К броуновскому движению

В.А. Зорич

Аннотация

Мы напомним полезный расчёт, связанный с броуновским движением, а также напомним об истоках большой области современной математики, называемой «Случайные процессы».

1. Исходные допущения. Рассматриваем движение броуновской частицы в жидкости.

Опыт и теория показывают, что если частица движется в жидкости со скоростью v, то на неё действует сила сопротивления F, пропорциональная скорости, если скорость v не слишком велика. Коэффициент пропорциональности B в формуле $v = BF$ называется *подвижностью частицы.*

Подвижность частицы можно измерить, например, по скорости установившегося её движения под действием разности силы тяжести и архимедовой подъёмной силы, действующей на частицу.

В случае, когда частица имеет форму шарика радиуса a, Стокс теоретически нашёл, что $B = \frac{1}{6\pi\eta a}$, где η — коэффициент внутреннего трения, называемый коэффициентом вязкости или просто вязкостью жидкости.

Пусть m — масса частицы.

2. Уравнение движения. Уравнение движения броуновской частицы в направлении оси x имеет вид

$$m\ddot{x} = -B^{-1}\dot{x} + X \ , \tag{1}$$

где $-B^{-1}\dot{x}$ — регулярная сила сопротивления, а слагаемое X должно учитывать беспорядочные толчки, которые частица испытывает под действием молекул жидкости. Среднее значение силы X равно нулю.

Умножим уравнение (1) на x и, воспользовавшись тождествами $\frac{d}{dt}x^2 = 2x\dot{x}$ и $\frac{d^2}{dt^2}x^2 = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x}$, приведём уравнение (1) к виду

$$m\frac{d^2}{dt^2}x^2 + B^{-1}\frac{d}{dt}x^2 - 2m\dot{x}^2 = 2Xx \ . \tag{2}$$

Усредняя уравнение (2) по всем таким броуновским частицам, и, учитывая, что $\langle Xx\rangle = 0$ (поскольку $\langle X\rangle = 0$) и то, что из термодинамических соображений $\langle m\dot{x}^2\rangle = kT$, получаем

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle x^2\rangle + B^{-1}\frac{d}{dt}\langle x^2\rangle - 2kT = 0 \ . \tag{3}$$

3. Исследование движения. Сделаем несколько простых, но важных, общих замечаний, касающихся движения броуновской частицы.

Величина смещения частицы за промежуток времени $[t_1, t_2]$ от момента t_1 до момента t_2 является случайной величиной, которая, очевидно, зависит только от разности $\tau = t_2 - t_1$. Обозначим эту случайную величину символом x_τ.

Далее, $x_{t+\tau} = x_t + x_\tau$. В силу независимости x_t, x_τ, имеем $\langle x_t x_\tau\rangle = 0$, поэтому $\langle x^2_{t+\tau}\rangle = \langle x^2_t\rangle + \langle x^2_\tau\rangle$.

Итак, функция $f(t) = \langle x^2_t\rangle$, которая уже не случайная величина, удовлетворят уравнению $f(t+\tau) = f(t) + f(\tau)$. Это означает, что величина $\langle x^2_t\rangle$ является линейной однородной функцией At времени t, причём это справедливо для любых броуновских частиц.

Коэффициент A теперь легко находится. Подставляя $\langle x^2_t\rangle = At$ в уравнение (3), находим, что

$$\langle x^2_t\rangle = 2kTBt \ .$$

Это знаменитая *формула Эйнштейна.*

В этой формуле x — это проекция вектора $\mathbf{r}$ смещения частицы на направление одной оси x. Учитывая равноправность осей и то, что $\mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$, получаем

$$\langle \mathbf{r}^2\rangle = 6kTBt \ .$$

Для шарообразных частиц с учётом формулы Стокса $B = \frac{1}{6\pi\eta a}$, имеем

$$\langle \mathbf{r}^2\rangle = \frac{kTt}{\pi\eta a} \ .$$

4. Дискретный вариант. В дискретном случае можно было бы рассуждать так.

Пусть $\mathbf{r}_n$ — вектор смещения броуновской частицы от точки выхода за n шагов, и пусть $\mathbf{\Delta}_n$ — вектор смещения на n-м шаге. Будем считать, что на каждом шаге все направления смещения в пространстве равноправны, а величина $|\mathbf{\Delta}_n| = \Delta$ шага постоянна.

Тогда $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_{n-1} + \boldsymbol{\Delta}_n$ и $\mathbf{r}_n^2 = \mathbf{r}_{n-1}^2 + 2\mathbf{r}_{n-1}\boldsymbol{\Delta}_n + \boldsymbol{\Delta}_n^2$. Векторы $\mathbf{r}_{n-1}, \boldsymbol{\Delta}_n$ независимы и $\langle \boldsymbol{\Delta}_n \rangle = 0$, поэтому осреднение по многим наблюдениям процесса за n шагов позволяет заключить, что в среднем

$$\langle \mathbf{r}_n^2 \rangle = \langle \mathbf{r}_{n-1}^2 \rangle + \Delta^2.$$

Тогда по индукции $\langle \mathbf{r}_n^2 \rangle = n\Delta^2$ и

$$|\mathbf{r}_n| = \Delta\sqrt{n}.$$

Здесь $\mathbf{r}_n$, разумеется, мог быть вектором в пространстве $\mathbb{R}^d$ произвольной размерности d. Проекция $\mathrm{pr}_\xi\, \mathbf{r}_n$ такого вектора на любое направление ξ (в силу теоремы Пифагора) испытывала бы одномерное броуновское движение $\langle (\mathrm{pr}_\xi\, \mathbf{r}_n)^2 \rangle = nd^{-1}\Delta^2$.

5. Историческая справка.

Идея атомного строения вещества, как и идея гелеоцентричности нашей планетной системы, древняя, но облик эффективной теории (а не философской идеи) приобрела относительно недавно. Как ни странно, первым экспериментальным подтверждением атомизма и молекулярного строения вещества считается броуновское движение, открытое английским ботаником Робертом Броуном (Броун, Браун, Brown) всего-то в 1827 или 1828 году.

Броун наблюдал в микроскоп хаотичное движение цветочной пыльцы. Как отмечает Фейнман [1] (и это впечатляет), Броун был достаточно сведущ, чтобы понять, что перед ним не живые существа. Чтобы доказать это, «Броун разыскал обломок кварца, в котором была заполненная водой полость. Вода попала туда много миллионов лет тому назад, но и в такой воде соринки продолжали свою пляску».

С присущей Фейнману образностью изложения любого научного сюжета он, перенося нас в привычные масштабы, предлагает представить себе, что мы очень издалека наблюдаем игру в пушбол. Вы знаете, что под большим мячом много людей и каждый толкает мяч, куда хочет. Игроков не видно, но видно беспорядочное движение мяча.

Математические основы теории броуновского движения с важными для физики выводами были заложены Эйнштейном в знаменитом 1905 году его интеллектуального взрыва работой [2] и последовавшей за ней работой [3], которая уже так и называлась «К теории броуновского движения». Во многих отношениях интересны и очень показательны следующие вводные строки работы [2].

«В этой работе будет показано, что согласно молекулярно-кинетической теории теплоты взвешенные в жидкости тела микроскопических размеров вследствие молекулярного теплового движения должны совершать движения такой величины, что легко могут быть обнаружены под микроскопом. Возможно, что рассматриваемые движения тождественны с так называемым броуновским движением; однако доступные мне данные относительно последнего настолько неточны, что я не мог составить об этом определенного мнения.

Если рассматриваемое движение вместе с ожидаемыми закономерностями действительно будет наблюдаться, то классическая термодинамика не может считаться вполне справедливой уже для микроскопически различимых областей, и тогда возможно точное определение истинных атомных размеров. Если же, наоборот, предсказание этого движения не оправдается, то это будет веским аргументом против молекулярно-кинетического представления о теплоте».

Статьи Эйнштейна получили многоплановые математические и физические развития (в исследованиях Смолуховского, Ланжевена, Перрена[1] ...). В математическом аспекте эти работы стали истоком большой области современной математики, называемой «Случайные процессы».

А почти за полвека до этого прозорливый гений Максвелл, понимая проблемы, к которым приводит классическая статистическая термодинамика, видимо, предчувствуя квантовую революцию, прямо утверждал, что «Истинная логика нашего мира — это подсчёт вероятностей» [4].

Литература

[**1**] Р. Фейнман. Фейнмановские лекции по физике. Книга 4 (кинетика, теплота, звук). Москва, Изд-во Мир, 1967. (С. 45).

[**2**] A. Einstein. Über die von molekularkinetischen Theorie der Wärme geforgerte Bewegung von in rühenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. Ann. Phys., 1905, **17**, 549–560.

Рус. перевод:

[1] Реализовав идеи работы [2], Перрен (впоследствии лауреат Нобелевской премии 1926 года за исследования по дискретной природе материи) «сумел сделать то, что казалось совершенно невозможным,— взвесить молекулы и атомы». Сам Эйнштейн получил Нобелевскую премию только в 1921 году, но не за эти работы, и не за теорию относительности, а за работу того же 1905 года о фотоэффекте и квантовой теории света.(А за теорию относительности Нобелевскую премию так и не дали ни Эйнштейну, ни Пуанкаре, ни Лоренцу, ни Минковскому.)

А. Эйнштейн. О движении взвешенных в покоящейся жидкости частиц, требуемом молекулярно-кинетической теорией теплоты.

Собрание научных трудов, Том III. — М.: Наука, 1966. С. 108–117.

[**3**] A. Einstein. Zur Theorie der Brownschen Bewegung. Ann. Phys., 1906, **19**, 371-381.

Рус. перевод:

А. Эйнштейн. К теории броуновского движения.

Собрание научных трудов, Том III. — М.: Наука, 1966. С. 118–127.

[**4**] Р. Фейнман. Фейнмановские лекции по физике. Книга 1 (современная наука о природе, законы механики). Москва, Изд-во Мир, 1965. (С. 102).

В.А. Зорич (V.A. Zorich)

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

E-mail : **vzor@mccme.ru**