

ЭКЗАМЕНАЦИОННОЕ ЗАДАНИЕ

по математическому анализу за второй семестр¹

1. Всегда ли интегрируема композиция интегрируемых по Риману функций? Обоснуйте ответ.

2. а) Функция $\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt$, называемая *интегралом вероятности ошибок*, имеет пределом 1 при $x \rightarrow +\infty$. Изобразите график этой функции и найдите её производную.

б) Покажите, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right) \right).$$

3. а) Укажите формулы для вычисления линейных поправок к значениям величин A^{-1} , $\exp(E)$, $\det(E)$, $\langle a, b \rangle$ при малом изменении аргументов (здесь A — обратимая, E — единичная матрицы; a, b — векторы; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение).

б) Какова относительная погрешность $\delta = \frac{|\Delta f|}{|f|}$ при вычислении значения гладкой функции $f(x, y, z)$ в точке (x, y, z) , координаты которой даны с абсолютными погрешностями $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ соответственно?

в) Какова относительная ошибка в вычислении объёма комнаты, размеры которой таковы: длина $x = 5 \pm 0,05$ м, ширина $y = 4 \pm 0,04$ м, высота $z = 3 \pm 0,03$ м?

4. а) Одна из частных производных функции двух переменных, заданной в круге, равна нулю во всех точках круга. Значит ли это, что функция не зависит от соответствующей переменной в этом круге?

б) Изменится ли ответ, если вместо круга взять произвольную выпуклую область? А если взять вообще произвольную область?

5. Пусть $F(x, y, z) = 0$. Верно ли, что $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} = -1$? Почему?

6. Продемонстрируйте использование необходимых и достаточных признаков условного экстремума на примере отыскания экстремумов функции $f(x, y) = xy$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

¹Ориентиры оценки:

Для получения «отлично» необходимо решить любые пять из шести задач.

Для получения «удовлетворительно» достаточно справиться с вопросами 2а; 4а; 5; 6.