $c \cdot \alpha$ – бесконечно малая.

Наконец, поскольку имеющая в точке x_0 предел функция α ограничена, из только что доказанного сразу же следует, что $\alpha \cdot \beta$ – также бесконечно малая. ◀

Центральной теоремой о бесконечно малых, как и в случае последовательностей, является

Теорема 3.2.7. (Лемма о бесконечно малой). *Функция $f = f(x)$ имеет в точке x_0 предел a, если и только если существует такое $\gamma > 0$ и такая бесконечно малая в точке x_0 функция $\alpha = \alpha(x)$, что для всех $x \in \mathring{U}_\gamma(x_0)$ имеет место представление*

$$f(x) = \alpha(x) + a.$$

► Пусть a – предел f в точке x_0. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ выполнено $|f(x) - a| < \varepsilon$. Обозначим $\alpha(x) = f(x) - a$, тогда условие $|\alpha(x)| < \varepsilon$ при $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ означает, что функция $\alpha = \alpha(x)$ – бесконечно малая в точке x_0. Выбрав

$$\gamma = \inf_{\varepsilon} \delta(\varepsilon),$$

получим, что в $\mathring{U}_\gamma(x_0)$ имеет место искомое разложение.

Теперь пусть в $\mathring{U}_\gamma(x_0)$ имеет место разложение $f = \alpha + a$, где функция α – бесконечно малая в точке x_0. По определению для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) < \gamma$ такой, что для всех $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ выполнено $|\alpha(x)| = |f(x) - a| < \varepsilon$, поэтому a – предел f в точке x_0. ◀

Определение 3.2.8. Функция $f = f(x)$ называется бесконечно большой в точке x_0, если для любого $A > 0$ существует $\delta = \delta(A)$ такое, что для всех для всех $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ выполнено $|f(x)| > A$.

Для бесконечно большой в точке x_0 функции говорят также, что ее предел равен ∞.

§3.3. Арифметические свойства пределов. Предел сложной функции.

Теорема 3.3.1. *Пусть $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $b = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$. Тогда:*

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x))$ *существует и равен $a \pm b$;*

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x))$ *существует и равен $a \cdot b$*

(3) *если $a \neq 0$ и для некоторого γ для всех $x \in \mathring{U}_\gamma(x_0)$ выполнено $f(x) \neq 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ существует и равен $\dfrac{b}{a}$.*

► По лемме о бесконечно малой подберем $\gamma_0 < \gamma$ и бесконечно малые в точке x_0 функции $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$, что в $\mathring{U}_{\gamma_0}(x_0)$ имеют место разложения $f = \alpha + a$ и $g = \beta + b$. Тогда:

(1) $\alpha \pm \beta = (f - a) \pm (g - b) = (f \pm g) - (a \pm b)$ – бесконечно малая в точке x_0, поэтому $a \pm b$ – предел $f \pm g$ в точке x_0;

(2) по (1):

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} (a \cdot b + a \cdot \beta(x) + b \cdot \alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)) = a \cdot b + a \cdot \lim_{x \to x_0} \beta(x) + b \cdot \lim_{x \to x_0} \alpha(x) + \lim_{x \to x_0} (\alpha(x) \cdot \beta(x)) = a \cdot b,$$

так как $\alpha \cdot \beta$ – бесконечно малая в точке x_0;

(3) Заметим, что

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(x)}{f(x)}-\frac{b}{a}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{a\cdot b+a\cdot\beta(x)-a\cdot b-b\cdot\alpha(x)}{a\cdot f(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{a\cdot\beta(x)-b\cdot\alpha(x)}{a\cdot f(x)} = 0,$$

так как $a\cdot\beta-b\cdot\alpha$ – бесконечно малая в точке x_0, а $\dfrac{1}{a\cdot f}$ – ограничена в некоторой подокрестности $\mathring{U}_{\gamma_0}(x_0)$.

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{b}{a}$.

◀

Теорема 3.3.2. *Пусть функции*

$$f:\ X\to Y \qquad \text{и} \qquad g:\ Y\to Z$$

таковы, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *существует и равен* y_0, $\lim\limits_{y\to y_0} g(y)$ *существует и равен* z_0 *и, кроме того, существует* $\gamma>0$ *такое, что для всех* $x\in\mathring{U}_\gamma(x_0)$ *выполнено* $f(x)\neq y_0$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to x_0}(g\circ f)(x)$ *существует и равен* z_0.

▶ Запишем определения предела для функции g в точке y_0:

для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $y\in\mathring{U}_\delta(y_0)$ выполнено $|g(y)-z_0|<\varepsilon$;

Теперь для выбранного $\delta>0$ выберем такое $\sigma<\gamma$, что для всех $x\in\mathring{U}_\sigma(x_0)$ выполнено

$$|f(x)-y_0|<\delta \iff f(x)\in\mathring{U}_\delta(y_0).$$

Комбинируя полученные утверждения, получим, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\sigma>0$ такое, что для всех $x\in\mathring{U}_\sigma(x_0)$ выполнено $f(x)\in\mathring{U}_\delta(y_0)$, поэтому $|g(f(x))-z_0|<\varepsilon$. Таким образом, предел $g\circ f$ в точке x_0 существует и равен z_0. ◀

Отметим, что из существования предела функции g в точке y_0 не следует, что значение $g(y_0)$ определено, а если и так, то никаких условий на него не накладывается. Поэтому условие $f(x)\neq y_0$ в окрестности точки y_0 существенно. Однако от него можно отказаться, если функция g определена в точке y_0 и $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0)$.

§3.4. Предельный переход в неравенствах.

Теорема 3.4.1. (Лемма о зажатой функции). *Пусть для функций* $f = f(x)$, $g = g(x)$ *и* $h = h(x)$ *существует* $\gamma>0$ *такое, что для всех* $x\in\mathring{U}_\gamma(x_0)$ *выполнено*

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x).$$

Тогда если функции f *и* g *имеют в точке* x_0 *предел, равный* a, *то функция* h *также имеет в точке* x_0 *предел, равный* a.

▶ Из определения предела по Гейне для любой последовательности $\{x_n\}\subset\mathring{U}_\gamma(x_0)$, сходящейся к x_0, выполнено

$$f(x_n)\leqslant h(x_n)\leqslant g(x_n) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = a.$$

Тогда по лемме о зажатой переменной предел $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)$ существует и равен a, и в силу произвольного выбора последовательности x_n заключаем, что $a = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$. ◀

Теорема 3.4.2. *Пусть* $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $b = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ *и существует* $\gamma>0$ *такое, что для всех* $x\in\mathring{U}_\gamma(x_0)$ *выполнено* $f(x)\leqslant g(x)$. *Тогда* $a\leqslant b$.

► Для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathring{U}_\gamma(x_0)$, сходящейся к x_0, выполнены свойства:

$$f(x_n) \leqslant g(x_n) \quad , \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) \;=\; a \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) \;=\; b.$$

Стало быть, по аналогичной теореме для последовательностей верно неравенство $a \leqslant b$. ◄

§3.5. Критерий Коши существования предела функции.

Теорема 3.5.1. (Критерий Коши). *Функция $f = f(x)$ имеет в точке x_0 конечный предел a, если и только если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \;=\; \delta(\varepsilon)$ такое, что для всяких $x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ выполнено $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.*

► Пусть $a \;=\; \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \;=\; \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$ выполнено

$$|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда если $x', x'' \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, то

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - a| + |f(x'') - a| < \varepsilon.$$

Теперь пусть выполнено обратное утверждение. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$ из определения Гейне. Условие $x_0 \;=\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ означает, что для любого $\delta > 0$ существует номер $N \;=\; N(\delta)$ такой, что для всех $n > N$ выполнено $|x_n - x_0| < \delta$. А тогда для любых $n > m > N$ имеем:

$$x_n, x_m \in \mathring{U}_\delta(x_0) \implies |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon,$$

откуда по критерию Коши для последовательностей заключаем, что последовательность $f(x_n)$ сходится к некоторому числу a. Осталось показать, что значение a не зависит от выбора последовательности x_n.

Пусть последовательность $\{y_n\}$, также удовлетворяющая условиям Гейне, такова, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) \;=\; b$. Построим новую последовательность $\{z_n\}$ по правилу

$$z_{2k} \;=\; y_k, \quad z_{2k-1} \;=\; x_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда для последовательности $\{z_n\}$, также удовлетворяющей условиям Гейне, справедливы рассуждения выше, согласно которым последовательность $\{f(z_n)\}$ является сходящейся. Но числа a и b – ее частичные пределы. Значит, $a = b$, и функция f имеет в точке x_0 предел, равный a. ◄

§3.6. Односторонние пределы.

Определение 3.6.1. Число a называется правым (левым) односторонним пределом функции $f = f(x)$ в точке x_0

(обозначение: $a = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ для правого предела и $a = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ для левого предела),

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \;=\; \delta(\varepsilon)$ такое, что $f(x) \in \mathring{U}_\varepsilon(a)$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (соответственно, для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$).

Теорема 3.6.2. *Функция $f \;=\; f(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный a, если и только если у нее существуют оба односторонних предела в точке x_0, равных a.*

► Пусть $a \;=\; \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. По определению для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \;=\; \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех

$$x \in \mathring{U}_\delta(x_0) \;=\; (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

выполнено $f(x) \in \mathring{U}_\epsilon(a)$, откуда немедленно следует существование и равенство a обоих односторонних пределов.

Теперь пусть $a = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ такие, что

$$\text{для всех } x \in (x_0, x_0+\delta_1) \text{ и для всех } x \in (x_0-\delta_2, x_0) \text{ выполнено } f(x) \in \mathring{U}_\varepsilon(a).$$

Обозначим $\delta = \delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда $f(x) \in \mathring{U}_\varepsilon(a)$ для всех $x \in \mathring{U}_\delta(x_0)$, откуда по определению предел функции f в точке x_0 существует и равен a. ◀

§3.7. Предел монотонных функций.

Определение 3.7.1. Функция $f = f(x)$, определенная на множестве E, называется возрастающей (строго возрастающей, убывающей, строго убывающей) на нем, если для любых $x_1, x_2 \in E$ таких, что $x_1 < x_2$, верно $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно, $f(x_1) < f(x_2)$, $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, $f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема 3.7.2. *Пусть функция $f = f(x)$ монотонна на интервале (a, b) (конечном или бесконечном). Тогда для любой внутренней точки $c \in (a, b)$ существуют оба односторонних предела, причем конечных, а в граничных точках a и b – соответственно правый и левый пределы (уже не обязательно конечные).*

▶ Без ограничения общности, пусть f возрастает на (a, b).

Для любого $x \in (a, c)$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(c)$, поэтому у множества значений функции f на интервале (a, c) есть конечная точная верхняя грань, причем существует такое $\delta_1 > 0$, что

$$M = \sup_{x\in(a,c)} f(x) \in [f(a+\delta_1), f(c)].$$

Но по определению числа M для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $x_\varepsilon \in (a, c)$ такая, что $f(x_\varepsilon) \in (M - \varepsilon, M]$, и в силу монотонности функции f для любого $x \in (x_\varepsilon, c)$ справедливы неравенства

$$M - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leqslant f(x) \leqslant f(c),$$

что по определению означает существование левый предела

$$\lim_{x\to c-0} f(x) = M \in [f(a+\delta), f(c)].$$

Аналогичными рассуждениями устанавливается, что существует правый предел

$$\lim_{x\to c+0} f(x) = \inf_{x\in(c,b)} f(x) \in [f(c), f(b-\delta_2)], \quad \delta_2 > 0.$$

Теперь рассмотрим односторонние пределы в концах интервала (a, b). Проведем доказательство для точки b, для точки a доказательство аналогично.

Если

$$\sup_{x\in(a,b)} f(x) = B < \infty,$$

то, очевидно, существует левый предел

$$\lim_{x\to b-0} f(x) = B.$$

Если же $\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x) = +\infty$, то для любого $A > 0$ существует точка $x_A \in (a, b)$ такая, что $f(x_A) > A$, и в силу монотонности функции f для всех $x \in (x_A, b)$ имеем

$$A < f(x_A) \leqslant f(x),$$

откуда заключаем, что левый предел f в точке b равен $+\infty$. ◀

Следствие 3.7.3. *Монотонная на интервале (a, b) функция $f = f(x)$ ограничена на нем, если и только если ее односторонние пределы в граничных точках интервала конечны.*

► Снова ограничимся лишь возрастающими функциями. По доказанной теореме:

$$\lim_{x\to b-0} f(x) \;=\; \sup_{x\in(a,b)} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) \;=\; \inf_{x\in(a,b)} f(x),$$

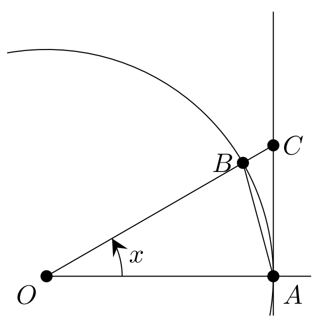
поэтому условие конечности односторонних пределов f в точках a и b равносильно конечности точной верхней и точной нижней граней множества значений f на (a, b), что, очевидно, в свою очередь равносильно ее ограниченности на этом интервале. ◄

§3.8. Первый и второй замечательные пределы.

Теорема 3.8.1. (Первый замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \;=\; 1.$$

► Предложим геометрическое доказательство теоремы.



Рассмотрим единичную окружность с центром O.

Зафиксируем некоторый луч OA и будем откладывать от него луч OB против часовой стрелки; обозначим за $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ угол между OB и OA.

Дополнительно проведем касательную к окружности в точке A и обозначим за C точку ее пересечения с лучом OB.

Если обозначить через S площадь сектора AOB, то очевидны неравенства

$$S(\triangle AOB) < S < S(\triangle AOC) \iff \frac{1}{2}\cdot\sin x < \frac{1}{2}\cdot x < \frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg} x \iff 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Это неравенство доказано для $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, однако в силу четности всех входящих в него функций оно оказывается верным и для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Тогда, переходя к пределу в проколотой окрестности $\mathring{U}_{\pi/2}(0)$, имеем:

$$1 \;=\; \lim_{x\to 0}\cos x \leqslant \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \implies \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \;=\; 1.$$

◄

Теорема 3.8.2. (Второй замечательный предел).

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \;=\; e.$$

► Сначала предположим, что $x > 0$.

(1) Получим оценку сверху:

$$(1+x)^{1/x} \;=\; \left(1+\frac{1}{1/x}\right)^{1/x} \leqslant \left(1+\frac{1}{\lfloor 1/x\rfloor}\right)^{\lfloor 1/x\rfloor+1} \;=\; \left(1+\frac{1}{\lfloor 1/x\rfloor}\right)^{\lfloor 1/x\rfloor}\left(1+\frac{1}{\lfloor 1/x\rfloor}\right).$$

Обозначим натуральное число $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ за n, тогда при $x \to 0$ $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right) \;=\; e\cdot 1 \;=\; e.$$

(2) Получим оценку снизу:

$$(1+x)^{1/x} \;=\; \left(1+\frac{1}{1/x}\right)^{1/x} \geqslant \left(1+\frac{1}{1/x}\right)^{\lfloor 1/x\rfloor} \;=\; \left(1+\frac{1}{\lfloor 1/x\rfloor+1}\right)^{\lfloor 1/x\rfloor+1} \left(1+\frac{1}{\lfloor 1/x\rfloor+1}\right)^{-1}.$$

Обозначим натуральное число $\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor + 1$ за n, тогда при $x \to 0$ $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \;=\; e\cdot 1 \;=\; e.$$

Переходя к пределу в точке 0, заключаем, что

$$\lim_{x\to 0+} (1+x)^{1/x} \;=\; e.$$

Теперь пусть $x < 0$. В этом случае

$$(1+x)^{1/x} \;=\; (1-|x|)^{-1/|x|} \;=\; \left(\frac{1}{1-|x|}\right)^{1/|x|} \;=\; \left(1+\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{1/|x|} \;=\; \left(1+\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{\frac{1-|x|}{|x|}} \left(1+\frac{|x|}{1-|x|}\right).$$

Обозначим $\dfrac{|x|}{1-|x|} \;=\; y$. Ясно, что $y > 0$ при достаточно малых x и при $x \to 0$ $y \to 0$, поэтому можно применить уже доказанное:

$$\lim_{x\to 0-} (1+x)^{1/x} \;=\; \lim_{y\to 0+} (1+y)^{1/y} (1+y) \;=\; e\cdot 1 \;=\; e.$$

Итак, оба односторонних предела в точке 0 существуют и равны e, значит, существует предел

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} \;=\; e.$$

◀

§3.9. Сравнение функций.

Определение 3.9.1. Пусть функции $f = f(x)$, $g = g(x)$ и $h = h(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и связаны в ней соотношением

$$f \;=\; g\cdot h$$

Тогда говорят, что в окрестности точки x_0:

(1) f есть o-малое от g

(обозначение: $f \;=\; o(g)$ $(x\to x_0)$ или просто $f \;=\; o(g)$, если значение x_0 понятно из контекста),

если h бесконечно малая в точке x_0;

(2) f есть O-большое от g

(обозначение: $f \;=\; \mathcal{O}(g)$ $(x\to x_0)$ или просто $f \;=\; \mathcal{O}(g)$),

если h ограничена в окрестности x_0;

(1) f (асимптотически) эквивалентна g

(обозначение: $f \sim g$ $(x \to x_0)$ или просто $f \sim o(g)$),

если $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1.$

Заметим, что $o(g)$ и $\mathcal{O}(g)$ – не функции, а классы функций, поэтому в действительности знаки равенства в выражениях $f = o(g)$ и $f = \mathcal{O}(g)$ следует понимать как принадлежность. В частности, бессмысленны выражения вида $o(g) = f$ или $\mathcal{O}(g) = f$.

Также некорректно говорить о любых свойствах функции f, за исключением тех, что указаны в определении соответствующего класса или напрямую из них следуют. В частности, верно $o(x) = \mathcal{O}(x)$ (это равносильно утверждению, что всякая бесконечно малая функция ограничена), но неверно $\mathcal{O}(x) = o(x)$ (существуют ограниченные функции, не являющиеся бесконечно малыми).

Приведем некоторые другие простейшие свойства O-символики.

(1) $o(g) + o(g) = o(g), \qquad \mathcal{O}(g) + o(g) = \mathcal{O}(g) + \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(g);$

(2) $o(f) \cdot o(g) = o(f) \cdot \mathcal{O}(g) = o(f \cdot g), \qquad \mathcal{O}(f) \cdot \mathcal{O}(g) = \mathcal{O}(f \cdot g);$

(3) $o(o(g)) = o(\mathcal{O}(g)) = \mathcal{O}(o(g)) = o(g), \qquad \mathcal{O}(\mathcal{O}(g)) = \mathcal{O}(g);$

(4) $f \sim g \iff f = g + o(g).$

Оставим их доказательство в качестве упражнения.

Перечислим теперь важнейшие эквивалентности при $x \to 0$, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

(1) $\sin x \sim x \iff \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1;$

(2) $\arcsin x \sim x \iff \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{(\arcsin x) \to 0} \dfrac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{u}{\sin u} = 1 \qquad$ (замена $u = \arcsin x$);

(3) $\operatorname{tg} x \sim x \iff \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} \right) = 1;$

(4) $\operatorname{arctg} x \sim x \iff \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim\limits_{(\operatorname{arctg} x) \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{u}{\operatorname{tg} u} = 1 \qquad$ (замена $u = \operatorname{arctg} x$);

(5) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2} \iff \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(1 - \cos x)}{x^2} = 2 \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = 2 \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \dfrac{1}{1 + \cos x} \right) = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1;$

(6) $\ln(1 + x) \sim x \iff \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = \ln \left(\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} \right) = \ln e = 1;$

(7) $e^x - 1 \sim x \iff \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{(e^x - 1) \to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1 + (e^x - 1))} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{u}{\ln(1 + u)} = 1 \qquad$ (замена $u = e^x - 1$).

Теорема 3.9.2. *Пусть функции $f = f(x)$, $f_1 = f_1(x)$, $g = g(x)$ и $g_1 = g_1(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и при $x \to x_0$ известно, что $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$. Тогда пределы*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

существуют или не существуют одновременно, причем в случае существования они совпадают.

► По определению существуют такие функции $a = a(x)$ и $b = b(x)$, что в окрестности точки x_0 выполнено

$$f = a \cdot f_1 \qquad \text{и} \qquad g = b \cdot g_1$$

и, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = \lim\limits_{x\to x_0} b(x) = 1$.

Тогда, предполагая существование, скажем, второго предела, для всех x из такой проколотой окрестности точки x_0, в которой $b(x) \neq 0$, имеем:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{a(x)f_1(x)}{b(x)g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

и, аналогично, в обратную сторону. ◄

Глава 4. Непрерывность функций.

§4.1. Понятие непрерывности. Точки разрыва и их классификация.

Определение 4.1.1. Функция $f = f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in D(f)$, если в этой точке у f существует конечный предел, причем

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Теорема 4.1.2. *Пусть функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда непрерывными в этой точке являются функции $f \pm g$, $f \cdot g$, а если в некоторой окрестности точки x_0 функция g не обращается в 0, то и $\dfrac{f}{g}$.*

► Напрямую следует из арифметических свойств пределов функций и определения непрерывности в точке. ◄

Определение 4.1.3. Функция $f = f(x)$ непрерывна справа (слева) в точке $x_0 \in D(f)$, если в этой точке у f существует правый (соответственно, левый) предел, равный $f(x_0)$.

Определение 4.1.4. Функция $f = f(x)$ непрерывна на интервале $(a, b) \subset D(f)$, если она непрерывна в каждой его точке.

Функция $f = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b] \subset D(f)$, если она непрерывна на интервале (a, b), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Определение 4.1.5. Для функции $f = f(x)$ точка $x_0 \in D(f)$ называется:

(1) точкой устранимого разрыва первого рода, если в ней у f существуют оба односторонних предела, однако

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) \neq f(x_0);$$

(2) точкой неустранимого разрыва первого рода, если в ней у f существуют оба односторонних предела, однако

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x);$$

(3) точкой разрыва второго рода, если в ней у f не существует один из двух односторонних пределов или он принимает бесконечное значение.

Теорема 4.1.6. *Пусть функция $f = f(x)$ монотонна на интервале (a, b). Тогда на этом интервале:*

(1) функция f не может иметь точек разрыва второго рода;

(2) множество точек разрыва f не более чем счетно.

► Без ограничения общности, f возрастает на (a, b).

Поскольку функция f монотонна на (a, b), то в каждой точке $c \in (a, b)$ у нее существуют оба односторонних предела, поэтому точек разрыва второго рода у f быть не может.

Чтобы доказать второй пункт, установим биекцию из множества точек разрыва f в некоторое подмножество $\mathbb{Q}$ по правилу:

$$\text{точка разрыва } c \in (a, b) \mapsto \text{рациональное число } q \in \left(\lim_{x \to c-0} f(x), \lim_{x \to c+0} f(x)\right)$$

Поскольку всякое подмножество $\mathbb{Q}$ не более чем счетно, из соображения мощностей то же самое верно и для множества точек разрыва f. ◄

§4.2. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 4.2.1. (Первая теорема Вейерштрасса). *Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f = f(x)$ ограничена на нем.*

► Пусть это не так, тогда для любого натурального n существует такая точка $x_n \in [a, b]$, что $|f(x_n)| > n$. В частности, отсюда следует, что последовательность $\{f(x_n)\}$ бесконечно большая.

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in [a, b]$. Перейдя к подпоследовательности, можно считать, что $\{x_n\}$ сама сходится к x_0.

Но в силу непрерывности функции f существует предел

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \;=\; f(x_0),$$

поэтому последовательность $\{f(x_n)\}$ ограничена (поскольку сходится) – противоречие. ◄

Теорема 4.2.2. (Вторая теорема Вейерштрасса). *Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f = f(x)$ достигает на нем своей точной верхней и точной нижней граней, то есть существуют точки x_m, x_M такие, что*

$$f(x_m) \;=\; \inf_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{и} \qquad f(x_M) \;=\; \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

► Проведем доказательство для точной верхней грани.

Число M является точной верхней гранью функции f на отрезке $[a, b]$ по определению, если для любого $x \in [a, b]$ верно $f(x) \leqslant M$ и для $\delta > 0$ существует $x_\delta \in [a, b]$ такой, что $f(x_\delta) \in (M - \delta, M)$.

Построим последовательность $\{x_n\}$ такую, что $f(x_n) \in \left(M - \dfrac{1}{n}, M\right)$. Снова, ссылаясь на теорему Больцано-Вейерштрасса и переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке $x_M \in [a, b]$. Тогда в силу непрерывности существует предел

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \;=\; f(x_M)$$

и, учитывая, что для любого n верно $M - \dfrac{1}{n} \leqslant f(x_n) \leqslant M$, по теореме о зажатой функции заключаем, что $f(x_M) \;=\; M$. ◄

Стоит отметить, что заменить в формулировках обеих теорем Вейерштрасса отрезок на интервал нельзя. В качестве контрпримера для первой теоремы можно взять функцию

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x}$$

на интервале $(0,1)$, а для второй –

$$f(x) \ = \ x - \lfloor x \rfloor$$

на том же интервале.

Теорема 4.2.3. (Больцано-Коши). *Пусть функция $f = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и в его концах принимает значения противоположных знаков. Тогда на интервале (a,b) существует точка c такая, что $f(c) = 0$.*

► Без ограничения общности, $f(a) < 0 < f(b)$. Обозначим $I_1 \ = \ [a,b]$ и построим систему вложенных отрезков по следующему правилу:

если в одном из концов $I_k = [a_k, b_k]$ функция f равна 0, то теорема доказана;

иначе поделим I_k пополам и примем за $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ ту половину, для которой значения f в ее концах разных знаков.

Полученная система вложенных отрезков $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ будет стягивающейся, поскольку

$$|I_n| \ = \ \frac{|I_1|}{2^n} \ = \ \frac{b-a}{2^n},$$

следовательно, в пересечении $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ существует единственная точка c.

Про точку c известно, что $c \ = \ \lim\limits_{n\to\infty} a_n \ = \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, а тогда в силу непрерывности

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \ = \ \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ = \ f(c).$$

С другой стороны, для любого n было верно неравенство

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0,$$

поэтому, переходя к пределу, получим, что $f(c) \cdot f(c) \leqslant 0$, откуда $f(c) \ = \ 0$. ◄

Следствие 4.2.4. (Теорема о промежуточном значении). *Пусть функция $f = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и выполнено условие*

$$f(a) \ = \ A < B \ = \ f(b).$$

Тогда для любого $C \in (A,B)$ существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $f(c) \ = \ C$.

► Рассмотрим функцию $F(x) \ = \ f(x) - C$. Очевидно, что F также непрерывна на $[a,b]$ и, кроме того, выполнены условия теоремы Больцано-Коши:

$$F(a) \ = \ A - C < 0 \qquad \text{и} \qquad F(b) \ = \ B - C > 0,$$

поскольку выполнены неравенства $A < C < B$. Следовательно, на интервале (a,b) существует корень функции F, то есть точка c такая, что

$$F(c) \ = \ f(c) - C \ = \ 0 \iff f(c) \ = \ C.$$

◄

Следствие 4.2.5. *Непрерывный образ отрезка $[a,b]$ при отображении $f = f(x)$ есть*

$$f\left([a,b]\right) \ = \ \left[\inf_{x\in[a,b]} f(x), \sup_{x\in[a,b]} f(x)\right].$$

Теорема 4.2.6. (Критерий непрерывности монотонной функции). *Монотонная на отрезке $[a,b]$ функция $f = f(x)$ непрерывна на нем, если и только если*

$$f([a,b]) \ = \ \left[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}\right].$$

► Без ограничения общности, f возрастает на $[a, b]$.

Необходимость следует напрямую из предыдущего следствия, поскольку в силу монотонности

$$f(a) \;=\; \inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{и} \qquad f(b) \;=\; \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Теперь, предполагая справедливость обратного следствия, докажем непрерывность функции f на отрезке $[a, b]$. Пусть это не так, то есть существует точка разрыва $c \in [a, b]$. Так как f монотонна на $[a, b]$, ее разрыв в точке c должен быть первого рода. Иными словами, в точке c существуют конечные односторонние пределы

$$d_- \;=\; \lim_{x\to c-0} \qquad \text{и} \qquad d_+ \;=\; \lim_{x\to c+0}.$$

Тогда, проецируя на ось ординат, имеем:

$$[f(a), f(b)] \;=\; f([a, b]) \subset [f(a), d_-] \cup \{f(c)\} \cup [d_+, f(b)],$$

откуда немедленно следует, что $d_- \;=\; d_+ \;=\; f(c)$, то есть f на самом деле непрерывна в точке c. ◄

§4.3. Непрерывность обратной функции. Непрерывность элементарных функций.

Лемма 4.3.1. *Пусть функция $f = f(x)$ строго возрастает (убывает) на множестве D и $f(D) \;=\; E$. Тогда обратная функция*

$$f^{-1}:\; E \to D,$$

строго возрастает (соответственно, убывает) на E.

► Без ограничения общности, f строго возрастает на D.

Пусть $y_1, y_2 \in E$. Выберем точки $x_1, x_2 \in D$ такие, что $f(x_1) \;=\; y_1$ и $f(x_2) \;=\; y_2$. Тогда

$$(f^{-1} \circ f)(x_1) \;=\; f^{-1}(y_1) \;=\; x_1 \qquad \text{и} \qquad (f^{-1} \circ f)(x_2) \;=\; f^{-1}(y_2) \;=\; x_2.$$

Если $y_1 < y_2$ и предположить, что f^{-1} строго убывает на E, то получаем, что

$$x_2 \;=\; f^{-1}(y_2) < f^{-1}(y_1) \;=\; x_1,$$

откуда в силу монотонности функции f следует, что $x_1 < x_2$ – противоречие. ◄

Теорема 4.3.2. *Пусть функция $f = f(x)$ строго возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда обратная функция $f^{-1} \;=\; f^{-1}(y)$ непрерывна на множестве $f([a, b])$, совпадающим, по уже доказанному, с отрезком $[f(a), f(b)]$ (соответственно, с отрезком $[f(b), f(a)]$).*

► Вновь проведем доказательство для строго возрастающих функций.

По доказанной лемме функция f^{-1} строго возрастает на отрезке $[f(a), f(b)]$ и отображает его в некоторое подмножество отрезка $[a, b]$. Следовательно, по критерию непрерывности монотонной функции необходимо показать, что для любой точки $c \in [a, b]$ существует точка $C \in [f(a), f(b)]$ такая, что

$$f^{-1}(C) \;=\; c \iff f(c) \;=\; C,$$

что, очевидно, выполнено. ◄

В качестве приложения теории непрерывности установим непрерывность наиболее распространенных функций. Начнем с простейших случаев:

(1) $f(x) \equiv const$, $f(x) = x$ непрерывны на всей вещественной прямой.

(2) Степенная функция $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$, а вместе с ней и полиномиальная функция $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ непрерывны на всей вещественной прямой.

(3) Рациональная дробь $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n = P_n(x)$ и $Q_m = Q_m(x)$ – полиномиальные функции, непрерывна на множестве
$$\mathbb{R} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\},$$
где $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ – все вещественные корни Q_m.

Доказательства этих утверждений оставим в качестве упражнения.

Перейдем к содержательным примерам.

Лемма 4.3.3. *Тригонометрические функции:* $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ *и обратные к ним непрерывны на области их определения.*

▶ Непрерывность синуса в произвольной точке a покажем по определению:

для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \varepsilon$, так что для всех $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ выполнено
$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant 2\cdot\frac{|x-a|}{2} = |x-a| < \varepsilon$$
(здесь мы оценили косинус по модулю единицей и воспользовались неравенством $|\sin x| \leqslant |x|$).

Непрерывность косинуса в точке a следует из того, что
$$\lim_{x\to a}\cos x = \lim_{x\to a}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$$
(здесь мы воспользовались доказанной непрерывностью синуса в точке a).

Непрерывность тангенса и котангенса следует из непрерывности синуса и косинуса и арифметических свойств пределов. Непрерывность обратных тригонометрических функций следует из теоремы о непрерывности обратной функции. ◀

Теорема 4.3.4. (Построение показательной функции вещественного аргумента.). *Пусть* $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, *а последовательность рациональных чисел* $\{r_n\}$ *сходится к* x. *Определим функцию*
$$f = f(x) = a^x \stackrel{\text{def}}{=\!=} \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$
Тогда f *строго возрастает и непрерывна на всей вещественной прямой.*

Прежде чем доказывать теорему, необходимо понять корректность определения, а именно:

(1) почему такой предел существует

(2) и почему он не зависит от последовательности $\{r_n\}$.

Для доказательства (1) покажем, что последовательность $\{a^{r_n}\}$ является фундаментальной, тогда по критерию Коши она будет сходящейся.

В самом деле, для любого натурального k существует номер $N = N(k)$ такой, что для любых $n > m > N$ выполнено $|r_n - r_m| < \dfrac{1}{k}$. Можно для удобства вместо условия $n > m$ считать, что $r_n > r_m$, тогда модуль можно снять. В таком случае
$$|a^{r_n} - a^{r_m}| = a^{r_m}\left|a^{r_n - r_m} - 1\right| < a^{r_m}\left|a^{1/k} - 1\right| \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} a^{1/k} = 1$ (упражнение). Стало быть, $\{a^{r_n}\}$ действительно фундаментальна.

Теперь покажем, что определение f не зависит от выбора последовательности рациональных чисел. Пусть $\{r_n\}$ и $\{q_n\}$ – две различные последовательности, сходящиеся к x, тогда построим новую последовательность $\{s_n\}$ по правилу

$$s_{2k} = r_k, \quad s_{2k-1} = q_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда очевидно, что $\{s_n\}$ также сходится к x, а поэтому последовательность $\{a^{s_n}\}$ по уже доказанному является сходящейся. Но $\{a^{r_n}\}$ и $\{a^{q_n}\}$ – ее подпоследовательности; следовательно, они сходятся к одному и тому же числу.

Таким образом, определение функции f корректно, поэтому можно говорить о ее функциональных свойствах.

► Пусть $x_1 < x_2$, а рациональные числа $r_n < q_n$ таковы, что для любого натурального n

$$x_1 < r_n < q_n < x_2 \qquad \text{и} \qquad r_n > r_{n+1}, \quad q_n < q_{n+1}.$$

Тогда по построению $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x_2$.

Переходя к пределу, в силу возрастания степенной функции рационального аргумента, имеем:

$$a^{x_1} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \leqslant a^{r_n} < a^{q_n} \leqslant \lim_{n\to\infty} a^{q_n} = a^{x_2},$$

поэтому f строго возрастает на $\mathbb{R}$.

Чтобы доказать непрерывность в произвольной точке α, воспользуемся определением:

$$\lim_{x\to\alpha} a^x = \lim_{(x-\alpha)\to 0} a^{(x-\alpha)+\alpha} = \lim_{t\to 0} a^{t+\alpha} = a^\alpha \lim_{t\to 0} a^t = a^\alpha \lim_{t\to 0}(1+t\alpha) = a^\alpha$$

(здесь мы устроили замену $t = x - \alpha$ и воспользовались эквивалентностью $a^t \sim 1 + t\alpha$ при $t \to 0$). ◄

Следствие 4.3.5. *Функции* $\ln x$ *и* x^α *при вещественном* α *непрерывны на полуоси* $(0, +\infty)$

► Логарифм непрерывен как обратная к непрерывной функция.

Показательная функция x^α непрерывна в произвольной точке $a > 0$, ибо

$$\lim_{x\to a} x^\alpha = \lim_{x\to a} e^{\alpha \ln x} = \exp\Big(\alpha \lim_{x\to a} \ln x\Big) = e^{\alpha \ln a} = a^x.$$

◄

§4.4. Равномерная непрерывность на множестве.

Определение 4.4.1. Функция $f = f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве $E \subset D(f)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что если точки $x', x'' \in E$ таковы, что $|x' - x''| < \delta$, то выполнено $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Теорема 4.4.2. (Кантора). *Всякая непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f = f(x)$ *равномерно непрерывна на нем.*

► Пусть это не так, тогда из определения существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого натурального n существуют точки $x'_n, x''_n \in [a, b]$ такие, что $|x'_n - x''_n| < \dfrac{1}{n}$, для которых $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon$.

Последовательность $\{x'_n\}$ ограничена как подмножество отрезка $[a, b]$, поэтому по теореме Больцано-Вейерштрасса из них можно выделить последовательность, сходящуюся к некоторому числу x'. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что последовательность $\{x'_n\}$ уже сходится к x'.

В силу неравенств

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \iff x'_n - \frac{1}{n} < x''_n < x'_n + \frac{1}{n}$$

и теоремы о зажатой переменной заключаем, что последовательность $\{x''_n\}$ также сходится к x'.

Но функция f непрерывна на $[a, b]$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} f(x''_n) \;=\; f(x').$$

А в таком случае из предположения

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon$$

в пределе следует $|f(x') - f(x')| \;=\; 0 \geqslant \varepsilon$ – противоречие. ◀

Отметим, что аналогичное утверждение для иных промежутков (интервалов или полуинтервалов, в том числе бесконечных) неверно.

Пример 4.4.3. Рассмотрим непрерывную на всей вещественной прямой функцию $f(x) \;=\; \sin(x^2)$. Покажем, что она не является равномерно непрерывной на луче $(0, +\infty)$.

В самом деле, возьмем $\varepsilon \;=\; 1$ и последовательности

$$x'_n \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \qquad x''_n \;=\; \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Тогда имеем:

$$|x''_n - x'_n| \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} - \sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \;=\; \frac{\pi/2 + 2\pi n - (-\pi/2 + 2\pi n)}{\sqrt{\pi/2 + 2\pi n} - \sqrt{-\pi/2 + 2\pi n}} \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{\pi/2 + 2\pi n} - \sqrt{-\pi/2 + 2\pi n}} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

но, очевидно, $|f(x'_n) - f(x''_n)| \;=\; \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right| \;=\; 2 > 1 \;=\; \varepsilon.$

Глава 5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

§5.1. Понятие производной и дифференциала, их простейшие свойства.

Пусть функция $f = f(x)$ определена в некоторой окрестности U точки x_0. Выберем приращение аргумента $\Delta x > 0$ так, что $x_0 + \Delta x \in U$ и рассмотрим приращение функции

$$\Delta f_{x_0}(\Delta x) \;=\; f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Определение 5.1.1. Говорят, что функция f дифференцируема в точке x_0, если при $\Delta x \to 0$ имеет место разложение

$$\Delta f_{x_0}(\Delta x) \;=\; A\Delta x + o(\Delta x), \qquad \text{где } A \in \mathbb{R}.$$

При этом линейная функция

$$df_{x_0} \;=\; df_{x_0}(\Delta x) \overset{\text{def}}{=\!=} A\Delta x$$

называется дифференциалом функции f в точке x_0.

Пример 5.1.2. Рассмотрим функцию $\varphi(x) \;=\; x$. Покажем, что для произвольной точки $x_0 \in \mathbb{R}$ φ дифференцируема в x_0, и найдем ее дифференциал в этой точке.

По определению

$$\Delta\varphi_{x_0}(\Delta x) \;=\; (x_0 + \Delta x) - x_0 \;=\; \Delta x \text{ – искомое представление.}$$

Следовательно, φ дифференцируема в x_0 и $d\varphi_{x_0}(\Delta x) \; = \; \Delta x$.

Дифференциал функции φ также называют дифференциалом независимой переменной x и обозначают через

$$dx \; = \; dx(\Delta x),$$

что также подчеркивает его независимость от точки x_0. Таким образом, дифференциал независимой переменной равен ее малому приращению.

Определение 5.1.3. Производной функции f в точке x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} \; = \; f'(x_0).$$

Говорят, что функция f имеет производную в точке x_0, если $f'(x_0) < \infty$.

Теорема 5.1.4. *Существование производной в точке x_0 для функции $f = f(x)$ равносильно дифференцируемости в этой точке.*

► Пусть для функции f существует производная $f'(x_0)$. Рассмотрим функцию

$$F_{x_0}(\Delta x) \; = \; \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тогда из существования предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} F_{x_0}(\Delta x) \; = \; f'(x_0)$ следует, что

$$F_{x_0}(\Delta x) \; = \; f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x) \; = \; \alpha(x - x_0)$ – бесконечно малая в точке x_0. А тогда при $\Delta x \to 0$

$$\Delta f_{x_0}(\Delta x) \; = \; F_{x_0}(\Delta x)\Delta x \; = \; f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \; = \; f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

то есть f дифференцируема в точке x_0.

Обратно, пусть f дифференцируема в точке x_0, то есть при $\Delta x \to 0$ имеет место представление

$$\Delta f_{x_0}(\Delta x) \; = \; A\Delta x + o(\Delta x),$$

тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} \; = \; \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) \; = \; A,$$

поскольку $\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} \; = \; \dfrac{o(x - x_0)}{x - x_0}$ – бесконечно малая в точке x_0. Следовательно, производная f' в точке x_0 существует и равна A. ◄

Следовательно, для дифференцируемой в точке x_0 функции f имеет место равенство

$$df_{x_0}(\Delta x) \; = \; f'(x_0)\Delta x.$$

Вспоминая, что $\Delta x \; = \; dx(\Delta x)$ – дифференциал независимой переменной, заключаем, что

$$df_{x_0} \; = \; f'(x_0)\, dx.$$

Поэтому имеет место обозначение Лейбница для производной

$$f'(x_0) \; = \; \frac{df}{dx}(x_0)$$

Теорема 5.1.5. *Всякая дифференцируемая в точке x_0 функция $f = f(x)$ непрерывна в этой точке.*

► В самом деле,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f_{x_0}(\Delta x) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) \;=\; 0,$$

поэтому $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$, что и означает непрерывность. ◄

Необходимо понимать, что обратное утверждение неверно.

Пример 5.1.6. Рассмотрим функцию $f(x) \;=\; |x|$, очевидно, непрерывную в точке $x_0 \;=\; 0$. Покажем, что f не имеет в нуле производной. В самом деле, поскольку $\Delta f_{x_0}(\Delta x) \;=\; |\Delta x|$, имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \;=\; 1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \;=\; -1,$$

поэтому предела $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x}$ нет.

§5.2. Арифметические свойства производных. Производная сложной функции.

Теорема 5.2.1. *Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют производную в точке x_0. Тогда в этой точке имеют производную следующие функции:*

(1) *$u \pm v$, при этом $(u \pm v)' \;=\; u' + v'$;*

(2) *$C \cdot u$, где C – вещественная константа, при этом $(C \cdot u)' \;=\; C \cdot u'$;*

(3) *$u \cdot v$, при этом $(u \cdot v)' \;=\; u' \cdot v + u \cdot v'$;*

(4) *$\dfrac{u}{v}$ (при условии, что $v(x) \neq 0$ в некоторой окрестности x_0), при этом $\left(\dfrac{u}{v}\right)' \;=\; \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.*

► По определению производной:

(1)
$$\begin{aligned}
(u \pm v)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \pm v)_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) \pm v(x_0 + \Delta x)] - [u(x_0) \pm v(x_0)]}{\Delta x} \;=\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] \pm [v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x} \;=\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} \;=\\
&= u'(x_0) + \pm v'(x_0);
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
(C \cdot u)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(C \cdot u)_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C \cdot u(x_0 + \Delta x) - C \cdot u(x_0)}{\Delta x} \;=\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C\,[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} \;=\; C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} =\\
&= C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} \;=\; C \cdot u'(x_0);
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
(u \cdot v)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \cdot v)_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) \cdot v(x_0)}{\Delta x} \;=\\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0)\,[u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)] + u(x_0 + \Delta x)\,[v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)]}{\Delta x} \;=\\
&= v(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \left(u(x_0 + \Delta x) \cdot \frac{v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)}{\Delta x} \right) =\\
&= v(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} + u(x_0) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} \;=\; v(x_0) \cdot u'(x_0) + u(x_0) \cdot v'(x_0);
\end{aligned}$$

$$(4)\ \left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{u}{v}\right)_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)-v(x_0+\Delta x)\cdot u(x_0)}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]\,v(x_0)-[v(x_0+\Delta x)-v(x_0)]\,u(x_0)}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{v(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0)}\left(v(x_0)\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}-u(x_0)\cdot\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right) =$$
$$= \frac{1}{v^2(x_0)}\left(v(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x}-u(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v_{x_0}(\Delta x)}{\Delta x}\right) = \frac{v(x_0)\cdot u'(x_0)-u(x_0)\cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

◄

Теорема 5.2.2. *Пусть про функции*

$$f:\ X\to Y \qquad \text{и} \qquad g:\ Y\to Z$$

известно, что f дифференцируема в точке x_0, а g дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда функция $g\circ f$ дифференцируема в точке x_0, причем ее производная равна

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

► По определению при $\Delta x\to 0$ верны разложения

$$\Delta f_{x_0}(\Delta x) = \Delta x\,(f'(x_0)+\alpha(\Delta x)) \text{ при } \Delta x\to 0$$

и

$$\Delta g_{f(x_0)}(\Delta f_{x_0}) = \Delta f_{x_0}\,(g'(f(x_0))+\beta(\Delta f_{x_0})) \text{ при } \Delta f_{x_0} = \Delta f_{x_0}(\Delta x)\to 0,$$

где $\alpha = \alpha(x)$ – бесконечно малая в точке x_0, а $\beta = \beta(y)$ – бесконечно малая в точке $y_0 = f(x_0)$. Подставляя первое равенство во второе, получаем:

$$\Delta g_{f(x_0)}(\Delta f_{x_0}(\Delta x)) = \Delta x\,(f'(x_0)+\alpha(\Delta x))\,(g'(f(x_0))+\beta(\Delta f_{x_0}(\Delta x))).$$

Поскольку дифференцируемая в точке x_0 функция f непрерывна в этой точке, при $\Delta x\to 0$ также и $\Delta f_{x_0}(\Delta x)\to 0$, поэтому:

$$\Delta g_{f(x_0)}(\Delta f_{x_0}(\Delta x)) = g'(f(x_0))f'(x_0)\Delta x + g'(f(x_0))\alpha(\Delta x)\Delta x + f'(x_0)\beta(\Delta f_{x_0}(\Delta x))\Delta x + \alpha(\Delta x)\beta(\Delta f_{x_0}(\Delta x))\Delta x =$$
$$= g'(f(x_0))f'(x_0)\Delta x + g'(f(x_0))o(\Delta x) + f'(x_0)o(\Delta x) + o(\Delta x) = g'(f(x_0))f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Стало быть, $g\circ f$ дифференцируема в точке x_0 и $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$. ◄

§5.3. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически.

Теорема 5.3.1. *Пусть функция $f = f(x)$ строго возрастает (убывает) на интервале (a,b). Если в некоторой точке $x_0\in(a,b)$ функция f имеет отличную от нуля производную, то обратная функция $f^{-1} = f^{-1}(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

► Поскольку из непрерывности f следует непрерывность f^{-1}, при $\Delta x\to 0$ также и $\Delta f^{-1}_{x_0}(\Delta x)\to 0$.

По определению производной:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f^{-1}_{y_0}(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f^{-1}_{y_0}(\Delta x)}{\Delta f_{x_0}(\Delta f^{-1}_{y_0}(\Delta x))} = \lim_{\Delta f^{-1}_{y_0}\to 0}\frac{\Delta f^{-1}_{y_0}}{\Delta f_{x_0}(\Delta f^{-1}_{y_0})} = \left[\lim_{\Delta f^{-1}_{y_0}\to 0}\frac{\Delta f_{x_0}(\Delta f^{-1}_{y_0})}{\Delta f^{-1}_{y_0}}\right]^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

◄

Теорема 5.3.2. *Пусть на интервале* (a, b) *заданы функции* $x = x(t)$ *и* $y = y(t)$*, причем к первой из них существует обратная функция* $t = t(x)$*. Тогда если в некоторой точке* $t_0 \in (a, b)$ *функции* x *и* y *имеют производную, причем* $x'(t_0) \neq 0$*, то функция* $y = y(x) = y(t(x))$*, заданная параметрически, имеет производную в точке* $x_0 = x(t_0)$*, причем*

$$y'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

► Данная теорема является прямым следствием теорем о производной сложной и обратной функции. В самом деле, все условия обеих теорем выполнены, поэтому функция $t = t(x)$ имеет в точке x_0 производную, равную $\dfrac{1}{x'(t_0)}$, а, с другой стороны,

$$y'(x_0) = (y \circ t)'(x_0) = y'(t(x_0)) \cdot t'(x_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

◄

§5.4. Производные и дифф-алы высших порядков. Инвариантность первого дифф-ала.

Определение 5.4.1. Для каждого целого неотрицательного n определим производную $n-$того порядка

$$f^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

функции $f = f(x)$ в точке x_0 по индукции:

(1) $n = 0:\quad f^{(0)}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=\!=} f(x_0);$

(2) $n \geqslant 1:\quad$ если функция $f^{(n-1)}$ имеет в точке x_0 производную, то $f^{(n)}(x_0) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$.

Определение 5.4.2. Для каждого натурального n определим дифференциал $n-$того порядка

$$d^n f_{x_0} = d^n f_{x_0}(\Delta x)$$

функции $f = f(x)$ в точке x_0 по индукции:

(1) $n = 1:\quad d^1 f_{x_0} \stackrel{\text{def}}{=\!=} df_{x_0};$

(2) $n \geqslant 2:\quad$ если функция $d^{n-1} f_{x_0}$ дифференцируема в точке x_0, то $d^n f_{x_0} \stackrel{\text{def}}{=\!=} d\left(d^{n-1} f_{x_0}\right)_{x_0}$.

Дифференцируя, несложно по индукции показать, что $n-$тый дифференциал связан с $n-$той производной знакомой формулой

$$d^n f_{x_0} = f^{(n)}(x_0)\, dx^n$$

(важно помнить, что dx не зависит от x_0, поэтому при дифференцировании его следует считать константой).

Также из определения следует, что существование $n-$того дифференциала и $n-$той производной для функции $f = f(x)$ равносильны.

Определение 5.4.3. Говорят, что функция $f = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, если у нее существуют все производные (или, что то же самое, все дифференциалы) вплоть до $n-$того порядка.

Для производных высших порядков имеют место арифметические свойства, схожие с аналогичными для первых производных; так, очевидно, $n-$тая производная суммы равна сумме $n-$тых производных слагаемых. Однако уже для произведения формула становится куда более громоздкой.

Теорема 5.4.4. (Формула Лейбница). *Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ n раз дифференцируемы в точке x_0. Тогда функция $u \cdot v$ также n раз дифференцируема в точке x_0, причем*

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

► Проведем доказательство индукцией по n. При $n = 0$ утверждение тривиально, при $n = 1$ уже доказано.

Пусть теперь $n \geqslant 2$, тогда

$$\begin{aligned}
(u \cdot v)^{(n)} &= \left((u \cdot v)^{(n-1)}\right)' \xlongequal{\text{предп.инд.}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(n-1-k)} v^{(k)}\right)' = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(u^{(n-1-k)} v^{(k)}\right)' = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\left(u^{(n-1-k)}\right)' v^{(k)} + \left(v^{(k)}\right)' u^{(n-1-k)}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(u^{(n-k)} v^{(k)} + v^{(k+1)} u^{(n-1-k)}\right) = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(n-k)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} u^{(n-k)} v^{(k)} = \\
&= C_{n-1}^0 u^{(n)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}\right) u^{(n-k)} v^{(k)} + C_{n-1}^{n-1} u^{(0)} v^{(n)} = \\
&= u^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} + v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.
\end{aligned}$$

◄

Поставим теперь такой вопрос: как изменится вид дифференциала

$$d^n f_{x_0} = f^{(n)}(x_0)\, dx^n,$$

если считать, что x – не независимая переменная, а функция некоторой другой (уже независимой) переменной t. Принципиально различаются два случая.

(1) $n = 1$, то есть $df_{x_0} = f'(x_0)\, dx$.

Если $x = x(t)$, причем $x_0 = x(t_0)$, то по формуле дифференциала сложной функции

$$df_{x_0} = df_{x(t_0)} = d(f \circ x)_{t_0} = f'(x(t_0)) \cdot x'(t_0)\, dt = f'(x_0)\, dx_{t_0} \text{ – выражение того же вида,}$$

поэтому вид первого дифференциала функции f не зависит от того, является ли x независимой переменной или функцией некоторого аргумента t.

Это свойство называется инвариантностью формы первого дифференциала.

(2) $n \geqslant 2$. Покажем, что уже при $n = 2$ инвариантность формы дифференциала нарушается.

Продифференцировав выражение для первого дифференциала, получаем:

$$d^2 f_{x_0} = d\,(df_{x_0})_{x_0} = d\,(f'(x_0)\, dx_{t_0})_{x(t_0)} = d\,(f')_{x_0}\, dx_{t_0} + f'(x_0)\, d\,(dx_{t_0}) = f''(x_0)\, dx_{t_0}^2 + f'(x_0)\, dx_{t_0}^2$$

в то время как если x считать независимой переменной, формула имела бы вид $d^2 f_{x_0} = f''(x_0)\, dx^2$. Оно и понятно: для независимой переменной второй дифференциал равен 0, поэтому второе слагаемое общей формулы пропадает.

§5.5. Производные элементарных функций.

В настоящем разделе мы получим формулы для производных элементарных функций (для некоторых – всех порядков) в произвольной точке x их областей определения.

Пример 5.5.1. $f(x) = \sin x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x\cdot 1 = \cos x.$$

$$f''(x) = (\cos(x))' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x.$$

Аналогично, рассуждая далее, получаем, что $f'''(x) = -\cos x$ и $f^{\mathrm{IV}}(x) = \sin x = f(x)$; очевидно, далее все зациклится. Вообще, справедливы формулы

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right) \qquad \text{и} \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),$$

которые можно доказать по индукции, используя вышеизложенные выкладки.

Пример 5.5.2. $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Формулы для производных высшего порядка существуют, однако в силу их громоздкости мы не будем их выводить. На практике их знание также не является необходимым.

Пример 5.5.3. Производные обратных тригометрических функций: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{arcctg} x$ – считаются с помощью теоремы о производной обратной функции. Так,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(здесь $y = \arcsin x$ – образ точки, в которой считается производная).

Аналогично получаются формулы

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 5.5.4. $f(x) = e^x$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x.$$

Иными словами, $f'(x) = f(x)$. Это характеристическое свойство экспоненты: всякая функция, равная своей производной, отличается от e^x разве что умножением на константу.

Очевидно также, что $(e^x)^{(n)} = e^x$.

Пример 5.5.5. $f(x) = \ln x$. Вычислим производную по определению, хотя можно воспользоваться и теоремой о производной обратной функции:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right] = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} = \frac{1}{x}\cdot\ln e = \frac{1}{x}.$$

Высшие производные логарифма будут вычислены в следующем примере.

Пример 5.5.6. $f(x) = x^\alpha$, где $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left(e^{\alpha\ln x}\right)' = \alpha e^{\alpha\ln x}\cdot(\ln x)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

$$f''(x) = \alpha\left(x^{\alpha-1}\right)' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}.$$

Вообще, по индукции можно показать, что

$$(x^{\alpha})^{(n)} \;=\; \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

В частности, при $\alpha = 1$ получаем

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} \;=\; \frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{x^{1+n}} \;=\; \frac{(-1)^n n!}{x^{1+n}},$$

откуда

$$(\ln x)^{(n)} \;=\; \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Глава 6. Основные теоремы дифференциального исчисления.

§6.1. Возрастание и убывание функции в точке.

Определение 6.1.1. Функция $f = f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0, если существует такая проколотая окрестность $\mathring{U}(x_0) \subset D(f)$, что для всех $x \in \mathring{U}(x_0)$ выполнено

$$\operatorname{sgn}(x - x_0) \;=\; \operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0))$$

(соответственно, $\operatorname{sgn}(x - x_0) \;=\; -\operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0))$).

Теорема 6.1.2. (Достаточное условие возр./убыв. в точке). *Для того, чтобы дифференцируемая в точке x_0 функция $f = f(x)$ возрастала (убывала) в этой точке, достаточно $f'(x_0) > 0$ (соответственно, $f'(x_0) < 0$).*

► Без ограничения общности, $f'(x_0) > 0$. Рассмотрим функцию

$$F(x) \;=\; \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \text{ для которой } \lim_{x\to x_0} F(x) \;=\; f'(x_0),$$

тогда из леммы о сохранении знака следует, что в некоторой проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ выполнено

$$F(x) > \frac{f'(x_0)}{2} > 0 \implies \operatorname{sgn}(f(x) - f(x_0)) \;=\; \operatorname{sgn}(x - x_0),$$

что по определению означает возрастание f в точке x_0. ◄

Отметим, что приведенное условие не является необходимым. Например, функция $f(x) \;=\; x^3$ возрастает в нуле, однако $f'(0) \;=\; 0$.

§6.2. Экстремумы функций. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.

Определение 6.2.1. Для функции $f = f(x)$ точка $x_0 \in D(f)$ называется точкой локального максимума (минимума), если существует такая окрестность $U(x_0) \subset D(f)$, что для всех $x \in U(x_0)$ выполнено

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad (\text{соответственно, } f(x) \geqslant f(x_0)).$$

Точки локального максимума и минимума вместе называют точками локального экстремума.

Теорема 6.2.2. (Ферма). *Если x_0 – точка локального экстремума дифференцируемой в x_0 функции $f \;=\; f(x)$, то необходимо $f'(x_0) \;=\; 0$.*

► В самом деле, если точка x_0 – локальный экстремум f, то в ней функция f не может ни возрастать, ни убывать. По достаточному условию (точнее, по его отрицанию) это означает, что $f'(x_0) \leqslant 0$ и $f'(x_0) \geqslant 0$. Значит, $f'(x_0) \ = \ 0$. ◄

И вновь, приведенное условие не является достаточным, что снова видно на примере функции $f(x) \ = \ x^3$ в точке 0.

Теорема 6.2.3. (Ролля). *Пусть функция $f = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда если $f(a) \ = \ f(b)$, то на существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) \ = \ 0$.*

► По второй теореме Вейерштрасса на отрезке $[a, b]$ существуют точки x_m и x_M такие, что

$$f(x_m) \ = \ m \ = \ \inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{и} \qquad f(x_M) \ = \ M \ = \ \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Возможны два случая:

(1) $m = M$. Тогда f постоянна на $[a, b]$, поэтому ее производная равна 0 всюду на (a, b).

(2) $m < M$. Тогда, поскольку $f(a) \ = \ f(b)$, одно из значений m и M принимается не в граничной точке $[a, b]$, а в некоторой внутренней точке $c \in [a, b]$. Тогда c – точка локального экстремума f, и по теореме Ферма $f'(c) \ = \ 0$.

◄

Следствие 6.2.4. *Пусть функции $f = f(x), f', f'', \ldots, f^{(n)}$ непрерывны в окрестности $U(x_0) \subset D(f)$, в которой существует $(n+1)-$я производная f. Тогда если $f(x) \ = \ 0$ для всех $x \in U(x_0)$ и*

$$f'(x_0) \ = \ \ldots \ = \ f^{(n)}(x_0) \ = \ 0,$$

то для всякого $x \in U(x_0)$, не равного x_0, существует точка $\xi \in [x_0, x]$ такая, что $f^{(n+1)}(\xi) \ = \ 0$.

► Зафиксируем произвольный $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$ Для функции f на отрезке $[x_0, x]$ выполнены все условия теоремы Ролля, поэтому существует точка $c_1 \in [x_0, x]$ такая, что $f'(c_1) \ = \ 0$.

Для функции f' на отрезке $[x_0, c_1]$ также выполнены все условия теоремы Ролля, поэтому существует точка $c_2 \in [x_0, c_1]$ такая, что $f''(c_2) \ = \ 0$.

Продолжая далее, построим набор точек $c_n < c_{n-1} < \ldots < c_1$, для которых справедливо $f^{(k)}(c_k) \ = \ 0$.

Рассматривая, наконец, функцию $f^{(n)}$ на отрезке $[x_0, c_n]$. По теореме Ролля существует точка

$$\xi \in [x_0, c_n] \subset [x_0, c_{n-1}] \subset \ldots \subset [x_0, c_1] \subset [x_0, x]$$

такая, что $f^{(n+1)}(\xi) \ = \ 0$. ◄

Теорема 6.2.5. (Лагранжа). *Пусть функция $f = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) \ = \ f'(c)(b - a).$$

► Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F \ = \ F(x) \ = \ f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Тогда F непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), поскольку такова функция f; кроме того, $F(a) \ = \ F(b) \ = \ 0$. Следовательно, по теореме Ролля существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$F'(c) \ = \ f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ = \ 0 \iff f(b) - f(a) \ = \ f'(c)(b - a).$$

◄

Теорема 6.2.6. (Коши). *Пусть функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b); кроме того, $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда существует точка $c \in (a, b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

► Прежде всего, установим корректность левой части равенства, а именно, покжем, что $g(a) \neq g(b)$. В самом деле, иначе по теореме Ролля на интервале (a, b) существует нуль производной функции g, что противоречит условию.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F = F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Тогда F непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), поскольку такова функция f; кроме того, $F(a) = F(b) = 0$. Следовательно, по теореме Ролля существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0 \iff \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

◄

§6.3. Следствия теоремы Лагранжа. Достаточные условия локального экстремума.

Лемма 6.3.1. *Пусть функция $f = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на интервале (a, b) имеет производную, равную нулю. Тогда эта функция постоянна на $[a, b]$.*

► Пусть $a' < b'$ – произвольные точки отрезка $[a, b]$. Сузим область определения функции f на подотрезок $[a', b'] \subset [a, b]$. По теореме Лагранжа существует точка $c \in (a', b')$ такая, что

$$f(b') - f(a') = f'(c)(b' - a').$$

Но по условию $f'(c) = 0$, поэтому $f(b') = f(a')$. В силу произвольного выбора a' и b' заключаем, что f постоянна на $[a, b]$. ◄

Лемма 6.3.2. *Пусть:*

(1) функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ непрерывны на полуинтервале $[a, b)$ (возможно, бесконечном) и дифференцируемы на интервале (a, b);

(2) $f(a) \leqslant g(a)$;

(3) для любого $x \in (a, b)$ выполнено $f'(x) < g'(x)$.

Тогда $f(x) < g(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

► Пусть $x \in (a, b)$. Применяя теорему Лагранжа к функции $g - f$, определенной на отрезке $[a, x] \subset [a, b)$, найдем точку $c \in [a, x]$ такую, что

$$[g(x) - f(x)] = [g(a) - f(a)] + [g'(c) - f'(c)](x - a).$$

По условию $g(a) - f(a) \geqslant 0$ и $g'(c) - f'(c) > 0$. Следовательно, поскольку и $x - a > 0$, заключаем, что и $g(x) - f(x) > 0$. ◄

Теорема 6.3.3. (Критерий монотонности на интервале). *Дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f = f(x)$ возрастает (убывает) на нем, если и только если для любого $x \in (a, b)$ выполнено $f'(x) \geqslant 0$ (соответственно, $f'(x) \leqslant 0$).*

► Проведем доказательство для возрастающих на (a, b) функций.

Пусть f возрастает на (a, b), тогда для всех $x \in (a, b)$ и любого $\Delta x > 0$ выполнено

$$f(x + \Delta x) \geqslant f(x) \implies \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

откуда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, заключаем, что $f'(x) \geqslant 0$.

Теперь предположим, что для всех $x \in (a, b)$ выполнено $f'(x) \geqslant 0$. Выберем точки x_1 и x_2 так, что $a < x_1 < x_2 < b$, тогда f дифференцируема на (x_1, x_2) и непрерывна на x_1, x_2. Поэтому по теореме Лагранжа существует точка $c \in (x_1, x_2)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) \ = \ f'(c)(x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

откуда $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. В силу произвольного выбора x_1 и x_2 получаем, что f возрастает на (a, b). ◄

Теорема 6.3.4. (Достаточное условие строгой монотонности на интервале). *Пусть функция $f = f(x)$ дифференцируема на (a, b) и для любого $x \in (a, b)$ выполнено $f'(x) > 0$ (соответственно, $f'(x) < 0$). Тогда f строго возрастает (убывает) на (a, b).*

► Без ограничения общности, $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$. Выберем точки x_1 и x_2 так, что $a < x_1 < x_2 < b$. Тогда f дифференцируема на (x_1, x_2) и непрерывна на x_1, x_2. Поэтому по теореме Лагранжа существует точка $c \in (x_1, x_2)$ такая, что

$$f(x_2) - f(x_1) \ = \ f'(c)(x_2 - x_1) > 0,$$

откуда $f(x_2) > f(x_1)$. В силу произвольного выбора x_1 и x_2 получаем, что f строго возрастает на (a, b). ◄

И вновь контрпример $f(x) \ = \ x^3$ в точке 0 показывает, что приведенное условие не является необходимым.

Теорема 6.3.5. (Достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0) \subset D(f)$, причем $f'(x_0) \ = \ 0$. Тогда для того, чтобы точка x_0 была точкой локального минимума (максимума), достаточно, чтобы f' возрастала (соответственно, убывала) в точке x_0.*

► Выберем точку $c \in U(x_0)$, $c \neq x_0$, тогда поскольку f дифференцируема на (x_0, c) и непрерывна на $[x_0, c]$, по теореме Лагранжа существует точка $\xi \in (x_0, c)$ такая, что

$$f(c) - f(x_0) \ = \ f'(\xi)(c - x_0).$$

Пусть f' возрастает в точке x_0, тогда из определения $\operatorname{sgn} f'(\xi) \ = \ \operatorname{sgn}(\xi - x_0)$. Стало быть, поскольку $\operatorname{sgn}(c - x_0) \ = \ \operatorname{sgn}(\xi - x_0)$, правая часть равенства положительна, поэтому и $f(c) > f(x_0)$. В силу произвольного выбора c получаем, что x_0 – точка локального минимума.

Второй случай рассматривается аналогично. ◄

Следствие 6.3.6. *Пусть функция $f = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности $U(x_0) \subset D(f)$, причем $f'(x_0) \ = \ 0$. Тогда для того, чтобы точка x_0 была точкой локального минимума (максимума), достаточно $f''(x_0) > 0$ (соответственно, $f''(x_0) < 0$).*

► В самом деле, по достаточному условию возрастания/убывания в точке из $f''(x_0) > 0$ следует возрастание f' в точке x_0, а из $f''(x_0) < 0$ – убывание f' в точке x_0. ◄

§6.4. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Лемма 6.4.1. *Пусть функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ определены в окрестности точки x_0 и дифференцируемы в этой точке, причем $g'(x_0) \neq 0$. Тогда если $f(x_0) \ = \ g(x_0) \ = \ 0$, то предел*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

существует и равен $\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

► В самом деле,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\left[\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]^{-1} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

◄

Теорема 6.4.2. (Правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $0/0$). *Пусть:*

(1) функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b);

(2) $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$;

(3) f и g имеют в точке a пределы, равные 0;

(4) существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда предел $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *существует и равен K.*

► Доопределим f и g нулем в точке a. Тогда новые функции f^* и g^* будут непрерывны на любом отрезке $[a, x] \subset [a, b)$, и может быть применена теорема Коши, согласно которой на $[a, x]$ существует точка c такая, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Если $x \to a$, очевидно, и $c \to a$, поэтому с точностью до переобозначения переменной

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)} = K.$$

◄

Теорема 6.4.3. (Правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида ∞/∞). *Пусть:*

(1) функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b);

(2) $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$;

(3) f и g имеют в точке a пределы, равные $+\infty$;

(4) существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда предел $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *существует и равен K.*

► Сначала предположим, что $K < \infty$. По определению предела для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $x \in (a, a+\delta)$ выполнено

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - K\right| < \frac{\varepsilon}{|f(x_0) - Kg(x_0)| + 1}.$$

(выбор константы будет ясен в дальнейшем). Далее, поскольку $g(x) \to +\infty$ при $x \to a$, то $\dfrac{1}{g(x)} \to 0$, и существует такое $\eta < \delta$, что для всех $x \in (a, \eta)$ справедливо

$$\left|\frac{1}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Обозначим $x_0 = a + \dfrac{\delta}{2}$, тогда для любого $x \in (a, x_0)$ на отрезке $[x, x_0]$ к функциям f и g применима теорема Коши, согласно которой существует точка $c \in (x, x_0)$ такая, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

поэтому, в силу выбора x_0,

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K\right| < \frac{\varepsilon}{|f(x_0) - Kg(x_0)| + 1}.$$

Непосредственно проверяется неравенство

$$\frac{f(x)}{g(x)} - K = \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K\right),$$

откуда

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| \leqslant \left|\frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)}\right| + \left(1 + \left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|\right)\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K\right| <$$
$$< |f(x_0) - Kg(x_0)|\varepsilon + (1 + |g(x_0)|\varepsilon)\frac{\varepsilon}{|f(x_0) - Kg(x_0)| + 1} = |g(x_0)|\varepsilon^2 + \varepsilon.$$

В силу произвольного выбора ε отсюда следует, что

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Если же $K = \infty$, то существует окрестность точки a, в которой $f'(x) \neq 0$. Тогда, меняя местами f и g, из условия

$$\lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$$

по доказанному следует, что $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$, откуда $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$. ◄

§6.5. Формула Тейлора с остаточными членами в форме Лагранжа и Пеано.

Теорема 6.5.1. (Формула Тейлора с ост. членом в ф.Пеано). *Пусть функция $f = f(x)$ имеет производную $n-$того порядка в точке x_0. Тогда в некоторой окрестности $U(x_0) \subset D(f)$ имеет место разложение Тейлора*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

► Существование $n-$той производной функции f в точке x_0 означает, что f определена и $n-1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 (без ограничения общности, можно считать, что эта окрестность совпадает с $U(x_0)$) и имеет $n-$тую производную в самой точке x_0.

Обозначим

$$P_n(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

(здесь предполагается, что $0! = 1$). Тогда для того, чтобы найти предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n},$$

можно $n-1$ раз подряд воспользоваться правилом Лопиталя для случая неопределенности $0/0$ (здесь используется тот факт, что первые $n-1$ производных функции f определены именно в окрестности точки x_0, а не только в самой точке):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-P_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \ = \ \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)-P_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \ = \ \ldots \ = \ \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} \ =$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - \left[f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0)(x-x_0)\right]}{x-x_0} \ = \ \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} - f^{(n)}(x_0) \right).$$

Но по определению производной

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} \ = \ f^{(n)}(x_0),$$

поэтому выражение в скобках, а стало быть, и значение исходного предела, равно 0. Следовательно,

$$f(x) - P_n(x) \ = \ o((x-x_0)^n) \text{ в } U(x_0).$$

◄

Теорема 6.5.2. (единственности). *Пусть функция $f = f(x)$ имеет производную n–того порядка в точке x_0 и в окрестности этой точки удовлетворяет соотношениям*

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \quad \text{и} \quad f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

Тогда необходимо $a_k \ = \ b_k$ для всех $k \leqslant n$.

► Пусть это не так. Обозначим $m_k \ = \ a_k - b_k$ и выберем номер s такой, что

$$m_0 \ = \ m_1 \ = \ \ldots \ = \ m_{s-1} \ = \ 0 \neq m_s.$$

Вычтем одно представление функции f из другого, с учетом выбора s получаем:

$$0 \ = \ \sum_{k=s}^{n} m_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \iff m_s(x-x_0)^s \ = \ (x-x_0)^{s+1}(m_{s+1}+m_{s+2}(x-x_0)+\ldots+m_n(x-x_0)^{n-s-1}) + o((x-x_0)^n).$$

Очевидно, что в правой части оба слагаемых суть $o((x-x_0)^s)$, поэтому такова и их сумма. С другой стороны, левая часть не является $o((x-x_0)^s)$, поскольку

$$\lim_{x\to x_0} \frac{m_s(x-x_0)^s}{(x-x_0)^s} \ = \ m_s \neq 0 \quad \text{– противоречие.}$$

◄

Многочлен

$$P_n(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

называется многочленом Тейлора степени n функции f в точке x_0. Согласно теореме единственности это единственный многочлен степени n, приближающий в точке x_0 функцию f с порядком малости погрешности $o((x-x_0)^n)$.

Остаточный член в форме Пеано используется при решении задач асимптотического характера (например, при вычислении пределов или сравнении порядков бесконечно малых). В частности, можно сформулировать критерий того, является ли точка x_0 локальным экстремумом функции f.

Теорема 6.5.3. (Критерий локального экстремума). *Пусть функция $f = f(x)$ имеет n–тую производную в точке x_0, причем*

$$f'(x_0) \ = \ f''(x_0) \ = \ \dots \ = \ f^{(n-1)}(x_0) \ = \ 0 \neq f^{(n)}(x_0).$$

Тогда:

(1) если n нечетно, то x_0 – не точка локального экстремума функции f;

(2) если n четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$ ($f^{(n)}(x_0) < 0$), то x_0 – точка локального минимума (соответственно, максимума).

► Формула Тейлора для функции f в окрестности $U(x_0) \subset D(f)$ с остаточным членом в форме Пеано с учетом условия на производные принимает вид

$$f(x) \ = \ f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n) \implies f(x) - f(x_0) \ = \ (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right),$$

где $\alpha \ = \ \alpha(x)$ – бесконечно малая в точке x_0.

(1) Пусть n четно. Тогда $(x - x_0)^n \geqslant 0$ для любого $x \in U(x_0)$. Рассмотрим случай $f^{(n)}(x_0) > 0$; случай $f^{(n)}(x_0) < 0$ рассматривается аналогично.

Поскольку

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right) \ = \ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0,$$

по лемме о сохранении знака существует подокрестность $V(x_0) \subset U(x_0)$, в которой выполнено

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) > \frac{1}{2} \cdot \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0,$$

поэтому из разложения Тейлора $f(x) - f(x_0) > 0$ для любого $x \in V(x_0)$. То есть x_0 – точка локального минимума функции f.

(2) Пусть n нечетно. Тогда по лемме о сохранении знака существует подокрестность $W(x_0) \subset U(x_0)$, в которой

$$\operatorname{sgn} \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \alpha(x) \right) \ = \ \operatorname{sgn} f^{(n)}(x_0) \ = \ \text{const}\,.$$

Но при переходе через x_0 знак $(x - x_0)^n$ при нечетном n меняется. Следовательно, то же самое относится и к разности $f(x) - f(x_0)$. Поэтому x_0 не может быть точкой локального экстремума.

◄

Для определения численной погрешности приближения функции ее многочленом Тейлора в произвольной точке x из окрестности x_0 или ответа на вопрос о сходимости последовательности $\{P_n(x)\}$ при $n \to \infty$ знания асимптотики остаточного члена недостаточно, поэтому используют явные формулы, самой распространенной из которых является форма Лагранжа.

Теорема 6.5.4. (Формула Тейлора с ост. членом в ф.Лагранжа). *Пусть функция $f = f(x)$ в некоторой окрестности $U(x_0) \subset D(f)$ имеет производную $(n + 1)$–го порядка. Тогда для любого $x \in U(x_0)$ существует точка $\xi \in (x_0, x)$ такая, что*

$$f(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

► Опять же, условие существования $(n + 1)$–й производной функции f означает дополнительно и непрерывность первых n производных в $U(x_0)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F \;=\; F(y) \;=\; f(y) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(y-x_0)^k - A(y-x_0)^{n+1}.$$

Поскольку сам многочлен и все его производные непрерывны на всей прямой (и, в частности, в $U(x_0)$), функция F наследует все свойства непрерывной дифференцируемости функции f, то есть функции F, F', ... , $F^{(n)}$ непрерывны в $U(x_0)$, а $F^{(n+1)}$ определена в $U(x_0)$.

Выберем значение A так, чтобы $F(x) \;=\; 0$. Это возможно, потому что при подстановке $y = x$ в формулу для F уравнение $F(x) \;=\; 0$ линейно по A с коэффициентом при A, равным $(x-x_0)^{n+1} \neq 0$.

Вычислим все производные функции F вплоть до $n-$того порядка и их значения в точке x_0:

$$F'(y) \;=\; f'(y) - \left[f'(x_0) + (y-x_0)\sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(y-x_0)^{k-2}\right] - A(n+1)(y-x_0)^n \implies F'(x_0) \;=\; 0;$$

$$F''(y) \;=\; f''(y) - \left[f''(x_0) + (y-x_0)\sum_{k=3}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(y-x_0)^{k-3}\right] - A(n+1)n(y-x_0)^{n-1} \implies F''(x_0) \;=\; 0;$$

$$\vdots$$

$$F^{(j)}(y) \;=\; f^{(j)}(y) - \left[f^{(j)}(x_0) + (y-x_0)\sum_{k=j+1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-j)!}(y-x_0)^{k-j-1}\right] - A\frac{(n+1)!}{(n+1-j)!}(y-x_0)^{n+1-j} \implies F^{(j)}(x_0) \;=\; 0;$$

$$\vdots$$

$$F^{(n-1)}(y) \;=\; f^{(n-1)}(y) - \left[f^{(n-1)}(x_0) + f^{(n-1)}(x_0)(y-x_0)\right] - A\frac{(n+1)!}{2}(y-x_0)^2 \implies F^{(n-1)}(x_0) \;=\; 0;$$

$$F^{(n)}(y) \;=\; f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x_0) - A(n+1)!(y-x_0) \implies F^{(n)}(x_0) \;=\; 0.$$

Итак, все условия следствия теоремы Ролля выполнены, поэтому существует точка $\xi \in [x_0, x]$ такая, что

$$F^{(n+1)}(\xi) \;=\; f^{(n+1)}(\xi) - A(n+1)! \;=\; 0 \iff A \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

◄

§6.6. Формулы Тейлора-Маклорена некоторых элементарных функций.

Формулу Тейлора, записанная в точке $x_0 \;=\; 0$, иногда называют формулой Тейлора-Маклорена или просто Маклорена. В настоящем разделе мы получим формулы Тейлора-Маклорена функций $\sin x$, $\cos x$, e^x и $\ln 1 + x$ – то есть тех функций, для которых мы получили общие формулы производных всех порядков.

Пример 6.6.1. $f(x) \;=\; e^x$. $f(x) \;=\; f'(x) \;=\; \ldots \;=\; f^{(n)}(x) \;=\; e^x \implies f(0) \;=\; f'(0) \;=\; \ldots \;=\; f^{(n)}(0) \;=\; 1$.

Формула Тейлора функции e^x с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$e^x \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad \text{где } \theta \in (0,1).$$

Погрешность приближения

$$\left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}e^{|x|}}{(n+1)!} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

поскольку для $a > 0$ справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} \;=\; 0$ (упражнение).

Неожиданным теоретико-числовым следствием этой формулы является

Следствие 6.6.2. *Число e иррационально.*

► Пусть $e = \dfrac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$. Подставляя в формулу Тейлора для e^x значение $x = 1$, получаем:

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!} \implies 0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{e^\theta}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!},$$

поскольку $e^\theta < e$ при $\theta \in (0,1)$. Домножая неравенства на $n!$, заключаем, что при $n > 2$ справедлива оценка

$$0 < n!e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < \frac{e}{n+1} < \frac{3}{n+1} < 1.$$

С другой стороны, раз $e = \dfrac{m}{n}$, то

$$n!e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = (n-1)!m - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \in \mathbb{Z}.$$

Но между 0 и 1 нет целых чисел – противоречие. ◄

Пример 6.6.3. $f(x) = \sin x$. $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi k}{2}\right) \implies f^{(k)}(0) = \sin\dfrac{\pi k}{2}$.

Для четных k $\sin\dfrac{\pi k}{2} = 0$, для нечетных k $\sin\dfrac{\pi k}{2} = (-1)^{(k-1)/2}$. Стало быть, формула Тейлора функции $\sin x$ с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^n \sin\left(\theta + \frac{\pi(2n+1)}{2}\right) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{где } \theta \in (0,1).$$

Погрешность приближения

$$\left|\sin\left(\theta + \frac{\pi(2n+1)}{2}\right) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Пример 6.6.4. $f(x) = \cos x$. $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi k}{2}\right) \implies f^{(k)}(0) = \cos\dfrac{\pi k}{2}$.

Для нечетных k $\cos\dfrac{\pi k}{2} = 0$, для четных k $\cos\dfrac{\pi k}{2} = (-1)^{k/2}$. Стало быть, формула Тейлора функции $\cos x$ с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \cos\left(\theta + \pi(n+1)\right) \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad \text{где } \theta \in (0,1).$$

Погрешность приближения

$$\left|\cos\left(\theta + \pi(n+1)\right) \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Заметим, что синус раскладывается по нечетным степеням x, а косинус – по четным, и если сложить формулы Тейлора для синуса и косинуса, то получится формула, очень похожая на формулу Тейлора экспоненты. И это не случайно. А именно, поскольку остаточные члены всех записанных нами формул стремятся к 0 при $n \to \infty$, обретают смысл формально записанные числовые ряды

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \qquad \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \qquad \text{и} \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Особое значение эти ряды имеют, если x считать не вещественным, а комплексным. В этом случае можно принять эти ряды за определение функций комплексного переменного (подробнее об этом пойдет речь далее, при изучении вопросов равномерной сходимости функциональных рядов). Мы не будем глубоко вдаваться в эту теорию, а лишь докажем один известный факт, связывающий комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями.

Теорема 6.6.5. (Формула Эйлера). *Для любого вещественного числа x справедливо*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

► По определению

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}.$$

Далее выделим действительную и мнимую часть правой части равенства. Вообще говоря, нужно обосновывать, почему можно переставлять слагаемые в этом ряде, однако мы примем этот факт на веру. (Строгое обоснование будет приведено при более подробном изучении вопросов сходимости рядов).

$$\mathfrak{Re}\, e^{ix} = 1 + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \ldots + \frac{i^{2k}x^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x;$$

$$\mathfrak{Im}\, e^{ix} = x + \frac{i^2x^3}{3!} + \ldots + \frac{i^{2k-2}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = \sin x.$$

Таким образом, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. ◄

Пример 6.6.6. $f(x) = \ln(1+x)$. $f^{(k)} = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \implies f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$.

Формула Тейлора функции $\ln(1+x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}, \quad \text{где } \theta \in (0,1).$$

Погрешность приближения

$$\left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Таким образом, формальный ряд для $\ln(1+x)$ также имеет смысл. Однако обобщить его для случая комплексного x просто так не получится. В самом деле, из формулы Эйлера следует, что комплексная экспонента $2\pi-$периодична, поэтому обратная к ней функция получается многозначной. Мы не будем останавливаться на этом вопросе, ибо он не есть предмет нашего курса.

§6.7. Выпуклость функции. Точки перегиба.

Определение 6.7.1. Функция $f = f(x)$ называется выпуклой вниз (вверх) на множестве $E \subset D(f)$, если для любых точек x_1, x_2 из E и любых чисел q_1, q_2 таких, что $\dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q_2} = 1$, выполнено

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leqslant q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$$

(соответственно, $f(q_1x_1 + q_2x_2) \geqslant q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$).

Теорема 6.7.2. (Критерий выпуклости на интервале). *Дважды дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f = f(x)$ выпукла вниз (вверх) на нем, если и только если $f''(x) \geqslant 0$ (соответственно, $f''(x) \leqslant 0$) для любого $x \in (a,b)$.*

► Проведем доказательство для выпуклых вниз функций. Пусть f выпукла вниз на (a,b). Выберем точки x, x_1, x_2 интервала (a,b) такие, что $x_1 < x < x_2$. Поскольку

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \;=\; 1 \quad \text{и} \quad \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2 \;=\; x,$$

из определения выпуклости для функции f выполнено

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2) \implies \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \;=\; \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Переходя к пределам при $x \to x_1$ и $x \to x_2$, получаем:

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{и} \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2),$$

поэтому $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. В силу произвольного выбора x_1 и x_2 заключаем, что f' возрастает на (a,b), что равносильно условию $f''(x) \geqslant 0$ для всех $x \in (a,b)$. ◄

Теорема 6.7.3. (Геометрический смысл выпуклости). *Дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f = f(x)$ выпукла вниз (вверх) на нем, если и только если для любых точек x_0 и x интервала (a,b) выполнено*

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

(соответственно, $f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$).

Геометрически правая часть задает (как несложно убедиться) уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, поэтому неравенство означает, что для любой точки $x_0 \in (a,b)$ все точки графика f с абсциссами из (a,b) лежат не ниже (не выше) касательной в точке x_0.

► Проведем доказательство для выпуклых вниз функций.

Пусть f выпукла вниз на (a,b). Выберем точки x_0, x_1, x_2 интервала (a,b) такие, что $x_1 < x_0 < x_2$, тогда, повторяя рассуждения из доказательства критерия выпуклости, получаем, что

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}.$$

Перейдем теперь в неравенстве к пределам при $x_1 \to x_0$ и $x_2 \to x_0$:

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad \text{и} \quad \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leqslant f'(x_0),$$

откуда, в силу произвольного выбора x_1 и x_2, заключаем, что для любых x_0 и x из (a,b)

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ при } x < x_0 \quad \text{и} \quad f'(x_0) \geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ при } x > x_0.$$

Объединяя неравенства, получаем, что

$$f(x) - f(x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0).$$

Теперь пусть для любых x и x_0 из (a,b) выполнено

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Это равносильно условиям

$$f'(x_0) \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ при } x < x_0 \quad \text{и} \quad f'(x_0) \geqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ при } x > x_0.$$

Выберем точки x_1 и x_2 интервала (a,b) такие, что $x_1 < x_0 < x_2$, тогда

$$\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0},$$

что и означает, что f выпукла вниз на (a,b). ◄

Определение 6.7.4. Точка x_0 называется точкой перегиба функции $f = f(x)$, если существует окрестность

$$U_\delta(x_0) \ = \ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D(f)$$

такая, что:

либо f выпукла вниз на $(x_0 - \delta, x_0)$ и выпукла вверх на $(x_0, x_0 + \delta)$

либо f выпукла вверх на $(x_0 - \delta, x_0)$ и выпукла вниз на $(x_0, x_0 + \delta)$.

Теорема 6.7.5. (Необходимое условие точки перегиба). *Если x_0 – точка перегиба дважды дифференцируемой в этой точке функции $f = f(x)$, то необходимо $f''(x_0) \ = \ 0$.*

► Выпишем первые 3 члена разложения Тейлора функции f в окрестности $U(x_0) \subset D(f)$:

$$f(x) \ = \ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Обозначим $l(x) \ = \ f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (это в точности уравнение касательной в точке x_0), тогда

$$f(x) - l(x) \ = \ \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \ = \ (x - x_0)^2 \left(\frac{f''(x_0)}{2} + \alpha(x) \right),$$

где $\alpha = \alpha(x)$ – бесконечно малая в точке x_0.

Пусть $f''(x_0) \neq 0$, тогда по лемме о сохранении знака существует подокрестность $V(x_0) \subset U(x_0)$, в которой

$$\operatorname{sgn}(f(x) - l(x)) \ = \ \operatorname{sgn} f''(x_0) \ = \ \text{const}\,.$$

То есть при переходе через x_0 функция f не меняет выпуклость – противоречие. ◄

Теорема 6.7.6. *Пусть для дважды дифференцируемой в точке x_0 функции $f = f(x)$ существует окрестность*

$$U_\delta(x_0) \ = \ (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D(f)$$

такая, что знак f'' на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ различен. Тогда x_0 – точка перегиба функции f.

► В обозначениях предыдущей теоремы выберем подокрестность $W(x_0) \subset U(x_0)$, в которой

$$\operatorname{sgn}(f(x) - l(x)) \ = \ \operatorname{sgn} f''(x_0).$$

Тогда при переходе через x_0 знак f'', а следовательно, и разности $f(x) - l(x)$ меняется. Поэтому x_0 – точка перегиба f. ◄

Теорема 6.7.7. *Пусть функция $f = f(x)$ имеет в точке x_0 третью производную, причем*

$$f''(x_0) \ = \ 0 \neq f'''(x_0).$$

Тогда x_0 – точка перегиба функции f.

► В обозначениях предыдущей теоремы,

$$f(x) - l(x) \ = \ \frac{1}{6}f'''(x_0) + o((x - x_0)^3) \ = \ (x - x_0)^3 \left(\frac{f'''(x_0)}{6} + \alpha(x) \right),$$

где $\alpha = \alpha(x)$ – бесконечно малая в точке x_0.

Первый множитель меняет знак при переходе через x_0, второй не меняет знак в некоторой окрестности точки x_0 по лемме о сохранении знака. Значит, $f(x) - l(x)$ меняет знак при переходе через x_0, то есть x_0 – точка перегиба f. ◄

§6.8. Классические неравенства.

Лемма 6.8.1. *Для любого $x > 0$ справедливо*

$$x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha \text{ при } \alpha \in (0,1) \quad \text{и} \quad x^\alpha - \alpha x \geqslant 1 - \alpha \text{ при } \alpha > 1.$$

► Рассмотрим функцию

$$f(x) \;=\; x^\alpha - \alpha x - 1 + \alpha.$$

Ее производная: $f'(x) \;=\; \alpha x^{\alpha-1} - \alpha \;=\; \alpha\left(x^{\alpha-1} - 1\right)$.

Если $\alpha \in (0,1)$, то

$$\operatorname{sgn} f'(x) \;=\; \operatorname{sgn}(1-x),$$

поэтому $x = 1$ – точка локального максимума функции f. Стало быть, $f(x) \leqslant f(1) \;=\; 0$ для любого $x > 0$, что равносильно исходному неравенству.

Случай $\alpha > 1$ рассматривается аналогично. ◄

Теорема 6.8.2. (Неравенство Юнга). *Пусть a, b, p, q – положительные числа, причем $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \;=\; 1$. Тогда*

$$a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

► Положим $x \;=\; \dfrac{a}{b} > 0$, $\alpha \;=\; \dfrac{1}{p} \in (0,1)$. Тогда по лемме

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} - \frac{1}{p}\left(\frac{a}{b}\right) \leqslant 1 - \frac{1}{p} \;=\; \frac{1}{q}.$$

Домножив обе части на b, получим:

$$a^{1/p} b^{1/q} \;=\; a^{1/p} b^{1-1/p} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

◄

Теорема 6.8.3. (Неравенство Гельдера для сумм). *Пусть $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, p, q – положительные числа, причем $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \;=\; 1$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q}.$$

► Обозначим

$$X \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k^p, \quad Y \;=\; \sum_{k=1}^{n} b_k^q, \quad A_k \;=\; \frac{a_k^p}{X}, \quad B_k \;=\; \frac{b_k^q}{Y}.$$

Тогда по неравенству Юнга:

$$A_k^{1/p} B_k^{1/q} \leqslant \frac{A_k}{p} + \frac{B_k}{q} \iff \frac{a_k}{X^{1/p}} \cdot \frac{b_k}{Y^{1/q}} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{a_k^p}{X} + \frac{1}{q} \cdot \frac{b_k^q}{Y}.$$

Суммируя по k, заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{X^{1/p}} \cdot \frac{b_k}{Y^{1/q}}\right) \leqslant \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^p}{X} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^q}{Y}.$$

Но по определению чисел X и Y обе суммы в правой части равенства равны 1. Значит, справа стоит сумма $frac1p + \dfrac{1}{q} \;=\; 1$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant X^{1/p} Y^{1/q},$$

что равносильно исходному неравенству. ◄

Теорема 6.8.4. (Неравенство Минковского для сумм). *Пусть $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, – положительные числа, $m > 1$. Тогда*

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^m\right)^{1/m} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^m\right)^{1/m} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^m\right)^{1/m}.$$

► В самом деле, по неравенству Гельдера для $p = m$, $q = \dfrac{m}{m-1}$ имеем

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^m &= \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)(a_k+b_k)^{m-1} = \sum_{k=1}^{n}a_k(a_k+b_k)^{m-1} + \sum_{k=1}^{n}b_k(a_k+b_k)^{m-1} \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^m\right)^{1/m}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[(a_k+b_k)^{m-1}\right]^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^m\right)^{1/m}\left(\sum_{k=1}^{n}\left[(a_k+b_k)^{m-1}\right]^{\frac{m}{m-1}}\right)^{\frac{m-1}{m}} = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^m\right)^{\frac{m-1}{m}}\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^m\right)^{1/m} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^m\right)^{1/m}\right].\end{aligned}$$

Сокращая левую и правую часть на первый множитель, получаем

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^m\right)^{1/m} = \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^m\right)^{1-\frac{m-1}{m}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^m\right)^{1/m} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^m\right)^{1/m}.$$

◄

Теорема 6.8.5. (Неравенство Йенсена). *Пусть функция $f = f(x)$ выпукла вниз (вверх) на множестве $E \subset D(f)$, а числа $q_1, \ldots, q_n$ таковы, что $q_1 + \ldots + q_n = 1$. Тогда для любых точек $x_1, \ldots, x_n$ из E справедливо*

$$f(q_1x_1 + \ldots + q_nx_n) \leqslant q_1f(x_1) + \ldots + q_nf(x_n).$$

(соответственно, $f(q_1x_1 + \ldots + q_nx_n) \geqslant q_1f(x_1) + \ldots + q_nf(x_n)$).

► Проведем доказательство для выпуклых вниз функций индукцией по n.

При $n = 1$ из условия получаем, что $q_1 = 1$ и $f(x_1) \leqslant f(x_1)$ – тривиально. При $n = 2$ имеем определение выпуклости.

Пусть утверждение доказано для некоторого N. Тогда:

$$\begin{aligned}f(q_1x_1 + \ldots + q_Nx_N + q_{N+1}x_{N+1}) &= f\left(q_1x_1 + \ldots + (q_N+q_{N+1})\left(\frac{q_N}{q_N+q_{N+1}}x_N + \frac{q_{N+1}}{q_N+q_{N+1}}x_{N+1}\right)\right) \overset{\text{предп.инд.}}{\leqslant} \\ &\leqslant q_1f(x_1) + \ldots + (q_N+q_{N+1})f\left(\frac{q_N}{q_N+q_{N+1}}x_N + \frac{q_{N+1}}{q_N+q_{N+1}}x_{N+1}\right) \overset{\text{база инд.}}{\leqslant} \\ &\leqslant q_1f(x_1) + \ldots + (q_N+q_{N+1})\frac{q_N}{q_N+q_{N+1}}f(x_N) + (q_N+q_{N+1})\frac{q_{N+1}}{q_N+q_{N+1}}f(x_{N+1}) = \\ &= q_1f(x_1) + \ldots + q_Nf(x_N) + q_{N+1}f(x_{N+1}).\end{aligned}$$

◄