

## ЭКЗАМЕНАЦИОННОЕ ЗАДАНИЕ

по математическому анализу за четвёртый семестр<sup>1</sup>

1. В области  $D \subset \mathbb{R}^3$  действует векторное поле сил  $F$ . Рассчитываем работу, необходимую для перемещения в этом поле из точки  $a \in D$  в точку  $b \in D$  вдоль гладкого пути  $\gamma \subset D$ .

а) Напишите формулу для подсчёта этой работы в виде интеграла первого и второго рода (т.е. в терминах  $ds$  и  $dx, dy, dz$  соответственно).

б) Подсчитайте работу по перемещению массы в гравитационном поле Земли и покажите, что эта работа зависит только от уровней высот исходного и конечного положений.

с) Найдите для Земли работу выхода из её гравитационного поля и соответствующую (вторую) космическую скорость.

(Радиус Земли примерно 6400 км ; ускорение свободного падения на поверхности Земли принять  $10 \text{ м/с}^2$  .)

2. а) В области  $D \subset \mathbb{R}^3$  имеется векторное поле  $V$  (например, поле скорости некоторого течения). Напишите формулу для подсчёта потока векторного поля  $V$  через ориентированную поверхность  $S = S_+^2 \subset D$  в виде интеграла первого и второго рода (т.е. в терминах  $d\sigma$  и  $dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$  соответственно).

б) Взяв выпуклый многогранник  $D \subset \mathbb{R}^3$ . На каждой его грани построен вектор, направленный вдоль внешней нормали и по величине равный площади соответствующей грани. Физика говорит, что сумма этих векторов равна нулю (иначе построим вечный двигатель). Математика даёт то же. Покажите это.

с) Прямым расчётом выведите закон Архимеда (подсчитайте выталкивающую силу, действующую на тело, погруженное, например, в наполненную водой ванну, как результирующую давления на поверхность тела).

---

<sup>1</sup>Ориентиры оценки:

Для получения «отлично» необходимо правильно ответить на пять из шести вопросов.

Для получения «удовлетворительно» достаточно правильно ответить на три из шести вопросов.