Хорошо ли мы знаем векторное произведение?

И.Х. Сабитов

1. По-видимому,если не у всех, то у многих при изучении в курсе аналитической геометрии понятия векторного произведения двух векторов возникало чувство логического дискомфорта или даже когнитивного диссонанса. По определению в учебниках и справочниках, векторное произведение двух векторов - это *вектор*, ортогональный к обоим сомножителям, и далее дается описание одного нужного из двух его возможных направлений[1], а про длину говорится, что она численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях (не очень аккуратные авторы и преподаватели даже пропускают слово «численно» и пишут, что его длина равна площади параллелограмма, забывая, что длина и площадь имеют разные размерности, и для них, например, операция сложения не выполнима). Итак, векторное произведение - это вектор, и его модуль, как длина, должен измеряться в единицах длины. А на следующем же занятии изучается смешанное произведение трех векторов, в котором векторное произведение двух векторов умножается скалярно на третий вектор и получается величина, измеряемая в единицах объема, трактуя длину векторного произведения уже как величину размерности 2, т.е. как площадь! Возникает еще один естественный вопрос: пусть мы изменили масштаб и стали измерять длины, скажем, в миллиметрах вместо сантиметров. Тогда длины *всех* векторов в численном выражении изменятся в 10 раз, значит, значения площади изменятся в 100 раз, и длина вектора, являющегося векторным произведением, тоже изменится в 100 раз, а между тем она, как длина *любого* вектора, должна измениться только в 10 раз. В настоящей работе мы хотим выяснить, почему возможны такие противоречия и как их избежать.

2. Начнем с разбора второго казуса. Пусть у нас сначала единицей из-

[1] Напомним, что умножаемая упорядоченная пара векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и результат умножения $\mathbf{c}$ должны составлять *правую* тройку $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ *независимо* от ориентации выбранного базиса.

мерения был сантиметр и был ортонормированный базис единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ с правилом векторного произведения $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3, (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1, (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$. Пусть есть числовая прямая L с фиксированным положением на ней точки, соответствующей числу 0. Тогда скалярное произведение $(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = 1$ дает, по его определению, некоторую точку A на числовой прямой, соответствующую числу 1. Пусть мы изменили масштаб, и выбрали, скажем, как единицу измерения миллиметр и, соответственно, базисные единичные векторы $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \frac{1}{10}\mathbf{e}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2 = \frac{1}{10}\mathbf{e}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{10}\mathbf{e}_3$. Ожидаемый казус появится в том случае, если можно утверждать, что будем иметь векторные произведения по правилам

$$(\tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_3, (\tilde{\mathbf{e}}_2 \times \tilde{\mathbf{e}}_3) = \mathbf{e}_1, (\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \tilde{\mathbf{e}}_1) = \tilde{\mathbf{e}}_2. \qquad (1)$$

Действительно, тогда будет $\mathbf{e}_1 = 10\tilde{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2 = 10\tilde{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_3 = 10\tilde{\mathbf{e}}_3$, и получится, что векторное произведение $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = 100\tilde{\mathbf{e}}_3 = 10\mathbf{e}_3$, но оно было равно $\mathbf{e}_3$, т.е. должно было стать равным $10\tilde{\mathbf{e}}_3$. С другой стороны, если мы примем векторы $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ за единичные с выполнением равенств (1), тогда их скалярные произведения самих на себя будут равны 1, т.е. единице на числовой прямой L будет соответствовать другая точка, отличная от A (а скалярному произведению $\mathbf{e}_1$ на себя будет соответствовать точка со значением 100), следовательно, в рассматриваемом линейном пространстве будет *другое* скалярное произведение. Другими словами, мы просто установили, что инвариантность векторного произведения при изменении базиса имеет место только относительно ортогональных преобразований базиса с определителем $+1$. Таким образом, мы можем сказать, что изменение масштаба измерений в линейном пространстве с данным скалярным произведением означает изменение в этом линейном пространстве введенного в нем скалярного произведения.

3. Перейдем к рассмотрению вопроса о разных толкованиях размерности модуля векторного произведения векторов. Пусть нам дано трехмерное евклидовое линейное пространство, т.е. в нем введено скалярное произведение $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ с условиями $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) \geq 0$ и $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$. В разложении вектора $\mathbf{a}$ по некоторому базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \qquad (2)$$

его координаты $a^i, i = 1, 2, 3$, являются *безразмерными* величинами, а модули базисных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, геометрически будучи их длинами, измеряются в единицах длины. Пусть размерность некоторого объекта x обозначается[2] как $]x[$. Всюду дальше считаем, что длины измеряются в сантиметрах, значит, $]|\mathbf{e}_i|[= \text{\textit{см}}$. Для краткости речи размерность модуля вектора будем называть также размерностью вектора, а при записи значении модуля будем указывать при нем его размерность. Значит, для модуля вектора $\mathbf{a}$ будет запись $|\mathbf{a}|$*см*. Координаты вектора при разложении вида (2) называются *контравариантными* координатами, базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ называется *контравариантным* базисом, а вектор $\mathbf{a}$ в представлении (2) называется вектором. в контравариантном представлении. Длина этого вектора через его контравариантные координаты выражается по формуле (если базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ортонормированный)

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a_3)^2} \text{ \textit{см}} \tag{3}$$

или, в общем случае,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\sum_{i,j=1,2,3} g_{ij} a^i a^j} \text{ \textit{см}},$$

где

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j). \tag{4}$$

Пусть дан еще один вектор $\mathbf{b}$ своими контравариантными координатами:

$$\mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3. \tag{5}$$

Найдем контравариантные координаты векторного произведения $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ по его определению, считая, что у нас базис ортонормированный, т.е. векторы

[2] На самом деле общепринятое обозначение размерности $[x]$, но это обозначение нам пригодится позже в другом смысле, поэтому мы выбрали для обозначения размерности другой вариант расположения квадратных скобок; кроме того, поскольку слово «размерность» в математике часто используется как число координат, нужных для описания положения точки в рассматриваемом пространстве, мы будем иногда дополнять численную характеристику физической или геометрической природы объекта выражением «физическая размерность»".

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ единичные, взаимно ортогональные и для них

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3,\ (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2.$$

Как знаем, должен получиться вектор

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (a^1b^3 - a^3b^1)\mathbf{e}_1 + (a^3b^1 - a^1b^3)\mathbf{e}_2 + (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}_3.$$

Как видим, поскольку контравариантные координаты умножаемых векторов - безразмерные величины, то и контравариантные координаты их векторного произведения тоже безразмерные, и для толкования модуля векторного произведения действует правило: *численное* значение модуля или длины векторного произведения равно *численному* значению площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях, т.е.

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = \left(\frac{|\mathbf{a}|\text{см}| \cdot |\mathbf{b}|\text{см}|sin\varphi|}{\text{см}^2} \right) \text{см},$$

где φ - угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. По размерности

$$]|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})|[= \text{см},$$

а коэффициент

$$\frac{|\mathbf{a}|\text{см}| \cdot |\mathbf{b}|\text{см}|sin\varphi|}{\text{см}^2}$$

как раз и является безразмерным числовым значение площади параллелограмма.

4. Такое понимание модуля векторного произведения не пригодно для его использования в определении смешанного произведения $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ трех векторов по правилу $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ с последующим толкованием его как объема построенного на них параллелепипеда, так как объем должен быть величиной размерности *см*^{3}, а при указанном правиле умножения получается величина размерности *см*^{2}. В научной литературе есть другое определение векторного произведения (см., например, книгу [1], стр. 36), дающее для него нужную размерность *см*^{2}, и мы хотим сопоставить его с определением, принятым в учебной литературе.

Напомним вкратце определение векторного произведения в [1] (далее будем называть его определением по Картану). Сначала наряду с контравариантным представлением вектора $\mathbf{a}$ вводится другое его представление, называемое *ковариантным вектором*, с обозначением $\mathbf{a}^*$. Формальное его определение такое: вводятся так называемые ковариантные базисные векторы $\mathbf{e}^j$ по формулам

$$\mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j = g^{i1}\mathbf{e}_1 + g^{i2}\mathbf{e}_2 + g^{i3}\mathbf{e}_3 \quad (i = 1, 2, 3), \tag{6}$$

где g^{ij} - элементы матрицы, обратной к матрице

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{7}$$

(средний член в равенстве (6) соответствует краткому обозначению суммирования по правилу Эйнштейна, когда нужно суммировать элементы с одинаковыми верхними и нижними индексами).

После введения ковариантного базиса, ковариантный вектор $\mathbf{a}^*$ записывается так:

$$\mathbf{a}^* = a_i\mathbf{e}^i \quad (i = 1, 2, 3), \tag{8}$$

где

$$a_i = g_{ij}a^j = g_{i1}a^1 + g_{i2}a^2 + g_{i3}a^3. \tag{9}$$

Операция $g_{ij}a^j$, в реэультате выполнения которой верхний индекс исчез, а появился нижний индекс, называется *операцией опускания* или просто *опусканием* индекса. Отметим, что координаты ковариантного вектора имеют физическую размерность *см*^{2}, а сам ковариантный вектор имеет размерность *см*. Размерность $]\mathbf{e}^j[$ векторов ковариантного базиса равна *см*$^{-1}$.

Обратно, контравариантные векторы $\mathbf{e}_i$ выражаются через ковариантные векторы $\mathbf{e}^j$ по формулам

$$\mathbf{e}_i = g_{ij}\mathbf{e}^j \quad (i = 1, 2, 3).$$

а при этом контравариантные координаты a^i получаются из ковариантных координат a_i операцией $a^i = g^{ij}a_j$, называемой *операцией поднятия* индекса.

Так как для скалярного произведения $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ векторов $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1 + b^2\mathbf{e}_2 + b^3\mathbf{e}_3$ имеем равенство

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \sum_{i,j} g_{ij} a^i b^j,$$

то с учетом формулы (9) получаем новое представление скалярного произведения

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = a_i b^i = a^i b_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{10}$$

В частности, для длины вектора $\mathbf{a}$ имеем формулу

$$|\mathbf{a}|^2 = a_i a^i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{11}$$

(очевидно, в формулах (10) и (11) можно использовать также любые обозначения индекса суммирования).

Теперь разберемся с физическими размерностями. Коэффициенты g_{ij}, как скалярные произведения, имеют физическую размерность $]g_{ij}[= \text{см}^2$. Коэффициенты g^{ij}, как элементы обратной к G матрицы, имеют физическую размерность $]g^{ij}[= \text{см}^{-2}$.

Рассмотрим для примера случай ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Тогда

$$g_{ij} = \delta_{ij} \text{см}^2,$$

где δ_{ij} - символ Кронекера, равный 1 при $i = j$ и 0 при $i \neq j$. Соответственно, матрица G - единичная с $detG = 1\text{см}^6$. По формуле (6) ковариантный вектор $\mathbf{e}^i$ будет иметь вид $\mathbf{e}^i = g^{ii}\mathbf{e}_i$ и поэтому его физическая размерность $]\mathbf{e}^i[= \text{см}^{-1}$. Ковариантный вектор $\mathbf{a}^*$, соответствующий контравариантному вектору $\mathbf{a}$, будет иметь, по формуле (9), координаты $a_i = g_{ii}a^i$, т.е. они физической размерности см^2, а сам вектор $\mathbf{a}^*$ имеет физическую размерность $]\mathbf{a}^*[= \text{см}^1$.

Далее вводится понятие *бивектора* как упорядоченной пары векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, отложенных от некоторого общего начала, с обозначением бивектора как $[\mathbf{ab}]$. Два бивектора $[\mathbf{ab}]$ и $[\mathbf{cd}]$ считаются равными, если эти пары образуют параллелограммы равной площади, расположенные на одной или параллельных плоскостях и имеющие одинаковую ориентацию (если же одна пара состоит из коллинеарных векторов, то в равном им бивекторе составляюшие его векторы тоже должны быть коллинеарными, и в этом случае оба бивектора считаются равными нулю). Считается также, что

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}] = [(-\mathbf{b})\mathbf{a}] = [\mathbf{b}(-\mathbf{a})]. \tag{12}$$

В частности, для бивекторов, задаваемых базисными векторами, имеем

$$[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j] = -[\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i]. \tag{13}$$

Бивекторы $[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j]$ можно назвать базисными бивекторами, так что в трехмерном случае сущестует 3 базисных бивектора $[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1]$.

Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют в некотором базисе $\mathbf{e}_i$ представления

$$\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = b^i\mathbf{e}_i,$$

тогда бивектор $[\mathbf{ab}]$ имеет контравариантные координаты[3]

$$P^{ij} = a^ib^j - a^jb^i \tag{14}$$

и бивектор $[\mathbf{ab}]$ представится в виде

$$[\mathbf{ab}] = \frac{1}{2}\sum_{i,j} P^{ij}[\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j] = P^{12}[\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] + P^{23}[\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] + P^{31}[\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1] \tag{15}$$

(учтены равенства(13)[4]). В более привычном виде эта формула имеет такую запись

$$[\mathbf{ab}] = \begin{vmatrix} [\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3] & [\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1] & [\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2] \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

Площадь параллелограмма, о котором идет речь, называется *мерой* бивектора. Выведем формулу для меры m бивектора $[\mathbf{ab}]$. Для квадрата

[3]Объяснение появления координат именно такого вида можно прочитать в [1], стр. 24.

[4]Кстати, координаты (14) в Математической энциклопедии, 1977, т.1, в статье "Бивектор не совсем удачно названы координатами бивектора *в базисе* $\mathbf{e}_i$, так как бивектор разлагается, как мы видим, не по векторам этого базиса.

площади m^2 параллелограмма с использованием формул (10) и (11) имеем равенства

$$m^2 = |\mathbf{a}|^2\mathbf{b}|^2]sin^2\varphi = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 =$$
$$(a_ia^i)(b_jb^j) - (a^ib_i)(a_jb^j) = \sum_{i,j}(a_ib_j - a_jb_i)a^ib^j, \qquad (16)$$

где φ - угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Мы видим, что физическая размерность меры m бивектора равна *см*^{2}.

Для меры бивектора полезно иметь и другое представление. Для этого введем *ковариантные* координаты бивектора. По аналогии с (14), используя ковариантные координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, положим

$$P_{ij} = a_ib_j - a_jb_i = det\begin{pmatrix} \sum\limits_h g_{ih}a^h & \sum\limits_k g_{jk}a^k \\ \sum\limits_h g_{ih}b^h & \sum\limits_k g_{jk}b^k \end{pmatrix} = \sum_{h,k} g_{ih}g_{jk}P^{hk} \qquad (17)$$

и назовем выражения P_{ij} ковариантными координатами бивектора $[\mathbf{ab}]$. Используя контравариантные и ковариантные координаты бивектора и учитывая, что

$$\sum_{i,j}(a_ib_j - a_jb_i)a^ib^j = \sum_{i,j} P_{ij}a^ib^j = \sum_{j,i} P_{ji}a^jb^i = -\sum_{i,j} P_{ij}a^jb^i$$

формулу (16) для меры бивектора можно представить в виде

$$m^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,j} P_{ij}P^{ij}, \qquad (18)$$

что в трехмерном случае дает формулу

$$m^2 = P_{12}P^{12} + P_{31}P^{31} + P_{23}P^{23}. \qquad (19)$$

Далее можно ввести операцию сложения бивекторов (фактически она уже введена формулой (15)), скалярное произведение бивекторов, угол между бивекторами и тем самым превратить множество бивекторов в линейное евклидовое пространство (предварительно отождествив равные бивекторы между собой или же объявив бивекторы свободными с введенным выше пониманием их равенства). Все эти построения можно осуществить для векторов n-мерного пространства, тогда соответствующее линейное пространство бивекторов будет иметь размерность $d = C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ и только в случае $n = 3$ эта размерность совпадает с размерностью того пространства, из векторов которого строятся бивекторы. В силу совпадения размерностей только в этом случае рассматриваемое пространство векторов изоморфно построенному пространству бивекторов. Более того, изоморфизм можно построить, сопоставляя каждому бивектору $[\mathbf{ab}]$ вектор, равный классическому векторному произведению $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$, причем этот изоморфизм сохраняет меру элементов в следующем смысле: если два бивектора имели равную меру, то соответствующие им векторы тоже имеют равную длину. Но нельзя объявлять, что можно *отождествить* бивектор с соответствующим ему векторным произведением, потому что меры этих объектов имеют *разную* физическую размерность, хотя *численные* значения этих мер и совпадают.

5. Значит, нужно иметь какое-то другое определение векторного произведения, чтобы оно в скалярном умножении с другим вектором дало величину, физическая размерность которой соответствовала бы размерности объема. Сначала мы опишем известный алгебро-геометрический подход к построению такого определения, для чего используем понятие дополнительного бивектора. Общее определение поливектора, согласно [1],стр.35, следующее. Пусть в евклидовом векторном n-мерном пространстве введено понятие p-вектора A, $1 \le p \le n-1$ (соответствующее случаю $p = 2$ понятие бивектора нам уже известно, случаю $p > 2$ соответствует упорядоченная совокупность p векторов, расположенных в некотором p-мерном подпространстве, и вместо площади параллелограмма надо говорить об объеме p-мерного параллелепипеда, построенного на этих векторах, а положительное значение его объема и будет мерой этого p-вектора). Тогда дополнительным к p-вектору A поливектором B будет $(n-p)$-вектор, для которого: 1) каждый из составляющих его $n-p$ векторов ортогонален к подпространству, натянутому на p векторов рассматриваемого p-вектора; 2) поливекторы A и B имеют равные меры (в одинаковой физической размерности); 3) ориентация пространства, задаваемая векторами p-вектора A и $(n-p)$-вектора B, взятыми с сохранением их общего порядка, положительна, т.е. совпадает с заранее данной ориентацией самого пространства.

Эти определения и условия предполагают, что мера рассматриваемого p-вектора отлична от нуля.

В наиболее интересном для нас случае трехмерного пространства дополнительный к бивектору A поливектор B на самом деле оказывается 1-вектором, но с мерой, равной мере данного бивектора. Этот 1-вектор по определению должен быть ортогонален обоим векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, составляющим рассматриваемый бивектор, и мера его должна быть равна площади параллелограмма для бивектора, значит, его координаты должны численно совпасть с координатами векторного произведения $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Вычисление их довольно хлопотливое дело, оно сделано в [1], стр. 35-36, а мы даем только окончательный результат с проверкой его верности. Утверждается, что искомый дополнительный *1*-вектор $\mathbf{c}$ имеет контравариантные координаты

$$c^1 = \frac{1}{\sqrt{detG}} P_{23}, \; c^2 = \frac{1}{\sqrt{detG}} P_{31}, \; c^3 = \frac{1}{\sqrt{detG}} P_{12}. \qquad (20)$$

Как видим из (14), в вычислении контравариантных координат бивектора участвуют контравариантные координаты определяющих его векторов. Выше в (17) мы получили формулу для выражения ковариантных координат бивектора через его контравариантные координаты. Для удобства вычислений перепишем ее здесь в виде

$$P_{ij} = \sum_{i,j} g_{im} g_{jk} P^{km},$$

и выразим контравариантные координаты c^i *1*-вектора $\mathbf{c}$ через контравариантные координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$). Сначала с учетом равенств $P^{ii} = 0, P^{ij} = -P^{ji}$ находим ковариантные координаты:

$$\begin{aligned} P_{12} &= G_{33}P^{12} + G_{32}P^{31} + G_{31}P^{23} \\ P_{31} &= G_{23}P^{12} + G_{22}P^{31} + G_{21}P^{23} \\ P_{23} &= G_{13}P^{12} + G_{12}P^{31} + G_{11}P^{23}, \end{aligned} \qquad (21)$$

где G_{ij} – алгебраические дополнения элементов g_{ij} в матрице G из (7). Подставляя найденные значения ковариантных координат в формулу (20), находим искомые значения контравариантных координат c^i.

Теперь проверим, что *1*-вектор **c** ортогонален векторам **a** и **b**). Рассмотрим скалярное произведение $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$. Имеем

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = \sum_{ij} g_{ij} a^i c^j = a^1 \sum_j g_{1j} c^j + a^2 \sum_j g_{2j} c^j + a^3 \sum_j g_{3j} c^j.$$

Убедимся, что эта сумма равна нулю. Действительно, рассмотрим первую сумму. С учетом (21) получаем

$$a^1(g_{11}P_{23} + g_{12}P_{31} + g_{13}P_{12}) = a^1((g_{11}G_{13} + g_{12}G_{23} + g_{13}G_{33})P^{12} +$$
$$(g_{11}G_{12} + g_{12}G_{22} + g_{13}G_{32})P^{31} + (g_{11}G_{11} + g_{12}G_{21} + g_{13}G_{31})P^{23}) = a^1 detGP^{23}.$$

Вторая и третья суммы равны соответственно $a^2 detGP^{31}$ и $a^3 detGP^{12}$. Учитывая значения P^{ij} из (14) в общей сумме получаем

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) = \sqrt{detG}(a^1(a^2b^3 - a^3b^2) + a^2(a^3b^1 - a^1b^3) + a^3(a^1b^2 - a^2b^1)) = 0,$$

что и хотели получить. Аналогично показывается ортогональность векторов **b** и **c**.

Далее проверяем, что мера *1*-вектора **c** равна мере бивектора [**ab**]. Так как мы сейчас знаем контравариантные координаты *1*-вектора **c**, то его меру m можем вычислить по формуле

$$m = \sqrt{\sum_{i,j=1,2,3} g_{ij} c^i c^j}\ . \qquad (22)$$

Используя выражения для P_{ij} из 1), вычисляем подкоренное выражение следующим его представлением

$$\begin{aligned}\sum g_{ij}c^ic^j = \frac{1}{detG}[&g_{11}(G_{13}P^{12} + G_{12}P^{31} + G_{11}P^{23})P_{23} +\\ &g_{22}(G_{23}P^{12} + G_{22}P^{31} + G_{21}P^{23})P_{31} +\\ &g_{33}(G_{33}P^{12} + G_{32}P^{31} + G_{31}P^{23})P_{12} +\\ &g_{12}(G_{13}P^{12} + G_{12}P^{31} + G_{11}P^{23})P_{31} +\\ &g_{21}(G_{23}P^{12} + G_{22}P^{31} + G_{21}P^{23})P_{23} +\\ &g_{13}(G_{13}P^{12} + G_{12}P^{31} + G_{11}P^{23})P_{12} +\\ &g_{31}(G_{33}P^{12} + G_{32}P^{31} + G_{31}P^{23})P_{23} +\\ &g_{23}(G_{23}P^{12} + G_{22}P^{31} + G_{21}P^{23})P_{12} +\\ &g_{32}(G_{33}P^{12} + G_{32}P^{31} + G_{31}P^{23})P_{31}].\end{aligned}$$

Если мы соберем вместе коэффициенты при произведениях вида $P^{mk}P_{st}$, то окажется, что при произведениях $P^{12}P_{12}, P^{23}P_{23}$ и $P^{31}P_{31}$ коэффициенты будут равны 1, а в остальных случаях коэффициентами будут суммы произведений элементов одного столбца матрицы G на алгебраические дополнения элементов другого столбца, т.е. они будут нулями. В итоге получим, что введенный *1*-вектор имеет меру

$$m^2 = P^{12}P_{12} + P^{31}P_{31} + P^{23}P_{23}$$

что в точности совпадает с полученной в формуле (19) мерой бивектора, имея ту же физическую размерность *см*^{2}. Чтобы можно было сравнить этот *1*-вектор с определяемым в учебниках векторным произведением, рассмотрим случай ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Тогда обычное векторное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ векторов $\mathbf{a} = a^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{b} = b^i\mathbf{e}_i$ имеет в этом базисе безразмерные контравариантные координаты

$$P^{23} = a_2b^3 - a^3b^2, P^{31} = a^3b^1 - a^1b^3, P^{12} = a^1b^2 - a^2b^1$$

а контравариантные координаты построенного по $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ 1-вектора равны, согласно (20) и (21),

$$P^{23}\text{см},\ \ P^{31}\text{см},\ \ P^{12}\textit{см}$$

(учтено, что $detG$ имеет физическую размерность *см*^{6}, а алгебраические дополнения имеют физическую размерность *см*^{4}). Именно этот вектор фактически и используется при введении смешанного произведения как скалярного произведения векторного произведения двух векторов на третий вектор, с последующим толкованием результата как объема параллелепипеда.

Для четкого отличения двух определений векторного произведения напишем их явные представления в случае общего ортогонального базиса. Пусть дан ортогональный базис с векторами

$$\tilde{\mathbf{e}}_1 = f\mathbf{e}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2 = g\mathbf{e}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3 = h\mathbf{e}_3,$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ - стандартный ортонормированный базис с правой ориентацией, где неравные нулю коэффициенты f, g, h – безразмерные скаляры.

Матрица G в этом случае имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

с $g_{11} = f^2 \textit{см}^2,\ g_{22} = g^2 \textit{см}^2,\ g_{33} = h^2 \textit{см}^2$. Пусть базис $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ тоже правой ориентации, Рассмотрим случай, когда $f > 0, g > 0, h > 0$. Тогда при вычислении векторного произведения векторов

$$\mathbf{a} = a^1\tilde{\mathbf{e}}_1 + a^2\tilde{\mathbf{e}}_2 + a^3\tilde{\mathbf{e}}_3 \text{ и } \mathbf{b} = b^1\tilde{\mathbf{e}}_1 + b^2\tilde{\mathbf{e}}_2 + b^3\tilde{\mathbf{e}}_3$$

как *1*-векторв $\mathbf{c}$ с учетом формул (20) и (21) получаем

$$\mathbf{c}=\frac{1}{|G|}[g_{22}g_{33}(a^2b^3-a^3b^2)\tilde{\mathbf{e}}_1+g_{11}g_{33}(a^3b^1-a^1b^3)\tilde{\mathbf{e}}_2+g_{11}g_{22}(a^1b^2-a^2b^1)\tilde{\mathbf{e}}_3], \qquad (23)$$

где через $|G|$ обозначен квадратный корень из определителя матрицы G.

В то же время, если мы вычислим векторное произведение $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ как вектор, получим

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{gh}{f}(a^2b^3 - a^3b^2)\tilde{\mathbf{e}}_1 + \frac{fh}{g}(a^3b^1 - a^1b^3)\tilde{\mathbf{e}}_2 + \frac{fg}{h}(a^1b^2 - a^2b^1)\tilde{\mathbf{e}}_3. \quad (24)$$

Сравнивая (23) и (24), видим, что в них численные значения коэффициентов совпадают, отличие только в том, что их физическая размерность в (23) равна *см*, а в (24) коэффициенты являются безразмерными величинами[5]. Значит, пры выборе в качестве векторного произведения *1*-вектора базисные векторы векторно умножаются по такому правилу:

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3 \cdot \textit{см},\ (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \cdot \textit{см},\ (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 \cdot \textit{см}. \qquad (25)$$

Случай, когда один коэффициент положительный (скажем, $f > 0$), а два отрицательны, рассматривается аналогично. В случае отрицательной ориентации базиса $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ формулы для нахождения векторного они получаются из предыдущей формулы умножением на -1, поэтому в итоге оба

[5]Заметим, что когда пространство $\mathbf{R}^3$ с векторным произведением векторов приводят в качестве примера линейного пространства со структурой алгебры, то имеют в виду векторное произведение, определяемое именно по правилу (24), так как результатом умножения векторов тоже должен быть вектор из того же пространства.

выражения для векторного произведения оказываются в тех же отношениях, как и для базиса правой ориентации.

Важно еще отметить следующее наблюдение: если в качестве векторного произведения выбран *1*-вектор, тогда оно (т.е. произведение) оказывается инвариантным относительно изменения масштаба измерения длин (чего не было, как помним, для случая, когда результатом векторного произведения объявлялся вектор). Действительно, пусть все длины измеряются в миллиметрах и пусть выбран ортонормированный базис $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ из векторов длины 1*мм*. Положим, согласно (25),

$$(\tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{e}}_2) = \tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \textit{мм}, \ (\tilde{\mathbf{e}}_2 \times \tilde{\mathbf{e}}_3) = \tilde{\mathbf{e}}_1 \cdot \textit{мм}, \ (\tilde{\mathbf{e}}_3 \times \tilde{\mathbf{e}}_1) = \tilde{\mathbf{e}}_2 \cdot \textit{мм}. \tag{26}$$

Тогда прежние базисные векторы имеют представление

$$\mathbf{e}_1 = 10\tilde{\mathbf{e}}_1, \mathbf{e}_2 = 10\tilde{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_3 = 10\tilde{\mathbf{e}}_3.$$

Для их попарного векторного произведения имеем

$$(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = 100(\tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{e}}_2) = 100\tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \textit{мм} = 10\tilde{\mathbf{e}}_3 \cdot \text{см} = \mathbf{e}_3 \cdot \textit{см}$$

(аналогично для остальных пар), т.е. их векторные произведения получаются такими же, какими были до изменения масштаба измерения. Верно и обратное, выбор векторных произведений в «миллиметровом масштабе» в виде (26) не случайный, а приходит от существующего в «сантиметровом масштабе$>$. произведения. Действительно,

$$(\tilde{\mathbf{e}}_1 \times \tilde{\mathbf{e}}_2) = \frac{1}{100}(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) = \frac{1}{100}\mathbf{e}_3 \cdot \textit{см} = \frac{1}{10}\mathbf{e}_3 \cdot \textit{мм} = \tilde{\mathbf{e}}_3 \textit{мм},$$

что согласуется с (26). Значит, можем сказать, что операция векторного произведения в виде взятия 1-вектора инвариантна не только относительно ортогональных преобразований с определителем $+1$, но она инвариантна и относительно преобразований подобия, чего нет для его «учебного» определения в виде вектора.

6. Итак, оказалось, что существуют два определения векторного произведения, дающие векторы разной природы, точнее, разной меры. Если работать с векторами, оставаясь в их представлении только как направленных отрезков и понимая их меру только как длину, то ввести *1*-вектор не удастся, и мы не сможем добиться логически безупречного изложения понятия смешанного произведения. Поэтому основная проблема, которая сейчас возникает, состоит, на наш взгляд, в следующем: как изменить в учебных курсах изложение векторного произведения, не теряя математической строгости и в то же время не усложняя излишне этот материал? Может, стоит ввести два типа произведения - векторное произведение первого рода и векторное произведение второго рода (подобно тому, как есть интегралы 1-го и 2-го рода по кривым и поверхностям)? Отличие в них будет превращение координат «обычного» контравариантного векторного произведения из безразмерных величин в величины размерности длины. Тогда мера самого́ векторного произведения получит размерность «линейная единица в квадрате» и его можно будет использовать в смешанном произведении для вычисления объема параллелепипеда. Одна из возможностей определения векторного произведения состоит именно «в подгонке» его определения под пригодность в использовании смешанного произведения как формулы объема. Об этом говорил автору Э.Б. Винберг и это сделано в учебном пособии [3], стр. 25, следующим образом. *Пусть даны векторы* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$*; назовем их векторным произведением* $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$ *вектор* $\mathbf{z}$*, такой, что смешанное произведение* $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x}) = (\mathbf{z}\cdot\mathbf{x})$ *для любого вектора* $\mathbf{x}$. При использовании этого определения заранее предполагается, что смешанное произведение трех векторов уже известно (оно дается как определитель 3-го порядка из координат умножаемых векторов). Хотя в этой книге и не дается никакого анализа размерностей используемых выражений, но ясно, что компоненты определяемого таким образом векторного произведения будут иметь размерность вида $\textit{см}^2$ (и поэтому найденное таким образом $\mathbf{z}$ *не будет вектором* в смысле введенного там же ранее на стр.23 определения вектора!). Как видим, даже в учебной литературе есть случаи, когда векторное произведение не представляется некоторым вектором с линейной мерой, а «честно» представляется вектором с квадратичной мерой.

Наверно, многим приходилось объяснять студентам, что бывают векторы, имеющие квадратичную размерность. Они появляются, например, при вычислении давления жидкости на погруженное тело и при выводе закона Архимеда о выталкивающей силе жидкости и газа. Направление этих векторов совпадает с направлением нормали к рассматриваемой площадке, а их мера равна площади площадки. Чтобы оставить за ними название «вектор», для них, как нам кажется, лучше всего предложить название "ареальный вектор"(мы их иногда называли *направленной площадью*[6] или *векторной площадью*, но тогда упор получался на слово «площадь»).

Так как проблема с размерностью чаще всего встречается в физике, то физики обходят эту трудность простым способом - они считают базисные векторы безразмерными величинами, а все размерности переводят на координаты. Точно также во многих случаях можно поступать и в геометрии - размерности "сидят"в координатах. Будем считать, что строчки $\{1,0,0\},\ \{0,1,0\},\ \{0,0,1\}$ с обозначениями $\mathbf{e}_1^0, \mathbf{e}_2^0, \mathbf{e}_3^0$ и их линейные комбинации $bfe_i = a_i\mathbf{e}_1^0 + b_i\mathbf{e}_2^0 + c_i\mathbf{e}_3^0$ с безразмерными коэффициентами соответствуют направлениям. Три направления $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3^0$ будем называть *основным.* Базис переводится в любой другой базис с помощью некоторой невырожденной марицы с безразмерными коэффициентами. Вектором называем любую линейную комбинацию базисных направлений с коэффициентами одной и той же физической размерности. Все векторы можно умножать на безразмерные коэффициенты, а сложение возможно только между векторами одинаковой размерности. Скалярное и векторное произведения определены, если они определены для направлений основного базиса. Скалярное произведение для всех векторов , определяется по закону билинейности с умножением размерностей сомножителей. Объясним, как определить векторное произведение. Пусть

$$(\mathbf{e}_1^0 \times \mathbf{e}_2^0) = \gamma\mathbf{e}_3^0,\ (\mathbf{e}_2^0 \times \mathbf{e}_3^0) = \gamma\mathbf{e}_1^0,\ (\mathbf{e}_3^0 \times \mathbf{e}_1^0) = \gamma\mathbf{e}_2^0,$$

с дополнительным условием $(\mathbf{e}_i^0 \times \mathbf{e}_j^0) = -(\mathbf{e}_j^0 \times \mathbf{e}_i^0)$, где γ - коэффициент некоторой размерности, и

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1^0 + a^2\mathbf{e}_2^0 + a^3\mathbf{e}_3^0,\ \mathbf{b} = b^1\mathbf{e}_1^0 + b^2\mathbf{e}_2^0 + b^3\mathbf{e}_3^0$$

[6]Но называть их *ориентированной площалью* нельзя, так как ориентированная площадь - это число со знаком.

умножаемые векторы размерности соответственно γ_1 и γ_2. Тогда

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_2^0\times\mathbf{e}_3^0) & (\mathbf{e}_3^0\times\mathbf{e}_1^0) & (\mathbf{e}_1^0\times\mathbf{e}_2^0) \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} =$$

$$\gamma[(a^2b^3 - a^3b^2)\mathbf{e}_1^0 + (a^3b^1 - a^1b^3)\mathbf{e}_2^0 + (a^1b^2 - a^2b^1)\mathbf{e}_3^0] \qquad (27)$$

с коэффициентами размерности $\gamma\gamma_1\gamma_2$, где коэффициент размерность γ *подбирается* таким образом, чтобы результат векторного произведения имел нужную по смыслу задачи размерность (отметим, что размерности γ_1 и γ_2 уже «сидят». в коэффииентах a и b).

Для векторов, заданных в общем базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, векторное произведение вычисляется по аналогичной формуле

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1^0\times\mathbf{e}_2^0) \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix},$$

где векторные произведения $(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)$, $(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1$, $(\mathbf{e}_1^0\times\mathbf{e}_2^0)$ должны быть предварительно вычислены в той же базе с учетом матрицы перехода от основного базиса, если хотеть иметь ответ в исходной базе.

В нашем геометрическом случае размерности γ_1 и γ_2 обе равны *см*, а размерность γ должна быть равна *см*$^{-1}$, если хотим, чтобы векторное произведение было вектором, и коэффициент γ должен быть нулевой размерности, т.е. числом 1, если хотим, чтобы векторное произведение было *1*-вектором. В первом случае имеем

$$(\mathbf{e}_1^0\times\mathbf{e}_2^0) = \textit{см}^{-1}\mathbf{e}_3^0,\ (\mathbf{e}_2^0\times\mathbf{e}_3^0) = \textit{см}^{-1}\mathbf{e}_1^0,\ (\mathbf{e}_3^0\times\mathbf{e}_1^0) = \textit{см}^{-1}\mathbf{e}_2^0$$

а во втором случае

$$(\mathbf{e}_1^0\times\mathbf{e}_2^0) = \mathbf{e}_3^0,\ (\mathbf{e}_2^0\times\mathbf{e}_3^0) = \mathbf{e}_1^0,\ (\mathbf{e}_3^0\times\mathbf{e}_1^0) = \mathbf{e}_2^0,$$

(т.е. можно сказать, что для случая 1-вектора операция векторного умножения векторов основного базиса кажется более естественной – нулевые размерности слева и справа). Надеемся, после сказанного стало ясно, как объяснить, например, кажущиеся несовпадения в размерностях в тождествах в задаче 158 в сборнике [2] (на что обратил мое внимание Е.В. Троицкий) - в них достаточно понимать под векторными произведениями *1*-векторы, а иначе надо говорить о совпадении *численных* значений левых и правых частей.

Сравним эти выводы с классическими формулами. Введем единичные векторы $\mathbf{i} = \gamma_1 \mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{j} = \gamma_1 \mathbf{e}_2^0$ и $\mathbf{k} = \gamma_1 \mathbf{e}_3^0$ с $\gamma_1 = 1\text{см}$. Тогда из формулы (27) получим, что

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \gamma\gamma_1^2 \mathbf{e}_3^0 = \gamma\gamma_1 \mathbf{k},$$

и если выберем $\gamma = \gamma_1^{-1} = \text{см}^{-1}$, то придем к классическому соотношению $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{k}$, т.е. результатом векторного умножения будет вектор с линейной мерой. Если же выберем γ как скаляр 1, то получим $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathit{1\ см}\mathbf{k}$, т.е. результатом будет вектор с квадратичной мерой, что соответствует определению *1*-вектора и может быть использовано для толкования смешанного произведения как формулы объема параллелепипеда. Естественно, для различения этих случаев нужно иметь различные их обозначения (например, можно предложить обозначения $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ и $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$).

Примером векторного произведения векторов с разными размерностями является формула для нахождения вектора скорости точек тела, вращающегося вокруг некоторой оси с постоянной скоростью. Пусть угловая скорость задана как вектор $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_3^0$ с размерностью $]\omega[= \gamma_1 = \frac{\text{рад}}{\text{сек}}$, а положение точки задано радиус-вектором $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1^0 + y\mathbf{e}_2^0 + z\mathbf{e}_3^0$ с размерностями $\gamma_2 = \text{см}$. Тогда формула для определения скорости $\mathbf{v}$ точки, задаваемая векторным произведением $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, приводит к значению $\mathbf{v} = \omega(-y\mathbf{e}_1^0 + x\mathbf{e}_2^0)\gamma$. Так как скорость, очевидно, должна измеряться отношением $\frac{\textit{длина}}{\textit{время}}$, коэффициент γ должен быть безразмерной единицей.

По-видимому, могут встретиться и случаи, когда компоненты вектора имеют разные размерности, но этот экзотический вариант уже выходит за рамки нашего рассмотрения.

Мы представили только один вариант изложения темы о векторном произведении. Несомненно, могут быть и другие варианты (мы даже знаем, что они есть) как изложения этой теыы, так и принципиально других толкований векторного произведения с привлечением других понятий и объектов, таких как сопряженные пространства, дуальные базисы, внешнее умножение, тензоры и т.д.. Основное, что мы хотели донести до читателя, это существование проблемы, которую мы и обсудили.

Литература

[1] Картан Э. Геометрия римановых пространств // 2012, М.♦ И.: Ижевский Институт компьютерных исследований, 431 с.

[2] Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре (под редакцией Ю.М. Смирнова) // 2016, М.: МЦНМО, 392 с.

[3] Hsiung Ch.-Ch. A First Course in Differential Geometry // John Wiley & Sones, Inc., N.-Y., 1981, 343 p.