И.Х. Сабитов

Конспекты семинаров по курсу математического анализа

Тема: Формулы Грина и Гаусса-Остроградского для интегралов 1-го рода

1. Формула Грина. Мы знаем, как свести криволинейный интеграл 2-го рода ориентированной кривой к криволинейному интегралу 1-го рода:

$$\int\limits_{L^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{L} [P(x,y)x'(s) + Q(x,y)y'(s)]ds,$$

где $x = x(s), y = y(s)$ - это натуральное уравнение кривой L, и отсчет длины идет по ее возрастанию, т.е. параметризация кривой выбрана так, что при ее обходе в соответствии с обозначением L^+ всегда $ds > 0$ (некоторые авторы принимают эту формулу даже за само *определение* криволинейного интеграла 2-го рода). Обратный переход от интеграла 1-го рода к интегралу 2-го рода обычно рассматривается только в случае интегралов по окружности и, соответственно, формула Грина применяется только к интегралам 2-го рода.

Покажем, как перейти в общем случае от криволинейного интегралов 1-го рода к интегралу 2-го рода, и выведем соответствующую формулу Грина. Пусть дан криволинейный интеграл 1-го родв

$$\int\limits_{L} f(x,y)ds. \tag{1}$$

Предполагаем, что кривая L задана неявным уравнением $F(x,y) = 0$ с условием, что функция $F(x,y)$ известна в некоторой полосе вокруг кривой (такая полоса обычно называется *трубчатой окрестностью* кривой), она там дифференцируема и $grad\ F\mid_L \neq 0$. Тогда нормаль к кривой L будет направлена по $grad\ F$. Единичная нормаль $\mathbf{n}$ будет иметь координаты

$$\mathbf{n} = \{n_1, n_2\} = \{\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}}, \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}}\}. \tag{2}$$

Единичный касательный вектор $\mathbf{t}$ к кривой имеет координаты $\{t_1(s), t_2(s)\} = \{\pm n_2, \mp n_1\}$. Поскольку при вычислении криволинейного интеграла (1) кривая должна быть параметризована так, чтобы длина дуги возрастала, считаем, что направление обхода известно, и в соответствии с этим выберем направление касательного вектора. Пусть, скажем, $\mathbf{t} = \{-n_2, n_1\}$. Так как этот касательный вектор единичный, то мы можем считать его компоненты равными $x'(s), y'(s)$ (вспомните характеристический признак выбора натурального параметра). Обозначим эти компоненты как $\{\cos\alpha, \sin\alpha\}$. Тогда мы можем представить интеграл (1) в виде

$$\int\limits_{L} f(x,y)ds = \int\limits_{L} [f(x,y)\cos\alpha\ x'(s) + f(x,y)\sin\alpha\ y'(s]ds =$$

$$\int\limits_{L^+} f(x,y)\cos\alpha\ dx + f(x,y)\sin\alpha\ dy = \int\limits_{L^+} f(x,y)\frac{-F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}}dx + f(x,y)\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}}dy \tag{3}$$

Теперь предположим, что L замкнутая жордановая кривая, и что подынтегральные функции в (3) существуют и дифференцируемы во всей области D, ограниченной кривой L. Тогда к интегралу (3) применима формула Грина и мы можем представить криволинейный интеграл 1-го рода (1) следующей формулой Грина:

$$\oint\limits_{L} f(x,y)ds = \iint\limits_{D} [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f(x,y)F_x(x,y)}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{f(x,y)F_y(x,y)}{\sqrt{F_x^2+F_y^2}})]dxdy. \tag{4}$$

Замечание 1. Отметим, что в формуле Грина обычно предполагается, что обход границы области происходит в положительном направлении, оставляющем область слева, поэтому написанная формула верна, , если градиент функции $F(x, y)$ направлен наружу (т.е. пара $\mathbf{n}, \mathbf{t}$ правая). Если же $grad\ F$ направлен внутрь области, тогда пара $\mathbf{n}, \mathbf{t}$ должна быть левой, т.е. надо выбрать $\{t_1(s), t_2(s)\} = \{n_2, -n_1\}$ и соответственно в (4) знак правой части изменится на противоположный (а левая часть останется без изменения).

Замечание 2. Если кривая является графиком функции $y = \varphi(x)$, тогда ее неявное задание может быть представлено в виде $F(x, y) = y - \varphi(x) = 0$. Используя это замечание, рассмотрите какой-нибудь простой случай (например, интеграл по дуге окружности или по отрезку прямой) и убедитесь, что криволинейный интеграл 1-го рода, вычисляемый по формуле (3), действительно не зависит от выбора направления обхода кривой. .

Замечание 3. Так как внутри области D у функции $F(x, y)$ обязательно будут одна или даже. может быть. много экстремальных и, возможно, еще просто критических точек, то эти точки будут для подынтегральной функции в (4) особыми точками. Поэтому представляет интерес найти какие-нибудь условия, достаточные для того, чтобы в этих точках подынтегральное выражение в формуле (4) было интегрируемо хотя бы в несобственном смысле.

Замечание 4. Вообще говоря, не обязательно, чтобы функции $f(x, y)$ и $F(x, y)$ в отдельности существовали в D и их встречающиеся в (4) совместные комбинации удовлетворяли требуемым для формулы Грина условиям. Достаточно, чтобы каждая из этих комбинаций со значений на кривой L была непрерывно продолжима в область D как функция, почти всюду имеющая соответствующие производные с интегрируемостью хотя бы в несобственном смысле.

Замечание 5. Предположение о представимости кривой как линии уровня некоторой функции на самом деле не является существенным ограничением, так как доказано[1], что любая C^2- гладкая жорданова кривая может быть представлена как линия уровня функции, определенной в некоторой трубчатой окрестности кривой. И именно для такой функции по Замечанию 4 может появиться необходимость доказательства возможности ее продолжения на всю область D с выполнением нужных свойств.

Замечание 6. Применим формулу Грина (3) для вычисления длины жордановой кривой как периметра p области D. Для этого представим длину замкнутой кривой как интеграл $\oint\limits_L f(x, y)ds$ с $f(x, y) = 1$ и по формуле (3) получим

$$p = \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_x(x, y)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_y(x, y)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}\right)\right]dxdy.$$

Правда, мне не известны примеры, когда вычисление длины замкнутой кривой этим способом оказалось бы более легким, чем ее вычисление просто по какому-либо уравнению самой кривой.

Замечание 7. Как пример еще одного применения, упомянем следующую интегральную формулу

$$\oint\limits_L |gradF(x, y)|ds = \pm \iint\limits_D \Delta F(x, y)dxdy,$$

где L, как и прежде, замкнутая жорданова линия уровня $F(x, y) = Const$ (знак выбирается в учетом Замечания 1). .

[1] См. стр. 139-142 и 469 в книге М. до Кармо. Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей, М.-Иж., 2013.

2. формула Гаусса-Остроградского. Теперь рассмотрим случай поверхностных интегралов 1-го рода. Здесь мы тоже знаем, как свести поверхностный интеграл 2-го рода по ориентированной поверхности S к поверхностному интегралу 1-го рода:

$$\iint\limits_{S^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$

$$\iint\limits_{S} [P(x,y,z)\cos\alpha) + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)cos\gamma]dS, \tag{5}$$

где $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы единичной нормали к поверхности, согласованной с ее выбранной ориентацией (некоторые авторы тоже принимают эту формулу за *определение* поверхностного интеграла 2-го рода). Обратный переход от интеграла 1-го рода к интегралу 2-го рода обычно не рассматривается, а формула Гаусса-Остроградского применяется только к интегралам 2-го рода.

Покажем, как перейти в общем случае от поверхностного интегралов 1-го рода к интегралу 2-го рода, и выведем соответствующую формулу Гаусса-Остроградского. Пусть дан поверхностный интеграл 1-го родв

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS. \tag{6}$$

Предполагаем, что поверхность S задана неявным уравнением $F(x,y,z) = 0$ с условием, что функция $F(x,y,z)$ известна в некотором пространственном слое вокруг поверхности (такой слой обычно называется *трубчатой окрестностью* поверхности), она там дифференцируема и $grad\ F\ |_S \neq 0$. Тогда нормаль к поверхности S будет направлена по $grad\ F$. Единичная нормаль $\mathbf{n}$ будет иметь координаты, выраженные через направляющие косинусы

$$\mathbf{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \{\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}\}. \tag{7}$$

Тогда интеграл (5) можно представить в следующем виде

$$\iint\limits_{S} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{S} f(x,y,z)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)dS =$$

$$\iint\limits_{S} f(x,y)[\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}\cos\alpha + \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}\cos\beta + \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}\cos\gamma]dS =$$

$$= \iint\limits_{S^+} f(x,y)[\frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}dydz + \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}dzdx + fracF_z\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}]dxdy. \tag{8}$$

Если теперь предположить, что поверхность S замкнута, не имеет самопересечений, нормаль (7) внешняя и для подынтегральных функций в (8) выполнены все условия теоремы Гаусса-Остроградского, тогда для поверхностного интеграла 1-го рода (5) справедлива следующая формула Гаусса-Остроградского

$$\iint\limits_{S=\partial D} f(x,y,z)dS =$$

$$\iiint\limits_{D} [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{f(x,y,z)F_x(x,y,z)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{f(x,y,z)F_y(x,y,z)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{f(x,y,z)F_z(x,y,z)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}})]dxdydz. \tag{9}$$

Все замечания. приведенные к формуле Грина, остаются в силе с очевидными изменениями текста. Замечание 6 надо изменить так.

Замечание 8. *Формулу (9) можно использовать для вычисления площади A границы тела, задаваемого неравенством $F(x, y, z) \geq 0$, . Для этого надо вычислить интеграл $\iint dS$ с использованием формулы 9) при $f(x, y, z) = 1$:*

$$A = \iint\limits_S dS = \iiint\limits_D [\frac{\partial}{\partial x}(\frac{F_x(x,y,z)}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{F_y(x,y,z)}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{F_z(x,y,z)}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}})]dxdydz.$$

Замечание 9. Имеет место и аналог Замечания 7: Верна интегральная формула

$$\iint\limits_{\partial D} |gradF(x,y,z)|dS = pm \iiint\limits_D \Delta F(x,y,z)dxdydz,$$

где ∂D, как и прежде, жорданова поверхность уровня $F(x, y, z) = Const$ (знак выбирается в учетом аналога Замечания 1). Эту формулу можно истолковать как утверждение, что поток поля градиента функции через ловерхность уровня той же функции равен интегралу по внутренности поверхности от дивергенции поля. .